le,
ch
sik

Phys. g.
493 f

Violle

R 125-27

Lehrbuch der Physik.

Von

J. Violle,
Professor an der École Normale zu Paris.

Deutsche Ausgabe

von

Dr. E. Gumlich, Dr. L. Holborn, Dr. W. Jaeger, Dr. D. Kreichgauer, Dr. St. Lindeck,
Assistenten an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Erster Theil: Mechanik.

Erster Band.

Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper.

Mit 257 Textfiguren.

Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1892.

19 F

Die hervorragend gute Aufnahme, welche das im Erscheinen begriffene Violle'sche Werk schon vor seiner Vollendung in Frankreich findet, lässt es gerechtfertigt erscheinen, dem deutschen naturwissenschaftlichen Publikum gleichzeitig eine Bearbeitung zu übergeben.

Bei der Mannigfaltigkeit der Ansprüche, welche von den verschiedensten Seiten an ein Lehrbuch der Physik gestellt werden, dürfte neben den schon vorhandenen ein neues umfassendes Werk gewiss Vielen willkommen sein.

Nichts kann den Charakter des Buches, das, was es giebt und will, besser zum Ausdruck bringen, als das Vorwort, welches Violle seinem Werke giebt und das dem vorliegenden Bande beigegeben ist.

Die ausführliche und klare Beschreibung der Apparate und namentlich die für derartige Lehrbücher ungewöhnlich eingehende Berücksichtigung der Technik legen beredtes Zeugniss dafür ab, wie der Verfasser seine Ansichten über die Aufgabe der Physik zu vertreten wusste. Für das eindringende Verständniss und die Würdigung der Leistungen einer Wissenschaft ist die Kenntniss der historischen Entwickelung eines jeden Problems von grosser Bedeutung; dieses historische Moment wird in fesselnder Darstellungsweise besonders betont und in zahlreichen Litteraturnachweisen zum Quellenstudium aufgefordert.

Durch seine grosse Vielseitigkeit gewinnt das Werk ein hervorragendes Interesse nicht nur für die Physiker von Fach, für Lehrer wie Lernende, sondern zum Theil auch für weitere Kreise, welche durch ihren Beruf oder durch Neigung Berührungspunkte mit der Physik haben.

Die deutschen Herausgeber waren, um der eleganten Schreibweise des Autors einigermassen gerecht zu werden, bestrebt, auch ihrerseits besonderen Werth auf die äussere Form der Darstellung zu legen. In dem Text brauchte, wie es bei einem so einheitlichen und abgerundeten Werke selbstverständlich ist, nicht viel geändert zu werden; dagegen wurden, wo es nötig erschien, Anmerkungen oder Ergänzungen zugefügt.

Der zweite Band, die Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper behandelnd und etwa 32 Bogen umfassend, gelangt ebenfalls in 5 Lieferungen à M. 2,— zur Ausgabe. Derselbe wird im Jahre 1892 fertig vorliegen und soll das alphabetische Sach- und Autoren-Register für beide Bände der Mechanik enthalten.

Der II. Theil des Lehrbuches, „Akustik und Optik“ enthaltend, soll ebenfalls im Laufe des Jahres 1892 folgen, — der III. Theil „Wärme“, sowie der IV. Theil „Elektricität und Magnetismus“ werden alsbald nach Erscheinen des französischen Originals zur Ausgabe gelangen.

Wir empfehlen das Violle'sche Lehrbuch den zahlreichen Interessenten angelegentlichst.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin N.

Lehrbuch der Physik.

Lehrbuch der Physik

von

J. Violle,

Professor an der École Normale zu Paris.

Deutsche Ausgabe

von

Dr. E. Gumlich, Dr. L. Holborn, Dr. W. Jaeger, Dr. D. Kreichgauer, Dr. St. Lindeck,

Assistenten an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Erster Theil: Mechanik.

Erster Band.

Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper.

Mit 257 in den Text gedruckten Figuren.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1892.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von Oscar Brandstetter, Leipzig.

Vorwort des Verfassers.

Dieses Werk wendet sich an Alle, welche sich ernstlich mit der Physik beschäftigen wollen. Wichtigere oder weniger bekannte Fragen behandelt der Verfasser besonders eingehend, beschränkt sich aber im Übrigen darauf, eine allgemeinere Übersicht zu geben und nichts Wesentliches unberücksichtigt zu lassen.

Neuerungen in der Anordnung des Stoffes, welche bei einem schon so oft von Meistern behandelten Gegenstand besonders gewagt erscheinen möchten, sind vermieden, wohl aber ist die Anlage des Werkes dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft so gut wie möglich angepasst.

Wenn wir nach der Anschauung früherer Zeiten der Natur Gefühle beilegen wollten, so würden wir sagen: Die Natur hat einen „horror quietis." Nichts ist fest im unermesslichen Weltall: Der Lauf der Gestirne, das Zittern der Atome, — Alles ist Unruhe und Bewegung.

Die heutige Naturwissenschaft sucht deshalb folgerichtig Alles auf mechanische Principien zurückzuführen, und der Physiker kann festbegründete Theorien nur auf Bewegungsgesetzen aufbauen.

Die nothwendige Einleitung in ein Lehrbuch der Physik bildet also die Mechanik, und die Erscheinung der Schwere liefert unmittelbar eine einfache und grossartige Anwendung derselben. Auf die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Körper folgt das Studium der schwingenden Bewegungen, das eigentliche Feld der Physik. In logischer Folge führt dann die Akustik, bei der diese Bewegungen als solche noch deutlich wahrnehmbar sind, auf die Optik und diese wiederum auf die Wärme. Zuletzt wird sich die Elektricität anschliessen, die man nach dem heutigen Stande unserer

Kenntnisse noch nicht in derselben Weise behandeln kann, obgleich es unstreitig jetzt möglich ist, auch hier das gewaltige Princip von der Erhaltung der Energie anzuwenden.

Die genaue Einsicht in dieses Princip ist die schönste Erkenntniss moderner Wissenschaft. Mit Recht kann man die Physik als die Lehre von der Verwandlung der Energie beizeichnen, ebenso wie die Chemie als die Lehre von der Verwandlung der Materie. Es würde jedoch nur einen scheinbaren Vortheil gewähren, aus jenem Princip die ganze Physik abzuleiten. Zweifellos ist es sowohl für die Anwendung als auch für die Theorie dieser Wissenschaft von grossem Interesse, die Beziehung, welche zwischen zwei Endgliedern einer Energieverwandlung besteht, aufstellen zu können. Vor Allem aber ist es wichtig, den Verlauf dieser Verwandlung selbst kennen zu lernen, und nur das Experiment vermag uns diese Kenntniss zu verschaffen.

Dies ist der Gegenstand der Physik, welche als das Muster einer experimentellen Wissenschaft gelten kann. So wichtig auch, hier wie überall, für den Forscher als Ausgangspunkt der Untersuchung eine leitende Idee sein mag, Experimente und Messungen zeigen allein den zuverlässigen Weg zur Gewissheit.

Wenn sich auch beim Studium der Physik das Laboratorium durch Nichts ersetzen lässt, so bildet doch das Lehrbuch das unentbehrliche Hülfsmittel, um uns über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand jedes Problems Aufschluss zu geben. Wir erhalten durch dasselbe Kenntniss von dem Ausgangspunkte, den Schwierigkeiten des Weges, dem bereits erschlossenen und den noch zu erforschenden Theilen des Gebietes. Neben den Versuchen, den Messungen und den sie zusammenfassenden empirischen Gesetzen behandelt es die Hypothesen, welche die Forscher geleitet haben und die Theorien, die sich am besten den bekannten Erscheinungen anpassen, und erläutert so Vorstellungen und Thatsachen im Einzelnen.

Sobald es sich um Gesetze handelt und in noch höherem Maasse bei Theorien, die eine gewisse Anzahl von Gesetzen umfassen, entsteht die Nothwendigkeit, die mathematische Entwicklung zu Hülfe zu ziehen. Sie wurde in allen Fällen angewandt, wo es für die Genauigkeit und Klarheit der Darstellung nützlich oder auch nur vortheilhaft erschien; dabei ist aber berücksichtigt worden, dass die Rechnung in der Physik nur als ein Werkzeug dient,

dessen Benutzung in vernünftiger Weise eingeschränkt werden muss. Bei Seite gelassen sind deshalb alle jene geistvollen Entwicklungen und gelehrten Untersuchungen, welche sämmtliche Hülfsmittel der höchsten Mathematik heranziehen, die Physik aber nur zum Ausgangspunkt haben.

Hat nicht der Physiker, der sich auf sein eigentliches Gebiet beschränkt, ein hinreichend grosses und fruchtbares Arbeitsfeld, auf dem gleichzeitig Beobachtungstalent, Erfindungsgabe und klare Überlegung in schönster Weise zur Geltung kommen können?

Vorwort zur deutschen Ausgabe.

Bei der Mannigfaltigkeit der Ansprüche, welche von den verschiedensten Seiten an ein Lehrbuch der Physik gestellt werden, dürfte neben den schon vorhandenen ein neues umfassendes Werk gewiss Vielen willkommen sein; dem vorliegenden hat die Einheitlichkeit der Anlage und die Klarheit der Darstellung in Frankreich weite Verbreitung verschafft.

Für das eindringende Verständniss und die Würdigung der Leistungen einer Wissenschaft ist die Kenntniss der historischen Entwicklung eines jeden Problems von grosser Bedeutung. Dadurch, das Violle namentlich bei grundlegenden Fragen diese Forderung eingehend berücksichtigt, wird nicht nur dem Anfänger das Studium, sondern auch dem Fortgeschrittenen der Überblick über die Wissenschaft wesentlich erleichtert.

Der Verfasser setzte sich das Ziel, ein Lehrbuch der praktischen Physik zu schreiben. Die klare und ausführliche Behandlung der Apparate, sowie die ungewöhnlich eingehende Berücksichtigung der Technik legen dafür beredtes Zeugniss ab. Andererseits wird aber überall auch die Theorie soweit in Betracht gezogen, dass in vielen Fällen von dem Studium rein theoretischer Werke Abstand genommen werden kann.

Von grösseren Änderungen im Texte glaubten die Herausgeber absehen zu sollen, dagegen waren sie bestrebt, in Anmerkungen den Fortschritten, welche die Wissenschaft in den wenigen Jahren seit dem Erscheinen des ersten Bandes des französischen Originalwerkes aufzuweisen hat, Rechnung zu tragen, und auch die Litteraturnachweise durch eingehendere Berücksichtigung der deutschen Publikationen noch zu vermehren.

Inhalt.

Einleitung.

Seite

1. Gegenstand der Physik 1
2. Methode 1
3. Ausgleichung der Beobachtungen 2
4. Systematische Fehler, zufällige Fehler 2
5. Bestimmung einer einzigen direct gemessenen Unbekannten . . 3
6. Gesetz der zufälligen Fehler 5
7. Maass der Genauigkeit 12
8. Wahrscheinlicher Fehler 13
9. Wahrscheinlichkeitstafel 14
10. Methode der kleinsten Quadrate 16
11. Handhabung der Methode 18
12. Mittlerer Fehler der durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten Resultate 19
13. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf ein Beispiel 21
14. Wesentliche Bemerkung 24
15. Satz von Cornu 24
16. Physikalische Gesetze; physikalische Theorien 26

Erster Abschnitt.

Allgemeine Gesetze und Eigenschaften der Materie.

Erstes Capitel.

Allgemeine Mechanik.

17. Wesentliche Eigenschaft der Materie 28

I. Kinematik.

18. Definition der Kinematik 29
19. Geschwindigkeit 29
20. Praktische Messung der Geschwindigkeit 33

Seite
21. Curve der Bewegung; Geschwindigkeitscurve 34
22. Beschleunigung 35
23. Normale Beschleunigung; tangentielle Beschleunigung 41
24. Ausdruck für die Beschleunigung mit Hülfe der Bahnelemente 43
25. Zusammensetzung von Bewegungen 45
26. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten 45
27. Zusammensetzung von Beschleunigungen 53
28. Bewegung eines starren Körpers 54
29. Lehrsatz von Coriolis 58
30. Zusammensetzung von Drehungen 61

II. Statik.

31. Kraft 65
32. Messung der Kräfte: Dynamometer 66
33. Zusammensetzung von Kräften, die an einem Punkte angreifen 69
34. Gleichgewicht von Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden 73
35. Lehrsatz von Varignon 73
36. Zusammensetzung paralleler Kräfte 74
37. Satz von den Momenten paralleler Kräfte 77
38. Mittelpunkt paralleler Kräfte 78
39. Kräftepaar 79
40. Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers 84

III. Dynamik.

41. Gegenstand und Principien der Dynamik 90

A. Dynamik eines materiellen Punktes.

42. Fundamentale Sätze 92
43. Masse 93
44. $F = m\gamma$ 94
45. Allgemeine Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes 96
46. Lehrsatz von den Momenten der Bewegungsgrössen 97
47. Satz von der Arbeit oder den lebendigen Kräften 98
48. Anwendung der vorhergehenden Sätze auf Körper 101
49. Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung . . . 102
50. Anwendungen 102
51. Kraft der Trägheit 107
52. Centrifugalkraft 108
53. Relatives Gleichgewicht und relative Bewegung 109
54. Aufgaben über relatives Gleichgewicht 110
55. Aufgaben über relative Bewegung 113

B. Dynamik von Systemen.

56. Innere Kräfte, äussere Kräfte 122
57. Lehrsatz von der Bewegung des Schwerpunktes 122
58. Lehrsatz von den Momenten der Bewegungsgrössen 124

Seite
59. Drehung eines starren Körpers um eine Achse 125
60. Trägheitsmomente 126
61. Lehrsatz von der Arbeit 129
62. Untersuchung der Bewegung eines Systems 130
63. Kräftefunction; Potential 133
64. Energie; kinetische Energie; potentielle Energie. Princip von der Erhaltung der Energie 135
65. Lehrsatz von Villarceau 137
66. Satz von Clausius über das Virial 138
67. Princip von d'Alembert 139
68. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten 141
69. Allgemeine Gleichgewichtsbedingung 142
70. Für stabiles Gleichgewicht ist das Potential ein Minimum . . 142

IV. Absolute Einheiten; C.-G.-S.-System.

71. Fundamentale Einheiten; abgeleitete Einheiten 144
72. Dimensionen 144
73. Fundamentaleinheiten im C.-G.-S.-System 145
74. Häufig angewandte mechanische Einheiten 148

Zweites Capitel.

Schwere.

I. Vom Fall der Körper.

75. Richtung der Schwere. Loth 149
76. Schwerpunkt 150
77. Fallgesetze 156
78. Die Schwere wirkt in gleicher Weise auf alle Körper 156
79. Die schiefe Ebene von Galilei 160
80. Atwood'sche Fallmaschine 169
81. Apparat von Morin 177
82. Andere Apparate 184
83. Folgerung: Die Schwere ist eine constante Kraft 186
84. Wurfbewegung im leeren Raum 186

II. Das Pendel.

85. Entdeckung durch Galilei: Isochronismus kleiner Schwingungen 196
86. Einfaches (mathematisches) Pendel 197
87. Zusammengesetztes Pendel 212
88. Anwendung des Pendels zur Messung von Kräften 216
89. Beweis des ersten Fallgesetzes 217
90. Bestimmung von g 218
91. Versuche von Borda 218
92. Versuche von Biot 226
93. Reversionspendel von Kater 227
94. Vergleichung der verschiedenen Messungsresultate von g . . 228
95. Anwendung des Pendels zur Regulirung der Uhren 233

Seite

III. Die Wage.

96. Theorie der Wage 234
97. Präcisionswage 239
98. Laboratoriumswagen 245
99. Gewöhnliche Wagen 246

IV. Allgemeine Gravitation.

100. Entdeckung der allgemeinen Gravitation 255
101. Herleitung des Newton'schen Gesetzes aus den Kepler'schen . 258
102. Identität der Schwere und der allgemeinen Massenanziehung 264
103. Änderung der Schwere auf der Erdoberfläche 268
104. Änderung von g im Innern der Erde 275
105. Messung der Dichte der Erde 276
106. Einfluss der Erdrotation auf den Fall der Körper 290

Drittes Capitel.

Allgemeine Eigenschaften.

I. Undurchdringlichkeit.

107. Undurchdringlichkeit 295

II. Ausdehnung; Mess-Instrumente.

108. Ausdehnung 295
109. Messung durch Abschätzen 296

1. Der Vernier.

110. Der Vernier. — Der geradlinige Vernier. — Das Kalibermaass. — Der Messkeil. — Der kreisförmige Vernier 296
111. Der Comparator 303
112. Das Kathetometer. — Beschreibung. — Gebrauch. — Justirung. — Regulirung. — Systematische Fehler 305

2. Die Mikrometerschraube.

113. Von der Schraube. — Die Mikrometer- oder Präcisionsschraube 314
114. Das Sphärometer 315
115. Die Theilmaschine. — Beschreibung. — Gebrauch. — Untersuchung der Schraube. — Automatische Maschinen. — Verwendung der Theilmaschine als Comparator. — Kreistheilmaschine 321
116. Das Fadenmikrometer 329

3. Der Reflexions-Hebel.

117. Methode von Poggendorff zur Messung kleiner Winkel mit Hülfe der Spiegelablesung 331
118. Der Reflexionshebel 332

Seite

III. Compressibilität. Theilbarkeit. Constitution der Materie.

119. Allgemeine, aber nicht wesentliche Eigenschaften 336
120. Compressibilität 336
121. Theilbarkeit 336
122. Constitution der Materie 339
123. Die verschiedenen Aggregatzustände der Körper 340

Zweiter Abschnitt.

Die Haupteigenschaften der festen Körper.

Erstes Capitel.

Structur.

124. Krystallinische Formen 342
125. Homogenität, Isotropie 243
126. Netzförmige Structur eines homogenen, krystallinischen festen Körpers 343
127. Symmetrie der Krystalle 346
128. Krystallsysteme 346
129. Gesetz der Symmetrie; Gesetz der Ableitung 348
130. Holoedrie; Hemiedrie und Tetartoedrie 349
131. Verschiedene Arten der Hemiedrie 351
132. Dimorphismus; Polymorphismus 352
133. Die Bedingungen, unter denen ein Körper krystallisirt . . . 353
134. Structur der nichtkrystallinischen festen Körper 354

Zweites Capitel.

Elasticität.

135. Definitionen 156

I. Theorie.

A. Allgemeine Gleichungen.

136. Elastische Kraft 358
137. Gleichgewicht des elementaren Parallelepipeds 358
138. Gleichgewicht des elementaren Tetraeders 361
139. Gleichgewicht eines begrenzten Stücks 362
140. Elasticitäts-Ellipsoid 364

B. Elastische Kräfte, die aus der Deformation hervorgehen.

141. Deformation eines isotropen Mediums 367
142. I. Deformation der Kanten 368

Seite

143. II. Deformation der Winkel 373
144. Bestimmung der N und T 376
145. Gesetze der Deformation 379

C. Anwendung der Formeln auf einige einfache Beispiele.

146. Ein in der Richtung seiner Länge gedehnter Stab 381
147. Ein fester Körper, der in einer Richtung comprimirt, in den beiden dazu senkrechten Richtungen aber vor Veränderungen geschützt wird 382
148. Ein fester Körper, der auf seiner ganzen Oberfläche gleichförmig comprimirt wird 383
149. Eine Hohlkugel, die auf ihren beiden Oberflächen verschieden stark gepresst wird 384
150. Ein cylindrischer Stab, der normal zu seiner Achse tordirt wird 389
151. Ein prismatischer Stab, der senkrecht zu seiner Länge gebogen wird 391

II. Experimente.

A. Zug.

152. Verlängerung eines Stabes, auf den eine Zugkraft wirkt. — Gesetze. — Versuche von s'Gravesande. — Versuche von Savart und von Masson. — Beobachtungen von Wertheim. — Tabelle der Elasticitäts-Coefficienten. — Elasticitätsgrenze . . 394
153. Transversale Contraction eines gezogenen Stabes. — Theorien von Navier und Poisson. — Versuch von Cagniard-Latour. — Theoretische Untersuchungen von Cauchy, Lamé und Kirchhoff. — Versuche von Kirchhoff, Okatow und Schneebeli. — Untersuchungen von de Saint-Venant; Experimente von Cornu 405
154. Deformation eines auf seiner ganzen Oberfläche gleichmässig gepressten Körpers. — Theoretische Compressibilität. — Experimente von Regnault 411
155. Manometer von Cailletet, welches auf der Compressibilität des Glases beruht 415

B. Torsion.

156. Arbeiten von Coulomb 416
157. Versuche von Savart und von Wertheim 421
158. Nachwirkung der Torsion; Versuche von F. Kohlrausch . . . 424
159. Permanente Torsion; Untersuchungen von G. Wiedemann . . 426
160. Gesetz der Torsionsschwingungen 427

C. Biegung.

161. Experimentelle Untersuchung der Biegung 429
162. Versuche von Cornu 431
163. Nachwirkung; dauernde Wirkungen 432
164. Anwendungen 433

D. Innere Reibung.

165. Auftreten der inneren Reibung bei den Elasticitäts-Erscheinungen 434

Seite

Drittes Capitel.

Gestaltsänderung. Festigkeit.

I. Gestaltsänderung.

166. Verschiedene Arten der Gestaltsänderung 436
167. Geschmeidigkeit. Dehnbarkeit 436
168. Die Plasticität fester Körper 438
169. Mechanisches Härten 441
170. Härten durch rasches Abkühlen. — Härten von Stahl und anderen Metallen. — Rasch gekühltes Glas. — Amorpher Schwefel 442
171. Härte 448

II. Festigkeit.

172. Verschiedene Formen der Festigkeit 449
173. Zugfestigkeit. — Tabellen der Bruchmoduln. — Druckfestigkeit. — Scheerfestigkeit 450
174. Biegungsfestigkeit 453
175. Drehungsfestigkeit 455

Viertes Capitel.

Theilbarkeit.

176. Porosität 456
177. Theilbarkeit 457
178. Diffusion der festen Körper 458

Fünftes Capitel.

Adhäsion. Reibung.

I. Adhäsion.

179. Adhäsion 460

II. Reibung.

A. Reibung beim Gleiten.

180. Versuche von Coulomb 462
181. Untersuchungen von Morin 466
182. Reibungscoefficienten nach Morin 469
183. Einfluss der Reibung bei einigen einfachen Maschinen. — Schiefe Ebene. — Rolle. — Wellrad 471

B. Reibung beim Rollen.

184. Untersuchungen von Coulomb. — Reibungscoefficienten beim Rollen 475
185. Der Vortheil, welchen das Rollen gegenüber dem Gleiten darbietet. — Rolle bei der Atwood'schen Fallmaschine. — Walzen. — Hemmschuh 478

Seite

C Messung der Kraft durch Bremsen.

186. Der Bremszaum von Prony 480
187. Verschiedene Formen der Brems-Dynamometer 483
188. Einfluss der Lage des Schwerpunktes der Bremse 486
189. Vorsichtsmaassregeln, welche man bei einem Versuche mit der Bremse zu beobachten hat. — Dynamometer von v. Hefner-Alteneck 487

Sechstes Capitel.

Stoss der Körper.

190. Vom Stosse 489
191. Directer Stoss. — Weiche Körper. — Theorem von Carnot. — Elastische Körper. — Apparat mit mehreren Elfenbeinkugeln. — Die Übertragung der Bewegung nimmt eine gewisse Zeit in Anspruch. — Das ballistische Pendel 489
192. Schräger Stoss 496

Einleitung.

---

1. Gegenstand der Physik. — Die Physik (*φύσις*, Natur) umfasste in früheren Zeiten das Studium der gesammten Natur. Jetzt beschränkt sie sich darauf, die wesentlichen Eigenschaften der Materie zu untersuchen und die Erscheinungen zu ergründen, welche als Wirkungen allgemeiner Ursachen aufzufassen sind, ohne eine Änderung der inneren Constitution der Körper im Gefolge zu haben. Sie hat das Studium des organischen Lebens aufgegeben, und in der unorganischen Natur berücksichtigt sie ebenso wenig die Himmelserscheinungen wie die Classificirung der in der Natur sich vorfindenden Körper oder die Erforschung derjenigen ihrer Eigenschaften, welche bleibende Änderungen verursachen. Wenn die Physik nothgedrungen ihr Gebiet enger begrenzen musste, so hat sie dafür an Tiefe gewonnen. Mit gleichem Erfolg fand sie grosse Gesetze und entdeckte ihre wichtigsten Anwendungen. So ist sie durch ihre Fortschritte und ihren Gegenstand an der Spitze der Naturwissenschaften geblieben.

2. Methode. — Eine Wissenschaft wird nicht allein durch ihren Gegenstand, sondern auch durch ihre Methode characterisirt. Wie in jeder anderen Wissenschaft ist auch in der Physik der Ausgangspunkt der Forschung eine Idee *a priori*, jedoch mit dem Unterschied, dass hier diese erste geistige Conception nicht unumstösslich, nicht absolut ist; sie hat wesentlich relativen und provisorischen Werth, und jede ihrer Folgerungen muss einzeln durch das Experiment geprüft werden, welches allein fähig ist, *a posteriori* die fehlende Gewissheit zu geben: Deshalb hat man auch die experimentirende Methode die Methode *a posteriori* genannt. Der Gang der Forschung in der Physik, wie ihn die Geschichte jeder Theorie zeigt, ist also der folgende: Man geht von einem Postulat, von einer ersten Idee aus, welche man bei aufmerksamer Beobachtung einer Erscheinung gefasst hat, man überlegt, experimentirt, *misst* vor Allem und prüft nach jedem Experiment die Richtigkeit der

Idee, welche man beim Beginn der Untersuchung vorläufig zugelassen hatte.

3. Ausgleichung der Beobachtungen. — Wenn man eine Erscheinung mehrmals beobachtet, eine Reihe von Experimenten ausgeführt, mit einem Wort, wenn man eine gewisse Anzahl von Messungen gemacht hat, so erfordert die Bearbeitung dieses Materials zuerst eine Ausgleichsrechnung, welche den Zweck hat, aus den gefundenen, nothwendig fehlerhaften Resultaten die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten abzuleiten.

Die begangenen Fehler zerfallen in zwei Klassen: Systematische Fehler und zufällige Fehler.

4. Systematische Fehler, zufällige Fehler. — Die systematischen Fehler, welche durch constante Mängel des Messinstruments hervorgerufen werden, treten bei der gleichen Versuchsanordnung immer in derselben Weise auf und ändern sich mit der Versuchsanordnung nach gegebenen Gesetzen; deshalb ist es für die Zuverlässigkeit des Resultats rathsam, die Anordnung möglichst zu variiren.

Die zufälligen Fehler, welche aus vollständig nebensächlichen Ursachen entspringen, gehorchen einzeln durchaus keinem Gesetz; sie sind bald positiv, bald negativ und folgen auf einander mit vollkommener Unabhängigkeit. Der Typus eines zufälligen Fehlers ist die Abweichung einer Kugel, welche von einem geübten Schützen mit einer tadellosen Waffe auf das Centrum einer Scheibe abgegeben wird. Diese Abweichung, welche allein in der Mangelhaftigkeit unserer Sinne ihren Grund hat, ist in *jedem einzelnen Fall* vollkommen unbestimmt, wenn sie auch eine bestimmte angebbare Grenze nicht überschreiten wird und wenn auch auf eine grosse Anzahl von Schüssen die geringsten Abweichungen bei weitem am zahlreichsten sein werden. Die Abweichungen treten ebenso häufig nach rechts ein wie nach links, nach oben so oft wie nach unten. Dieser vollständige Mangel der Bevorzugung einer Richtung characterisirt so augenscheinlich diese Art von Fehlern, dass man, wenn die Schüsse zum Beispiel vorzugsweise nach rechts abwichen, sofort auf eine Unvollkommenheit der Waffe schliessen würde, welche diesen systematischen Fehler hervorbringt.

Der Beobachter muss vor Allem dahin streben, systematische Fehler zu vermeiden, entweder dadurch, dass er die sie verursachenden Mängel, wenn irgend möglich, beseitigt, oder indem er die Grösse der Fehler bestimmt; das Letztere wird meistens leicht ausführbar, jedenfalls aber immer möglich sein, denn es handelt

sich hier um die Wirkungen constanter Ursachen, auf welche man die gewöhnlichen Methoden der Physik anwenden kann; in jedem einzelnen Fall wird dies die Aufgabe einer besonderen Untersuchung sein.

Wenn man so, wie es unumgänglich nöthig ist, die systematischen Fehler möglichst beseitigt hat, so bleibt es noch übrig, den Einfluss der zufälligen oder unvermeidlichen Fehler auf das Resultat so viel wie möglich herabzudrücken.

5. Bestimmung einer einzigen direct gemessenen Unbekannten. —

Arithmetisches Mittel. — Wir behandeln zuerst den einfachsten Fall, dass man die gesuchte Grösse direct beobachtet hat.

Es war z. B. eine Länge zu messen; die Messung wurde m mal ausgeführt und ergab die m angenäherten Werthe

$$a,\ a',\ a'',\ \ldots$$

oder auch

$$x+\varepsilon,\ x+\varepsilon',\ x+\varepsilon'',\ \ldots$$

wo x der wahre Werth der Unbekannten ist, und ε, ε', ε'' .... die zufälligen Fehler der verschiedenen Messungen bedeuten. Nun sind die kleinen Fehler bei weitem am häufigsten, und ferner ist kein Vorzeichen bevorzugt. Wenn man also das *Mittel*

$$A=\frac{a+a'+a''+\ldots}{m}$$

der Messungen nimmt, so werden sich die kleinen Fehler gegenseitig aufheben, und wenn zufällig ein grober Fehler nicht compensirt wird, so wird er wenigstens durch m dividirt. Das Mittel wird also nothwendig dem Werth x sehr nahe kommen, und man kann hinzufügen, dass es der wahrscheinlichste Werth von x ist.

Mittlerer Fehler der Messungen. — Die Differenzen

$$a-A,\ a'-A,\ a''-A,\ \ldots$$

werden folglich sehr nahe den Grössen

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon'',\ \ldots$$

gleich sein. Seien

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon'_1,\ \varepsilon''_1\ \ldots$$

diese sofort angebbaren Differenzen. Ihre Summe ist identisch Null, und folglich kann ihr Mittel nicht dazu dienen, den mittleren Fehler

zu beurtheilen. Man definirt darum den mittleren Fehler nicht als das Mittel der Fehler, sondern als die Quadratwurzel aus dem Mittel der Fehlerquadrate. Man bildet die Fehlerquadrate

$$\varepsilon_1^{\,2},\ \varepsilon'^{\,2}_1,\ \varepsilon''^{\,2}_1\ \ldots,$$

addirt sie und dividirt die Summe durch m. Wir erhalten so das Mittel der Fehlerquadrate

$$\frac{\varepsilon_1^{\,2}+\varepsilon'^{\,2}_1+\varepsilon''^{\,2}_1+\ldots}{m},$$

und die Quadratwurzel hieraus ist die Grösse, welche der *mittlere* oder der *zu befürchtende Fehler* der Beobachtungen genannt wird:[1])

$$E=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1^{\,2}+\varepsilon'^{\,2}_1+\varepsilon''^{\,2}_1+\ldots}{m}}.$$

Wie man sieht, ist die Summe

$$\varepsilon_1^{\,2}+\varepsilon'^{\,2}_1+\varepsilon''^{\,2}_1+\ldots$$

ein Minimum in Folge der Identität

$$\varepsilon_1+\varepsilon'_1+\varepsilon''_1+\ldots=0,$$

da $\varepsilon_1+\varepsilon'_1+\varepsilon''_1+\ldots$ bis auf einen constanten Factor die Derivirte der Summe darstellt. Der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten macht also die Summe der Quadrate jener Differenzen zu einem Minimum, welche aus ihm und den direct beobachteten Grössen gebildet sind. Weiter unten werden wir sehen, dass diese Regel allgemein gültig ist.

Mittlerer Fehler des Resultats. — Wie gross ist der für das Mittel A selbst zu befürchtende Fehler?

$$A=\frac{a}{m}+\frac{a'}{m}+\frac{a''}{m}+\ldots$$

---

[1]) Diese Definition des mittleren Fehlers, welche in der ersten Abhandlung von Gauss über diesen Gegenstand benutzt wird (vgl. Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von C. F. Gauss, deutsche Übersetzung von Dr. Börsch und Dr. Simon, Berlin 1887. Stankiewicz S. 14), ist, wie Gauss selbst später gezeigt hat (a. a. O. S. 48), nicht streng richtig und muss namentlich für eine geringe Anzahl von Beobachtungen durch die Definition

$$E=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1^{\,2}+\varepsilon'^{\,2}_1+\ldots}{m-1}}$$

ersetzt werden (vgl. auch die allgemeine Formel in **12**, S. 19 für $i=1$). — L.

Der mittlere Fehler der verschiedenen Glieder dieser Summe ist $\frac{E}{m}$. Der mittlere Fehler der Summe, nämlich die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate dieser einzelnen Fehler (**12**) wird also betragen

$$E' = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 + \left(\frac{E}{m}\right)^2 + \left(\frac{E}{m}\right)^2 + \ldots} = \pm\sqrt{m\left(\frac{E}{m}\right)^2}$$

oder

$$E' = \pm\frac{E}{\sqrt{m}}.$$

Dieser Fehler ist also $\sqrt{m}$ umgekehrt proportional; mit anderen Worten: *die Genauigkeit der Messungen wächst* nicht wie die Zahl, sondern nur *wie die Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen.*

Gewicht. Gauss nennt *Gewicht* „eine Grösse, welche dem Quadrate des mittleren Fehlers umgekehrt proportional ist."

Betrachten wir den Fall, in welchem jede Messung das Mittel aus einer gewissen Anzahl directer, gleichwerthiger Beobachtungen ist: m Beobachtungen haben einen Werth A, n Beobachtungen einen Werth B ergeben. Der wahrscheinlichste Werth ist das Mittel aller dieser Beobachtungen $\frac{mA + nB}{m + n}$. Nun sind hier m und n offenbar die Gewichte der Werthe A und B, da die Gewichte verschiedener Resultate nothwendigerweise der Zahl gleichwerthiger Beobachtungen proportional sein müssen, aus welchen jene Resultate abgeleitet wurden. Ihre mittleren Fehler dagegen sind der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen umgekehrt proportional. Wir werden so auf die Definition von Gauss geführt.

Das Gewicht P des Mittels ist die Summe der Gewichte p, p', p'', ... der Einzelwerthe

$$P = p + p' + p'' + \ldots,$$

ein Lehrsatz, welcher dem Princip der Statik analog ist, dass die Resultante der Wirkungen der Schwere auf verschiedene Körper gleich ist der Summe dieser Wirkungen.

6. Gesetz der zufälligen Fehler.[1]) — Bevor wir zu dem schwierigeren, aber allgemeineren Fall übergehen, in welchem die

---

[1]) Siehe Faye, Cours d'astronomie nautique; Paris, Gauthier-Villars, 1880, p. 165.

Vgl. Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung; Berlin, Ernst und Korn, 1882. — Helmert, Die Ausgleichsrechnung etc. Leipzig, Teubner, 1872. — L.

Messungen nicht mehr direct die zu messende Grösse liefern, sondern eine Function der Grösse oder derjenigen Grössen, welche zu bestimmen sind, ist es nothwendig, eine wichtige Eigenschaft der zufälligen Fehler zu behandeln.

Es ist zwar richtig, dass jeder dieser Fehler, für sich allein betrachtet, vollständig zufällig ist; andrerseits ist es unanfechtbar, dass bei jeder einigermassen ausgedehnten Beobachtungsreihe ein klares Gesetz zum Ausdruck kommt, welches die Grösse der Fehler, von ihrer Reihenfolge abgesehen, regelt.

Nehmen wir z. B. wieder den Fall, dass ein geübter Schütze auf eine Scheibe schiesst. Nach einer einigermassen beträchtlichen Zahl von Schüssen wollen wir den Ort der Treffer in Bezug auf eine durch den Zielpunkt gehende Lothrechte aufnehmen.

Wir werden dann eine ähnliche Reihe von Abweichungen finden wie die folgende; sie ist bei einer Scheibe, auf welche aus einer Entfernung von 50 m mit einer Reiterpistole geschossen wurde, ermittelt worden.[1])

+ 5 cm	+ 5 cm	+ 5 cm	−31 cm	+ 8 cm	+14 cm	+45 cm	+ 8 cm	0 cm	−23 cm
− 5	+10	+29	+25	+22	+27	+10	+56	− 3	−26
−29	+13	+40	0	−15	−13	− 9	+ 8	−31	+ 9
− 7	−22	− 7	+ 7	−10	+28	+ 7	− 2	−12	+19
− 4	−23	+13	−27	+ 2	+28	−10	−37	+ 7	+36
+11	+ 1	0	−17	−23	+ 5	0	− 2	−23	− 2
+ 6	+18	− 4	+10	+ 4	+28	− 2	+ 2	−37	+10
− 6	+ 3	− 3	− 2	−14	0	+ 7	−19	−18	−11
+24	− 3	−27	−11	−12	+21	−41	+ 9	− 1	+17
−17	+25	−20	−12	+16	− 1	−14	− 2	0	− 8

Auf 100 Abweichungen gehen 46 nach der positiven, 48 nach der negativen Seite und 6 sind Null. Das arithmetische Mittel

$$A = + 0{,}77 \text{ cm},$$

liegt, wie man sieht, dem wirklichen Zielpunkt sehr nahe; der mittlere Fehler der einzelnen Schüsse ist

$$E = \pm 18{,}5 \text{ cm}.$$

Wenn wir diese Abweichungen, abgesehen von dem Vorzeichen, nach ihrer Grösse ordnen, finden wir:

---

[1]) Didion, Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles; Paris, Dumaine, 1858, p. 87.

zwischen 0 cm und 5 cm .... 24 positive oder negative Abweichungen
„ 5 „ „ 10 „ .... 20 „ „ „ „
„ 10 „ „ 15 „ .... 18 „ „ „ „
„ 15 „ „ 21 „ .... 11 „ „ „ „
„ 21 „ „ 26 „ .... 10 „ „ „ „
„ 26 „ „ 31 „ .... 8 „ „ „ „
„ 31 „ „ 38 „ .... 5 „ „ „ „
„ 38 „ „ 45 „ .... 3 „ „ „ „
„ 45 „ „ 56 „ .... 1 „ „ „ „

Zur graphischen Darstellung dieser Resultate tragen wir als Abscissen auf der x-Achse Strecken auf, welche den Abweichungen 5, 10, 15 . . . gleich sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Abweichung gerade x ist oder vielmehr die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung zwischen x und $x + dx$ liegt, ist noth-

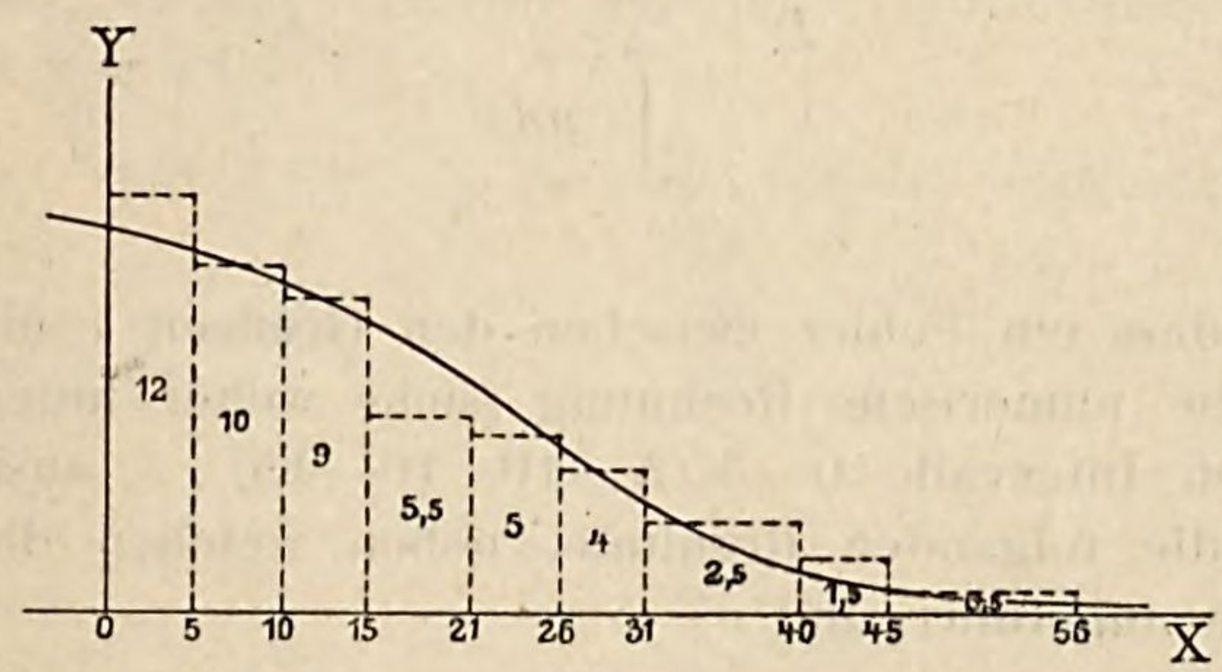


Fig. 1.

wendiger Weise unendlich klein. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung zwischen bestimmte Grenzen fällt, ist nur dann endlich, wenn sich die Grenzen selbst um endliche Beträge unterscheiden. Wir werden also zu Ordinaten nicht die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Abweichung wählen, sondern verfahren folgendermaassen: Auf jedem begrenzten Stück der x-Achse 0—5, 5—10, 10—15, . . . als Basis construiren wir ein Rechteck, dessen Inhalt der Zahl positiver Abweichungen gleich sein soll, welche zwischen 0 und 5, 5 und 10, 10 und 15 etc. beobachtet sind. Das Verhältniss des Inhalts eines jeden dieser Rechtecke zur Summe der Inhalte aller Rechtecke stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass eine Abweichung zwischen den Werthen liegt, welche den beiden Enden der Basis des Rechtecks entsprechen. Zieht man dann eine stetige Curve in der Weise, dass der Inhalt der ausserhalb der Curve liegenden kleinen Flächenstücke gleich dem der innerhalb liegenden ist, so erhält man *die Fehlercurve* der Beobachtungen,

das heisst, eine Curve mit folgender Bedeutung: Die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Fehler zwischen den Grenzen x und $x + \Delta x$ liegt, wird dargestellt durch das Verhältniss des von den entsprechenden Ordinaten abgegrenzten Flächenstücks zur ganzen von der Curve eingeschlossenen Fläche.

Wir haben hier nur den rechten Zweig der Curve gezeichnet; es ist aber auch noch ein linker, symmetrischer Zweig vorhanden, und die ganze Curve wird sehr genau durch die Gleichung

$$y = 11{,}31\, e^{-(0{,}0369)^2 x^2}$$

dargestellt.

Wenn wir nämlich mit Hülfe dieser Gleichung die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\int_x^{x+\Delta x} y\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, dx}$$

bestimmen, dass ein Fehler zwischen den Grenzen x und $x + \Delta x$ liegt und die numerische Rechnung (siehe weiter unten) für die verschiedenen Intervalle 0—5, 5—10, 10—15, . . . ausführen, so finden wir die folgenden Resultate, neben welchen die wirklich beobachteten angeführt sind.

Zahl der Schüsse zwischen	berechnet	beobachtet
0 und 5 cm	21,5	24
5 „ 10 „	20,1	20
10 „ 15 „	17,0	18
15 „ 21 „	16,2	11
21 „ 26 „	9,7	10
26 „ 31 „	6,5	8
31 „ 40 „	6,1	5
40 „ 45 „	1,5	3
45 „ 56 „	1,2	1
über 56 „	0,2	0

Obwohl also die Zahl der abgegebenen Schüsse gar nicht sehr beträchtlich war, so ist doch die Übereinstimmung zwischen Formel und Beobachtung schon so gut, dass kein Zweifel an der Richtigkeit des Gesetzes mehr aufkommen kann.

Wir wollen jetzt einen anderen Fall betrachten, welcher uns viel mehr interessirt, nämlich eine von einem geschickten Beobachter ausgeführte Reihe von Messungen. Um mit Daten zu rechnen, die über jede Kritik erhaben sind, wollen wir eine Reihe von 470 Beobachtungen von Bradley wählen, den Laplace „das Muster eines Beobachters“ nennt; sie hatten den Zweck, die Differenz der Rectascension zwischen der Sonne und den Sternen Ataïr und Procyon zu bestimmen. Bessel, welcher diese Beobachtungen mit grosser Sorgfalt berechnete, bestimmte durch Subtraction des Mittels aller Beobachtungen von jeder einzelnen die Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon''_1 \ldots$, woraus sich der mittlere Fehler E zu $\pm 0{,}391^{\text{sec}}$ ergab. Der für das Mittel zu befürchtende Fehler ist $\pm 0{,}017^{\text{sec}}$; das Mittel kommt folglich der Wirklichkeit sehr nahe und man kann die Fehler ε_1, ε'_1, $\varepsilon''_1 \ldots$ als die bei jeder Messung wirklich begangenen Fehler ε, ε', $\varepsilon'' \ldots$ ansehen. Wenn man diese Fehler der Grössenordnung nach in einer Tabelle zusammenstellt, vertheilen sich die 470 Fehler wie folgt:

Zwischen	0,0	und	0,1^{sec}	. . . . .	94	positive	oder	negative	Fehler
„	0,1	„	0,2	. . . . .	88	„	„	„	„
„	0,2	„	0,3	. . . . .	78	„	„	„	„
„	0,3	„	0,4	. . . . .	58	„	„	„	„
„	0,4	„	0,5	. . . . .	51	„	„	„	„
„	0,5	„	0,6	. . . . .	36	„	„	„	„
„	0,6	„	0,7	. . . . .	26	„	„	„	„
„	0,7	„	0,8	. . . . .	14	„	„	„	„
„	0,8	„	0,9	. . . . .	10	„	„	„	„
„	0,9	„	1,0	. . . . .	7	„	„	„	„
	über		1,0	. . . . .	8	„	„	„	„

Zeichnet man nach diesen Angaben die Fehlercurve, so wird sie, wie man sieht, sehr gut durch eine der vorigen ganz ähnliche Gleichung dargestellt:

$$y = 47{,}365\, e^{-(1{,}764)^2 x^2}.$$

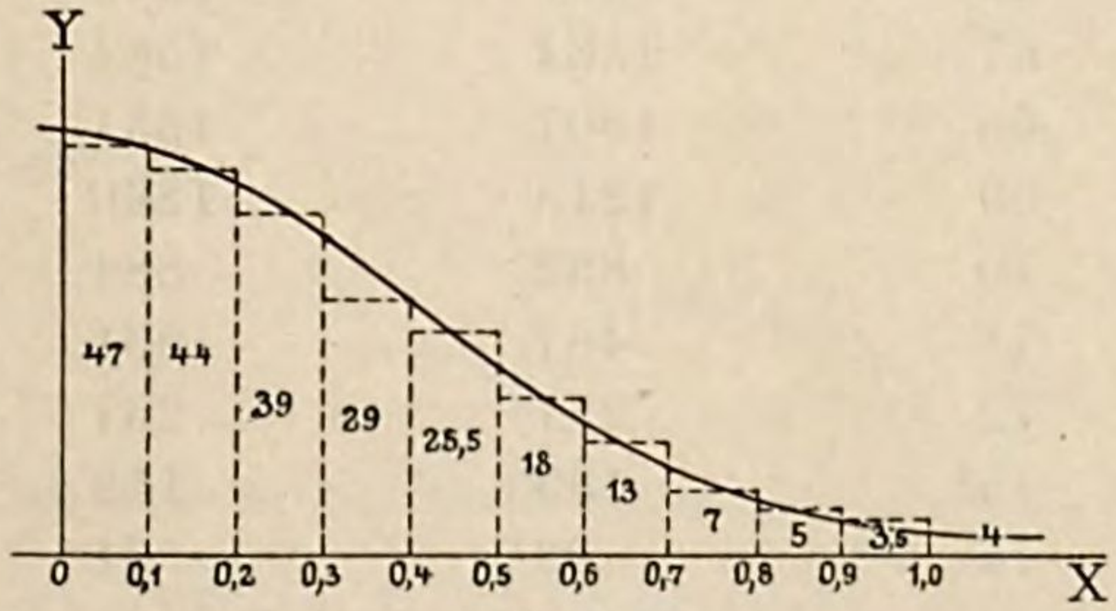


Fig. 2.

Berechnet man wieder nach dieser Formel die Zahl der Fehler, welche in jedes Intervall fallen, so findet man:

Zahl der Fehler zwischen			berechnet	beobachtet
0,0	und	0,1 sec	95	94
0,1	„	0,2	89	88
0,2	„	0,3	78	78
0,3	„	0,4	64	58
0,4	„	0,5	50	51
0,5	„	0,6	36	36
0,6	„	0,7	24	26
0,7	„	0,8	15	14
0,8	„	0,9	9	10
0,9	„	1,0	5	7
1,0	„	∞	5	8

Das Gesetz ist also dasselbe, und man wird dieses Resultat bei jeder Beobachtungsreihe wiederfinden, bei welcher allein zufällige Ursachen im Spiele sind.

Die Statistik liefert dafür zahlreiche Beispiele. So folgen die Abweichungen von der mittleren menschlichen Grösse dem Gesetz der zufälligen Fehler, wie die in Amerika seit dem Secessionskriege gemachten Beobachtungen beweisen. In der folgenden von Gould herrührenden Tabelle ist auf 10000 Einwohner die Zahl derjenigen aufgeführt, welche die in der ersten Spalte angegebene Grösse erreichen.

Grösse in Zoll	berechnet	beobachtet
61	105	100
62	169	171
63	369	368
64	686	675
65	1044	1051
66	1391	1399
67	1584	1584
68	1607	1531
69	1218	1260
70	852	884
71	467	531
72	277	267
73	139	118
74	92	61
. .	. . .	. . .

Die normale Grösse scheint also in den Vereinigten Staaten 67,24 Zoll zu sein; in dem einzelnen Fall jedoch weicht die menschliche Grösse aus rein zufälligen Ursachen mehr oder weniger von dieser Zahl ab.

In jeder Reihe von Messungen, in der kein systematischer Fehler auftritt, ist das Gesetz der zufälligen Fehler dasselbe und wird durch

$$y = a e^{-h^2 x^2}$$

dargestellt, wo a und h Parameter sind, welche in jedem besonderen Fall bestimmt werden müssen.

Mit Hülfe der angeführten Beispiele haben wir das Fehlergesetz empirisch in einer unanfechtbaren Weise aufgestellt, und die Theorie bestätigt unsere Schlüsse. Man erkennt in der That leicht, dass die Vertheilung der Beobachtungsfehler mit dem binomischen Lehrsatz von Newton eng zusammenhängt, indem ihre relativen Möglichkeiten durch die Binomial-Coefficienten dargestellt werden. Das Fehlergesetz folgt unmittelbar aus dieser Bemerkung[1]) und wurde zuerst von Laplace abgeleitet[2]).

Theorie und Beobachtung liefern also übereinstimmend als Gleichung für die Fehlercurve

$$y = a e^{-h^2 x^2},$$

mit andern Worten, die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Fehler zwischen 0 und l liegt, ist

$$P = \frac{\int_0^l a e^{-h^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2} dx}.$$

Nun ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2} dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{h}.$$

Man hat folglich

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-h^2 x^2} dx.$$

---

[1]) Liagre, Calcul des probabilités et théorie des erreurs; Bruxelles, 1852, p. 60.

[2]) Laplace: Théorie analytique des probabilités; Paris, 1812.

7. Maass der Genauigkeit. — Der Coefficient h hat eine bemerkenswerthe Bedeutung.

Betrachten wir eine zweite Reihe von Beobachtungen; die Wahrscheinlichkeit P', dass ein Fehler zwischen 0 und l' fällt, wird durch

$$P' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l'} e^{-h'^2 x'^2} dx'$$

ausgedrückt. Wir haben also

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l} e^{-h^2 x^2} h\, dx,$$

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l'} e^{-h'^2 x'^2} h'\, dx'$$

oder, indem wir $hx = z$, $h'x' = z'$ setzen und z beziehentlich z' als Variabele nehmen

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hl} e^{-z^2} dz.$$

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h'l'} e^{-z'^2} dz'.$$

Diese beiden Wahrscheinlichkeiten werden gleich sein, wenn

$$l\,h = l'\,h';$$

es werden dann ebenso viele Fehler x' zwischen 0 und l' liegen, als Fehler x zwischen 0 und l. Ein Fehler l' wird in der zweiten Reihe genau denselben Grad von Wahrscheinlichkeit haben, als ein Fehler l in der ersten. Wenn man aber in den verschiedenen Reihen Fehler auswählt, welchen dieselbe Wahrscheinlichkeit zukommt, so kann die Ungenauigkeit jeder Reihe offenbar durch die Grösse des der bestimmten Wahrscheinlichkeit entsprechenden Fehlers gemessen werden. Die Ungenauigkeiten der beiden gegebenen Reihen werden sich hier also verhalten wie l zu l'. Nun ist

$$\frac{l}{l'} = \frac{h'}{h}.$$

Man kann somit umgekehrt die Genauigkeit einer Reihe nach dem Werth des Parameters h, welcher dieser Reihe zukommt, be-

messen und nennt deshalb diesen Parameter gewöhnlich *Coefficient* oder *Modul der Präcision.*

8. Wahrscheinlicher Fehler. — Es ist wichtig, in der Formel

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2 x^2} d x,$$

welche die Wahrscheinlichkeit angiebt, dass ein Fehler in einer Reihe mit der Präcision h, zwischen $-x$ und $+x$ liegt, das Integral $\int_{-x}^{+x} e^{-h^2 x^2} d x$ auswerthen zu können. Entwickelt man den Exponentialausdruck in eine Reihe und integrirt, so ergiebt sich

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[h x - \frac{\frac{1}{3}(h x)^3}{1} + \frac{\frac{1}{5}(h x)^5}{1.2} - \frac{\frac{1}{7}(h x)^7}{1.2.3} + \cdots \right]$$

und die Berechnung von P ist nun einfach.

Umgekehrt kann man, wenn P gegeben ist, x ausrechnen. Setzen wir z. B. $P = \frac{1}{2}$; durch wiederholte Näherungsrechnung findet man ohne Mühe

$$h \eta = 0{,}476\,936,$$

wo η einen solchen Werth von x bedeutet, dass man mit gleicher Wahrscheinlichkeit behaupten kann, der Fehler sei dem absoluten Werthe nach grösser als η, wie er sei kleiner: Man nennt η den *wahrscheinlichen Fehler.*

Derselbe ist mit dem mittleren Fehler E durch eine sehr einfache Beziehung verbunden; um dieselbe zu finden, berechnen wir E als Function von h. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler x sei, oder vielmehr, dass er zwischen x und $x + d x$ liege, ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} d x.$$

Nach der Definition dieser Wahrscheinlichkeit haben wir aber

$$\frac{\text{Zahl der Fehler zwischen } x \text{ und } x + d x}{\text{Gesammtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} d x.$$

Wir multipliciren beide Seiten mit x^2:

$$\frac{\text{Summe der Quadrate der Fehler zwischen } x \text{ und } x+dx}{\text{Gesammtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2 x^2} dx$$

und integriren von $-\infty$ bis $+\infty$:

$$\frac{\text{Summe der Quadrate aller Fehler}}{\text{Gesammtzahl der Fehler}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx;$$

es ergiebt sich

$$E^2 = \frac{1}{2h^2}$$

und folglich

$$E = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{,}70\,711}{h}.$$

Dies ist somit der Werth des mittleren Fehlers als Function von h.

Vergleicht man diesen Werth mit dem eben für η gefundenen

$$\eta = \frac{0{,}476\,936}{h},$$

so sieht man, dass

$$\eta = 0{,}674\,490\,E$$

ist, das heisst, der *wahrscheinliche Fehler ist ungefähr* $\frac{2}{3}$ *vom mittleren Fehler.*

9. Wahrscheinlichkeitstafel. — Wir wollen den wahrscheinlichen Fehler zur Einheit nehmen; mit anderen Worten, wir wählen das Verhältniss $\frac{x}{\eta}$ eines beliebigen Fehlers x zum wahrscheinlichen Fehler η zur Unbekannten; indem wir beachten, dass

$$h\,x = h\,\eta\,\frac{x}{\eta} = 0{,}476\,936\,\frac{x}{\eta}$$

ist, können wir die Wahrscheinlichkeit P eines beliebigen relativen Fehlers $\frac{x}{\eta}$ berechnen mit Hülfe der Formel:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[0{,}476936\,\frac{x}{\eta} - \frac{1}{3}\overline{0{,}476936}^{3}\left(\frac{x}{\eta}\right)^3 + \frac{1}{10}\overline{0{,}476936}^{5}\left(\frac{x}{\eta}\right)^5 - \cdots\right].$$

Es lässt sich dann die folgende Tafel aufstellen:

$\frac{x}{\eta}$	P	Unterschied.	$\frac{x}{\eta}$	P	Unterschied.
0,0	0,000	54	2,5	0,908	13
1	0,054	53	6	0,921	10
2	0,107	53	7	0,931	10
3	0,160	53	8	0,941	9
4	0,213	51	9	0,950	7
5	0,264	50	3,0	0,957	6
6	0,314	49	1	0,963	6
7	0,363	48	2	0,969	5
8	0,411	45	3	0,974	4
9	0,456	44	4	0,978	4
1,0	0,500	42	5	0,982	3
1	0,542	40	6	0,985	2
2	0,582	37	7	0,987	3
3	0,619	36	8	0,990	1
4	0,655	33	9	0,991	2
5	0,688	31	4,0	0,993	1
6	0,719	29	1	0,994	1
7	0,748	27	2	0,995	1
8	0,775	25	3	0,996	1
9	0,800	23	4	0,997	1
2,0	0,823	20	5	0,998	0
1	0,843	19	6	0,998	0
2	0,862	17	7	0,998	1
3	0,879	16	8	0,999	0
4	0,895	13	9	0,999	0
5	0,908		5,0	0,999255	

Diese Tabelle, deren Gebrauch ein sehr einfacher ist, gilt für alle Fälle, unabhängig vom Werthe der Grösse h.

Es sei z. B. für die oben angegebenen Beobachtungen von Bradley die Zahl der Fehler zu berechnen, welche nach der Theorie zwischen $0{,}2^{\text{sec}}$ und $0{,}3^{\text{sec}}$ fallen müssen. Es war der mittlere Fehler $E = 0{,}391^{\text{sec}}$; folglich ist der wahrscheinliche Fehler

$$\eta = 0{,}2637^{\text{sec}}.$$

Dividirt man durch diese Grösse die gegebenen Fehler, $0{,}2^{\text{sec}}$ und $0{,}3^{\text{sec}}$, so bekommt man die den Fehlern entsprechenden Werthe des Arguments $\frac{x}{\eta}$.

Diese Werthe sind

$$0{,}7584 \text{ und } 1{,}1376.$$

Sucht man in der Tafel die entsprechenden Werthe von P, indem man proportional interpolirt, so findet man

$$0{,}391 \text{ und } 0{,}557,$$

das heisst, auf 1000 Fehler liegen in der gegebenen Reihe 391 zwischen 0^{sec} und $0{,}2^{sec}$ und 557 zwischen 0^{sec} und $0{,}3^{sec}$, folglich $557 - 391 = 166$ zwischen $0{,}2^{sec}$ und $0{,}3^{sec}$. Auf 470 Fehler liegen also $470 . 0{,}166 = 78$ in den betrachteten Intervall.

10. Methode der kleinsten Quadrate. — Wir beschäftigen uns jetzt mit dem allgemeinen Fall der Fehlerrechnung.

Man habe mehrere Grössen A, B, $C \ldots$ zu bestimmen, welche mit einer unabhängigen Variabelen t (oder mehreren unabhängigen Variabelen) durch eine *bekannte* Beziehung

$$F(A, B, C \ldots, t) = N$$

verbunden sind, und es seien m Messungen n', n'', n''' ..... von N bei verschiedenen Werthen von t angestellt worden. Aus diesen Messungen, welche mit unvermeidlichen Fehlern, die wir zufällige nannten, behaftet sind, sollen die wahrscheinlichsten Werthe von A, B, $C \ldots$ abgeleitet werden. Wir denken uns die genau richtigen Werthe ermittelt und bezeichnen sie mit A_1 B_1, $C_1 \ldots$; setzt man dieselben für A, B, $C \ldots$ in die Function F ein und bildet die Differenzen

$$\begin{aligned} n' &- F(A_1, B_1, C_1 \ldots, t') = \varepsilon', \\ n'' &- F(A_1, B_1, C_1 \ldots, t'') = \varepsilon'', \\ n''' &- F(A_1, B_1, C_1 \ldots, t''') = \varepsilon''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so bekommt man eine Reihe von Resten, welche die bei den einzelnen Messungen begangenen Fehler ε', ε'', ε''' ... darstellen. Nun ist bei diesen m Fehlern die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} &\text{für den ersten} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon'^2} d\varepsilon, \\ &\text{für den zweiten} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon''^2} d\varepsilon, \\ &\text{für den dritten} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon'''^2} d\varepsilon, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wenn wir mit h den Präcisionsmodul dieser Beobachtungen bezeichnen; die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens aller dieser Fehler ist nach dem Satz von Moivre gleich dem Product der den einzelnen Fehlern zukommenden Wahrscheinlichkeiten, somit

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2(\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\varepsilon'''^2\ldots)} d\,\varepsilon^m.$$

Wenn die Zahl der Messungen einigermaassen beträchtlich ist, unterscheiden sich die wirklich begangenen Fehler nicht mehr von denen, welche das Fehlergesetz für ein System von Beobachtungen mit der Präcision h fordert; von allen möglichen Fehlerreihen ist aber die das Fehlergesetz befolgende die wahrscheinlichste; die plausibelsten Werthe der Unbekannten sind also diejenigen, welche die Wahrscheinlichkeit P zu einem Maximum machen, das heisst, da man h als gegeben voraussetzen kann, diejenigen, welche die Summe

$$\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 \ldots$$

zu einem Minimum machen. Hieraus folgt die fundamentale, von Legendre [1]) aufgestellte und von Laplace [2]) und Gauss [3]) bewiesene Regel:

Die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten sind diejenigen, welche für die Summe der Fehlerquadrate den kleinsten möglichen Werth liefern.

Man hat folglich A, B, C . . . so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate

$$S = [n' - F(A, B, C \ldots, t')]^2 + [n'' - F(A, B, C \ldots, t'')]^2 + \ldots$$

ein Minimum wird; diese Regel liefert die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0, \quad \ldots$$

Indem man so jede der Derivirten der Quadratsumme nach einer der Unbekannten für sich allein gleich Null setzt, bekommt man ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte und die Aufgabe ist theoretisch gelöst.

---

[1]) Legendre, Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des planètes; Paris 1806.

[2]) Laplace, Théorie analytique des probabilités; Paris 1812.

[3]) Gauss, Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae; Göttingen 1823. Vergl. S. 4, Anmerk.

11. Handhabung der Methode. — Practisch würde man nun meist auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen, wenn ein besonderer Umstand nicht erlaubte, die Gleichungen auf die lineare Form zu bringen. Diese Vereinfachung wird dadurch ermöglicht, dass man im Voraus schon immer die genäherten Werthe der Grössen A, B, C .... kennt. Es seien also a, b, c .... mehr oder weniger zutreffende Näherungswerthe von A, B, C ....; wir setzen

$$A = a + x,\ B = b + y,\ C = c + z,\ \ldots.,$$

wo x, y, z .... sehr kleine, zu bestimmende Grössen bedeuten.

Führen wir diese Werthe in die allgemeine Gleichung ein und vernachlässigen die Glieder mit x^2, xy ...., so haben wir

$$F(a,\ b,\ c\ \ldots,\ t) + \frac{\partial F}{\partial A}x + \frac{\partial F}{\partial B}y + \frac{\partial F}{\partial C}z + \ldots = N,$$

oder

$$dx + ey + fz + \ldots = N - F(a,\ b,\ c\ \ldots,\ t).$$

Folglich lassen sich die Messungen, wenn wir mit r', r'', r''' .... die sofort auszurechnenden Reste $n' - F(a, b, c\ldots, t')$, $n'' - F(a, b, c\ldots, t'')$, $n''' - F(a,\ b,\ c\ldots,\ t''')$, ... bezeichnen, in die folgenden Bedingungsgleichungen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} d'x &+ e'y + f'z + \ldots = r', \\ d''x &+ e''y + f''z + \ldots = r'', \\ d'''x &+ e'''y + f'''z + \ldots = r''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

auf welche sich die Methode leicht anwenden lässt.

Wir bilden nämlich die Summe der Fehlerquadrate

$$S = (d'x + e'y + f'z + \ldots - r')^2 + (d''x + e''y + f''z + \ldots - r'')^2 + \ldots,$$

ferner $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$ ... und setzen jede (durch 2 dividirte) Derivirte gleich Null; wir erhalten dann

$$d'(d'x + e'y + f'z + \ldots - r') + d''(d''x + e''y + f''z + \ldots - r'') + \ldots = 0$$

oder

$$(\Sigma d^2)x + (\Sigma de)y + (\Sigma df)z + \ldots = \Sigma dr,$$

und ebenso

$$\begin{aligned} (\Sigma ed)x + (\Sigma e^2)y + (\Sigma ef)z + \ldots &= \Sigma er, \\ (\Sigma fd)x + (\Sigma fe)y + (\Sigma f^2)z + \ldots &= \Sigma fr. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Um also die Endgleichung (Normalgleichung) für x zu erhalten, multiplicirt man jede der Bedingungsgleichungen mit dem Coefficienten von x in dieser Gleichung und bildet die Summe aller so transformirten Gleichungen; ebenso verfährt man, um die Endgleichungen für die andern Variabelen aufzustellen; die Unbekannten ergeben sich also sämmtlich aus Gleichungen ersten Grades.

12. Mittlerer Fehler der durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten Resultate. — Die Methode der kleinsten Quadrate giebt nicht nur das wahrscheinlichste Resultat; ihr wichtigster Vortheil ist der, dass sie den Grad der Genauigkeit dieses Resultats kennen lehrt.

Um den für das Resultat zu befürchtenden Fehler zu erhalten, wird man zunächst den mittleren Fehler der Beobachtungen berechnen. Man setzt hierzu in die m ursprünglichen Gleichungen die für x, y, z . . . gefundenen Werthe ein, erhält m Reste ε_1, ε'_1, ε''_1, und als mittlerer Fehler der Beobachtungen ergiebt sich

$$E = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon'^{\,2}_1 + \varepsilon''^{\,2}_1 + \cdots}{m - i}},$$

wo i die Anzahl der Unbekannten bedeutet.[1]) Wir nehmen $m - i$ als Nenner, weil in Wirklichkeit nur $m - i$ Gleichungen vorhanden sind, welche Widersprüche enthalten können; denn die m Gleichungen haben schon i Unbekannte geliefert: Die Fehler müssen also allein auf die $m - i$ Gleichungen vertheilt werden.

Der mittlere Fehler jedes Resultats ist nun leicht zu berechnen.[2]) Es möge ganz allgemein U eine beliebige bekannte Function der beobachteten Grössen M, N, P . . . bedeuten

$$U = f(M,\ N,\ P, \ldots).$$

Setzen wir für M, N, P . . . die Näherungswerthe m, n, p . . ., für welche die zu befürchtenden Fehler $\pm E$, $\pm E'$, $\pm E''$ betragen, so hat man

$$\pm \boldsymbol{E} = \pm \frac{\partial f}{\partial M} \boldsymbol{E} \pm \frac{\partial f}{\partial N} \boldsymbol{E'} \pm \frac{\partial f}{\partial P} \boldsymbol{E''} + \ldots$$

wo $\pm \boldsymbol{E}$ der für U zu befürchtende Fehler ist. Quadriren wir, wobei zu bemerken ist, dass die doppelten Producte in Folge des

[1]) Siehe die Anmerkung in **5**, Seite 4. — L.
[2]) Siehe Faye, loc. cit. p. 156.

zweifachen Zeichens von E, E', E'' . . . verschwinden und ziehen die Wurzel aus, so erhalten wir

$$\boldsymbol{E} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^2 E^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial N}\right)^2 E'^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)^2 E''^2 + \ldots}$$

Diese Formel ist fundamental in der Fehlertheorie; sie gestattet in allen Fällen die Präcision einer beliebigen Function beobachteter Grössen auszuwerthen.

Es folgt aus dieser Formel z. B., dass der bei einer Summe zu befürchtende Fehler, deren Summanden M und N einzeln mit den mittleren Fehlern E und E' gemessen sind, gleich ist

$$\boldsymbol{E} = \pm \sqrt{E^2 + E'^2}.$$

Ebenso ist ersichtlich, dass der mittlere Fehler des Inhalts eines Rechtecks mit den Seiten M und N

$$\boldsymbol{E} = \pm \sqrt{(NE)^2 + (ME')^2}$$

beträgt u. s. w.

Wir wollen die Regel auf den oben behandelten Fall anwenden.

Um den Fehler von x als Function der Fehler der gegebenen Grössen n', n'', n''' .... zu erhalten, differentiiren wir x nach jeder dieser Grössen, bilden die Quadratsumme aller dieser Differentialquotienten, indem wir dn'^2, dn''^2, dn'''^2 durch ihren mittleren Werth E^2 ersetzen und ziehen aus dieser Summe die Wurzel aus. Ebenso verfahren wir mit y, z.... Man sieht leicht, dass dies Verfahren darauf hinaus kommt, in den Normalgleichungen für x, y, z.... die Buchstaben x', y', z'.... zu schreiben, dieselben Gleichungen n mal, indem man die rechten Seiten ersetzt

durch 1, 0, 0 . . . . . nach x' aufzulösen,
ebenso „ 0, 1, 0 . . . . . nach y' „
und „ 0, 0, 1 . . . . . nach z' „
. . . . . .

und als mittleren Fehler für x, y, z

$$E\sqrt{x'},\quad E\sqrt{y'},\quad E\sqrt{z'}\ \ldots$$

zu nehmen. (Vgl. das Beispiel auf S. 23); $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{z'}$, sind die Gewichte der Unbekannten, wenn man, unter Voraussetzung gleicher Zuverlässigkeit für alle Beobachtungen, das Gewicht einer von ihnen als Einheit nimmt.

13. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf ein Beispiel. — Als Beispiel für die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate soll aus Messungen, die an verschiedenen Punkten der Erde ausgeführt wurden, die Länge des Secundenpendels am Äquator bestimmt werden.[1])

„Die Länge l des einfachen Secundenpendels ist mit der Abplattung der Erde μ durch die Gleichung von Clairaut verbunden

$$l = l' + \left(\frac{5}{2}\, q - \mu\right) l' \sin^2\lambda,$$

wo l' die Pendellänge am Äquator, q das Verhältniss $\frac{1}{289}$ der Centrifugalkraft zur Schwere am Äquator und λ die Breite bedeutet.

Es folgen hier einige an verschiedenen Punkten der Erde ausgeführte Messungen von l:

	λ	l in mm
Spitzbergen	$+ 79^0\ 50'$	996,13
St. Petersburg	59 57	994,97
New-York	40 43	993,24
Jamaika	17 56	991,56
St. Thomas	0 25	991,19
Rio de Janeiro	-22 55	991,77
Montevideo	34 54	992,70
Cap Horn	55 51	994,62
New-Shetland	62 56	995,23

Setzen wir zur Abkürzung

$$l' = 991\text{ mm} + x, \quad \left(\frac{5}{2}\, q - \mu\right) l' = y,$$

so haben wir zur Bestimmung von x und y die Gleichungen

$$\begin{aligned}
5{,}13 &= x + 0{,}969\, y,\\
3{,}97 &= x + 0{,}749\, y,\\
2{,}24 &= x + 0{,}426\, y,\\
0{,}56 &= x + 0{,}095\, y,\\
0{,}19 &= x,\\
0{,}77 &= x + 0{,}152\, y,\\
1{,}70 &= x + 0{,}327\, y,\\
3{,}62 &= x + 0{,}685\, y,\\
4{,}23 &= x + 0{,}793\, y.
\end{aligned}$$

---

[1]) Nach Faye, loc. cit., p. 161.

Man erhält die Normalgleichung für x durch einfache Addition dieser Gleichungen

$$9{,}000\,x + 4{,}196\,y = 22{,}41. \tag{1}$$

Um die Gleichung für y aufzustellen, multipliciren wir jede der gegebenen Gleichungen mit dem entsprechenden Coefficienten von y:

$$\begin{aligned}
4{,}97 &= 0{,}969\,x + 0{,}938\,y,\\
2{,}97 &= 0{,}749\,x + 0{,}561\,y,\\
0{,}95 &= 0{,}426\,x + 0{,}181\,y,\\
0{,}05 &= 0{,}095\,x + 0{,}009\,y,\\
0 \quad &\quad\; 0 \quad\;\; 0\\
0{,}12 &= 0{,}152\,x + 0{,}023\,y,\\
0{,}56 &= 0{,}327\,x + 0{,}107\,y,\\
2{,}48 &= 0{,}685\,x + 0{,}469\,y,\\
3{,}35 &= 0{,}793\,x + 0{,}629\,y.
\end{aligned}$$

Ihre Summe liefert die Gleichung

$$4{,}196\,x + 2{,}917\,y = 15{,}45. \tag{2}$$

Die Auflösung von (1) und (2) ergiebt

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}066 \text{ mm},\\
y &= 5{,}20 \text{ mm}.
\end{aligned}$$

Folglich ist die Länge des Pendels

$$\begin{aligned}
&\text{am Äquator} && l' = 991{,}066 \text{ mm},\\
&\text{und an den Polen} && l' + y = 996{,}266 \text{ mm};
\end{aligned}$$

y ist eine Function der Abplattung μ; da y jetzt bekannt ist, können wir μ aus der Gleichung

$$\left(\frac{5}{2}\,\frac{1}{289} - \mu\right) 991{,}066 = 5{,}20$$

ableiten, woraus folgt

$$\mu = \frac{1}{294}.$$

Es erübrigt noch den mittleren Fehler für jedes Resultat zu ermitteln. Zu diesem Zweck müssen wir zuerst den mittleren Fehler der Messungen von l bestimmen. Wenn wir in

die Bedingungsgleichungen die Werthe von x und y einsetzen, erhalten wir die Verbesserungen ε'_1, ε''_1, ε'''_1 . . . . . :

Beobachtet	Berechnet	Ber. — Beob. oder ε_1	ε_1^2
5,13	5,11	— 0,02	0,0004
3,97	3,96	— 0,01	0,0001
2,24	2,28	+ 0,04	0,0016
0,56	0,56	0	0
0,19	0,07	— 0,12	0,0144
0,77	0,86	+ 0,09	0,0081
1,70	1,77	+ 0,07	0,0049
3,62	3,63	+ 0,01	0,0001
4,23	4,19	— 0,04	0,0016
			0,0272

Die Summe $\varepsilon'_1{}^2 + \varepsilon''_1{}^2 + \varepsilon'''_1{}^2 + \ldots = 0{,}0272$; folglich wird der mittlere Fehler einer dieser Messungen

$$E = \sqrt{\frac{0{,}0272}{9-2}} = \pm 0{,}067 \text{ mm},$$

betragen, da die Zahl der Gleichungen 9, und die der Unbekannten gleich 2 ist.

Um den mittleren Fehler der für x und y gefundenen Zahlen zu erhalten, haben wir die beiden Systeme von Gleichungen zu lösen

$$\left.\begin{aligned} 9{,}000\,x' + 4{,}196\,y' &= 1 \\ 4{,}196\,x' + 2{,}917\,y' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ woraus } x' = \frac{1}{2{,}96},$$

$$\left.\begin{aligned} 9{,}000\,x' + 4{,}196\,y' &= 0 \\ 4{,}196\,x' + 2{,}917\,y' &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ woraus } y' = \frac{1}{0{,}96}.$$

Der mittlere Fehler von x oder $E\sqrt{x'}$ wird sich also auf

$$\pm \frac{0{,}067\,\text{mm}}{\sqrt{2{,}96}} = \pm 0{,}039\,\text{mm}$$

und der von y auf

$$\pm \frac{0{,}067\,\text{mm}}{\sqrt{0{,}96}} = \pm 0{,}068\,\text{mm}$$

belaufen. Es ist von grossem Interesse zu berechnen, mit welcher Genauigkeit die Abplattung μ durch diese Pendelmessungen an verschiedenen Punkten der Erde bestimmt ist. Die Gleichung

$$\left(\frac{5}{2}\,\frac{1}{289} - \mu\right)(991 + x) = y$$

giebt, wenn man sie nach μ, x und y differentiirt und beachtet, dass dx wegen des sehr kleinen Factors, mit welchem es multiplicirt ist, vernachlässigt werden kann,

$$d\mu = \pm\frac{dy}{991} = \pm 0{,}000068.$$

Dies kommt darauf hinaus, dass die Unsicherheit des Nenners von $\frac{1}{294}$, dem für μ gefundenen Werth, ± 6 Einheiten beträgt."

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf das vorstehende Beispiel könnte wegen der geringen Anzahl der Beobachtungen unberechtigt erscheinen. Da aber die Methode in Wirklichkeit auf dem Gesetz der zufälligen Fehler beruht, so berechtigt die Thatsache, dass die Fehler dieses Gesetz befolgen, zur Anwendung der Methode; diese Voraussetzung ist hier in der That sehr nahe erfüllt.

14. Wesentliche Bemerkung. — Die Prüfung der Fehler ist indessen immer eine sehr wichtige Aufgabe; denn die wesentliche Bedingung für die Anwendbarkeit der Methode ist die, dass die Fehler oder Verbesserungen klar das Gesetz der zufälligen Fehler erkennen lassen. Diese Prüfung darf aber niemals dazu verleiten, eine Beobachtung, welche nicht schon vor der Berechnung verdächtig war, zu verwerfen. „Jede Beobachtung," sagt Gerling[1]), „welche durch das Beobachtungsprotokoll nicht als verdächtig bezeichnet wird, ist für mich ein Zeuge, welcher soeben die Wahrheit bezeugt hat. Ich habe nicht das Recht, sein Zeugniss unter dem Vorwand zurückzuweisen, dass seine Aussagen von den anderen abweichen, ebenso wenig als ich ihn foltern darf, bis er etwas mir Erwünschtes aussagt."

15. Satz von Cornu[2]). — Wir haben oben an einigen Bei-

---

[1]) Gerling, Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie; Hamburg 1843.

[2]) Cornu, Vitesse de la lumière, 220, in Annales de l'Observatoire de Paris, XIII, 1876.

Siehe auch Helmert l. c. S. 18. — L.

spielen gezeigt, wie man in jedem einzelnen Fall die Art der Fehlervertheilung ermitteln kann. Dieses Verfahren ist aber ziemlich mühsam, wenn die Zahl der Beobachtungen einigermassen beträchtlich ist; und doch darf man über die Genauigkeit des Mittels einer gegebenen Zahl von Beobachtungen mit Anwendung der Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht eher einen Schluss ziehen, bis man festgestellt hat, dass die Abweichungen vom Mittel der Bedingung, auf welcher jene Regeln beruhen, nämlich dem Gesetze der zufälligen Fehler genügen. Cornu hat ein sehr einfaches und elegantes Mittel angegeben, um die Erfüllung der Voraussetzung zu prüfen. Dies praktische Kriterium lautet:

Wenn die Abweichungen einer Reihe von Zahlen von ihrem arithmetischen Mittel dem Gesetz der zufälligen Fehler Genüge leisten, so ist das doppelte Quadrat des mittleren Fehlers $2\,E^2$, *dividirt durch das Quadrat des durchschnittlichen Fehlers* e^2 *(das Mittel aller Abweichungen ohne Rücksicht auf das Zeichen), gleich der Zahl* $\pi = 3{,}14159$.

Bei der Aufstellung einer Formel für e nach dieser Definition hat man zu bedenken, dass das von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckte Integral Null geben würde, da es ebenso viele negative wie positive Fehler giebt; wenn man folglich allein die Summe der positiven Abweichungen bildet $\int_0^\infty$ und diese Summe verdoppelt, so ergiebt sich

$$e = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x\, e^{-h^2 x^2}\, d\,x = \frac{1}{h\sqrt{\pi}};$$

andrerseits ist, wie wir oben gesehen haben, (8)

$$E^2 = \frac{1}{2\,h^2};$$

folglich

$$\frac{2\,E^2}{e^2} = \pi = 3{,}14159.$$

So erhielt Cornu zum Beispiel bei 75 chronographischen Messungen einer Zeitdifferenz, wenn man die Abweichungen in Tausendstel Secunden ausdrückt,

$$e = 10{,}648, \quad E^2 = 178{,}012,$$

folglich

$$\frac{2E^2}{e^2} = \frac{356{,}024}{113{,}380} = 3{,}14.$$

16. Physikalische Gesetze; physikalische Theorien. — Ob eine Erscheinung mit all ihrer natürlichen Complication oder unter besonders einfachen, im Voraus vorbereiteten Bedingungen studirt wird, mit anderen Worten, ob man eine *Beobachtung* oder ein *Experiment* macht, der Zweck ist immer der, ein *Gesetz* zu finden, das heisst eine Beziehung zwischen zwei Factoren des Phänomens, einer bestimmten Variabelen und einer anderen, die eine nothwendige Function der ersten ist. Wenn also eine gewisse Anzahl von Messungen unter möglichst guten Versuchsbedingungen ausgeführt, wenn ferner für jede Grösse der unabhängigen Variabelen der wahrscheinlichste Werth der Function ermittelt ist, wird es sich darum handeln, die Beziehung zu finden, welche die Variabele mit der Function, die Ursache mit der Wirkung verknüpft. Man wird die Resultate in einer Form darstellen, welche ihre Vergleichung erleichtert; das beste Mittel hierfür ist das Zeichnen einer Curve; wir haben bei der Untersuchung des Gesetzes der zufälligen Fehler schon ein Beispiel dafür gehabt und werden in der Folge noch manchem anderen begegnen. Wenn die Curve gezeichnet ist, muss sie in eine Regel oder allgemeiner in eine Gleichung übersetzt werden. Mit Hülfe dieser Gleichung kann man die numerischen Werthe der Function berechnen, welche zu gegebenen Grössen der Variabelen gehören, und die berechneten Werthe mit den beobachteten vergleichen; die Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung dürfen die wahrscheinlichen Fehler nicht überschreiten. Das Gesetz wird indessen nur dann als richtig angesehen werden können, wenn es auf die mannigfaltigste Art bestätigt ist.[1]) Sobald eine Anzahl von Gesetzen, welche zu derselben Klasse von Erscheinungen gehören, ermittelt ist, so erübrigt es noch eine *Theorie* auszubauen, welche diese Gesetze einem einzigen Princip unterordnet und sie alle als einfache Folgerungen in sich begreift. Es wird zu diesem Zweck eine *Hypothese* aufgestellt; aus dieser leitet man analytisch alle Folgerungen ab, und man wird so die durch die Erfahrung gewonnenen Gesetze wiederfinden.

---

[1]) Sonst hat man einfach ein sogenanntes empirisches Gesetz, das heisst eine Formel oder eine Curve, welche eine gewisse Zahl von Beobachtungen in geeigneter Weise zusammenfasst. Mit einer Parabel oder Kettenlinie kann man fast immer eine Reihe von Messungen genügend genau empirisch darstellen.

Doch dies genügt noch nicht. „Wenn die aufgestellte Hypothese die wirkliche Ursache einer Klasse von Erscheinungen ist, so muss sie nicht nur alle bekannte Thatsachen erklären, sondern auch auf andere, dem Physiker noch nicht bekannte, hinweisen; sind die durch die Theorie angegebenen neuen Erscheinungen zahlreich und werden sie vollständig durch das Experiment bestätigt, so ist mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass die Hypothese, welche zum Ausgangspunkt diente, der Wirklichkeit entspricht. Diese zweite Probe allein ist entscheidend.“ [1])

---

[1]) Lamé, Cours de Physique de l'École polytechnique, I, 6; 1836.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Gesetze und Eigenschaften der Materie.

Erstes Capitel.

Allgemeine Mechanik.

17. Wesentliche Eigenschaft der Materie. — „Der sicherste Beweis für das Dasein der Materie ist ihre Fähigkeit zu widerstehen“, sagt Herbert Spencer. Diesen Widerstand nennt man in der Mechanik Trägheit und in der Physik Undurchdringlichkeit.

Die Trägheit ist der Widerstand, den ein Körper der Bewegung oder vielmehr der Änderung seiner Bewegung entgegensetzt. In der Natur bewegt sich Alles: Die Gestirne durchlaufen im Weltraum ihre Bahnen, hunderte von Gegenständen bewegen sich vor unsern Augen auf der Erde. Nichts ist in absoluter Ruhe in dem unermesslichen Weltall. Alle Eigenschaften, in Folge deren wir den Stoff aus der Entfernung wahrnehmen, der Schall, das Licht, die Wärme sind Bewegungen, und nicht nur Bewegungen in dem übertragenden Mittel, sondern auch Bewegungen in dem Körper selbst. Wenn es also, wir wir später noch ausführen werden, unstreitig feststeht, dass es Eigenschaften der Materie sind, durch welche wir aus der Ferne auf ihre Anwesenheit schliessen, so ist es logisch vorauszusetzen, dass es sich ebenso mit den anderen Eigenschaften verhält, durch welche wir sie bei der Berührung wahrnehmen; denn bei der Berührung ist schliesslich die Entfernung nur sehr klein, aber nicht Null. Wir haben uns also den Stoff in unaufhörlicher Bewegung zu denken. Wenn es überhaupt

möglich ist, Stoff und Bewegung von einander zu trennen und sich Bewegung ohne Stoff oder Stoff ohne Bewegung zu denken, so sind dies nur Abstractionen. In Wirklichkeit giebt es nur bewegte Materie.

I. Kinematik.

18. Definition der Kinematik. — Die Kinematik *(κίνημα,* Bewegung) oder die Lehre von der Bewegung an sich, unabhängig von ihren Ursachen, ist ein rein rationeller Theil der Mechanik, welcher von Ampère abgetrennt und mit dem jetzt gebräuchlichen Namen benannt wurde. Zur Vorstellung Raum, der einzigen Grundlage der Geometrie[1]), wird allein der Begriff Zeit hinzugefügt, und aus der Verbindung dieser beiden Grundbegriffe werden die nothwendigen Gesetze der Bewegung gefolgert. Das Wichtigste wollen wir hier kurz behandeln.

Bei den ersten Untersuchungen über Bewegung können wir von den Dimensionen der Körper absehen, und werden nur Punkte in Betracht ziehen, welche aber alle Eigenschaften der Materie haben sollen; wir denken uns den Stoff in beliebiger Menge in ihnen verdichtet und nennen sie folglich *materielle Punkte.* Ein in Bewegung begriffener materieller Punkt heisst ein *beweglicher Punkt,* und die Folge seiner Lagen seine *Bahn.*

19. Geschwindigkeit. — Die denkbar einfachste Bewegung ist diejenige, bei welcher die Bahn eine gerade Linie ist und der bewegliche Punkt in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt.

Die *Geschwindigkeit,* die wir nicht weiter definiren wollen, wird dann durch den in der *Zeiteinheit zurückgelegten (stets gleichen) Weg* gemessen, gewöhnlich durch die in einer Secunde mittlerer Sonnenzeit durchlaufene Anzahl Meter; diese Geschwindigkeit sei v. Der im Verlauf der Zeit t zurückgelegte Weg $OM = x$ (von dem Punkte

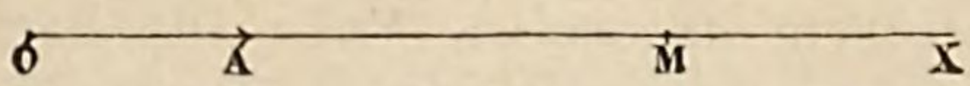


Fig. 3.

O aus gezählt, in welchem sich der bewegliche Punkt zur Zeit $t = o$ befindet) ist

$$x = vt.$$

---

[1]) Man macht manchmal und zwar mit grossem Vortheil auch in der Geometrie von dem Begriff der Bewegung Gebrauch z. B. zur Definition von Linien, Oberflächen, welche man sich durch die Bewegung eines Punktes, einer Linie beschrieben denkt.

Folglich ist

$$v = \frac{x}{t},$$

das heisst, bei dieser Bewegung kann die Geschwindigkeit auch durch *das constante Verhältniss des Weges zu der zum Zurücklegen desselben nöthigen Zeit gemessen werden.* Geometrisch wird man sie durch die in der Zeiteinheit durcheilte Strecke OA darstellen.

Betrachten wir zweitens eine *geradlinig ungleichförmige Bewegung.* Es seien M und M' die Lagen des beweglichen Punktes zu zwei

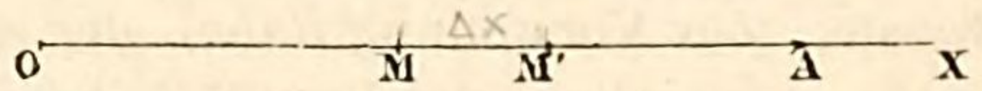


Fig. 4.

benachbarten Zeiten t und $t + \Delta t$, und es sei $MM' = \Delta x$; $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_1$ ist die *mittlere Geschwindigkeit* während der Zeit Δt. Es ist dies die constante Geschwindigkeit, welche man einem auf der Geraden OX sich gleichförmig bewegenden Punkt beilegen muss, damit er während der Zeit Δt genau die Länge Δx durchläuft. Wir denken uns nun, dass Δt sich der Grenze Null nähert; Δx wird ebenfalls der Grenze Null zustreben und das Verhältniss $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ gegen eine endliche Grenze convergiren, welche wir die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t nennen wollen:

$$v = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Es ist dies *die Derivirte des Weges nach der Zeit.* Geometrisch kann man diese Geschwindigkeit durch eine Gerade von passender Grösse MA darstellen, welche in der Bewegungsrichtung auf OX aufgetragen wird.

Wir kommen zum *allgemeinen Fall.* Die Bahn sei eine beliebige und werde nach irgend einem Gesetz durchlaufen: OM

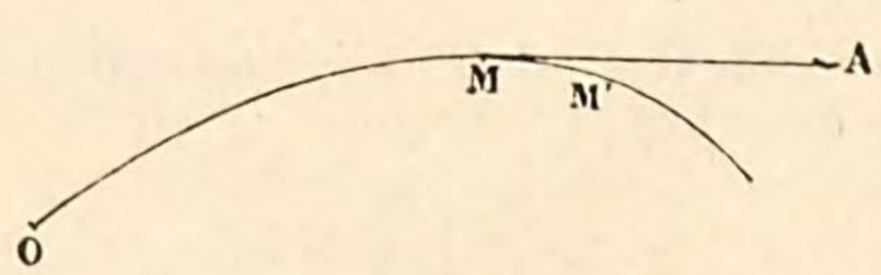


Fig. 5.

oder $s = f(t)$. Wir betrachten während der krummlinigen Bewegung des beweglichen Punktes zwei Lagen M und M', welche er zu be-

nachbarten Zeiten t und $t+\Delta t$ passirt. Wenn wir $MM' = \Delta s$ setzen, so ist $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit v_1, mit welcher der Weg Δs durcheilt wird. Wenn Δt mehr und mehr abnimmt, wird Δs immer kleiner und das Verhältniss $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ strebt einer Grenze zu, welche uns wieder die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zur Zeit t darstellt

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Da die elementare Bewegung des Punktes zur Zeit t nach der in M an die Bahn gezogenen Tangente gerichtet ist, so müssen wir die Geschwindigkeit auf dieser Tangente zählen. Geometrisch können wir das Verhältniss $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ oder $\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t}$ durch $\frac{\text{Sehne } MM'}{\Delta t}$ ersetzen, denn die Differenz zwischen Bogen und Sehne ist von der dritten Ordnung unendlich klein.[1])

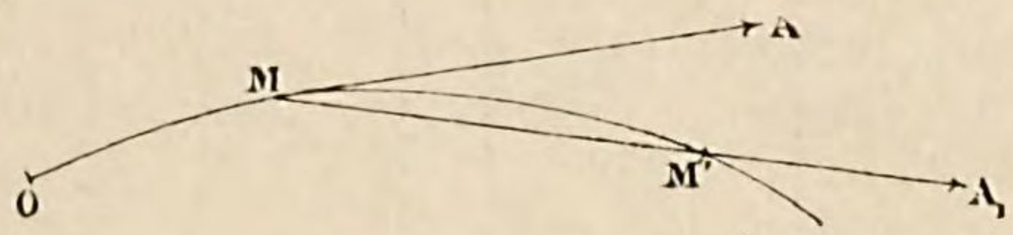


Fig. 7.

Hiernach werden wir die mittlere Geschwindigkeit v_1 durch

---

[1]) Es sei ein von der ersten Ordnung unendlich kleiner Bogen ACB und seine Sehne AB gegeben. In den Bogen beschreiben wir ein Polygon, dessen Seitenzahl wir mehr und mehr wachsen lassen. Projicirt man dieses Vieleck auf AB, so ist die Projection jeder Seite gleich dieser Seite,

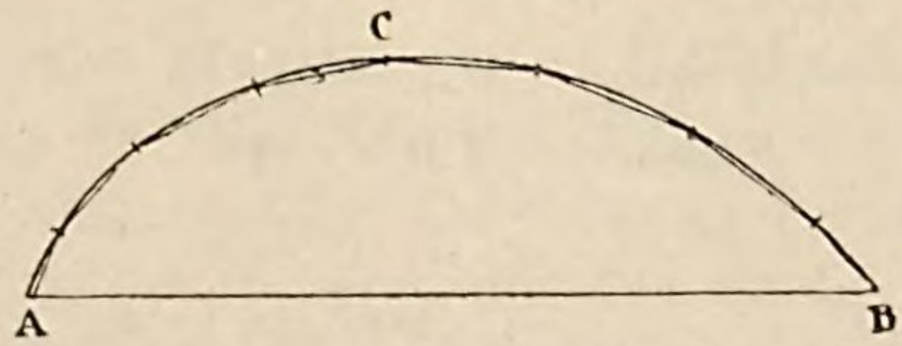


Fig. 6.

multiplicirt mit $(\cos x = 1 -) 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, wenn x den von der ersten Ordnung unendlich kleinen Winkel bedeutet, welchen diese Seite mit AB bildet. Durch Addition aller dieser Projectionen erhält man die Sehne AB; die Differenz der Sehne gegen die Summe der Seiten des Vielecks wird einer Summe gleich sein, deren einzelne Glieder aus Producten von unendlich kleinen Grössen erster in solche zweiter Ordnung bestehen; diese Summe ist also unendlich klein von der dritten Ordnung.

eine gewisse Länge $MA_1 = \frac{\text{Sehne } MM'}{\Delta t}$ darstellen, welche auf der Sehne MM' in der Richtung der *Verschiebung* aufgetragen ist, und die Geschwindigkeit MA in M wird nach Grösse und Richtung der Grenzwerth von MA_1 sein.

Man kann die Untersuchung der krummlinigen Bewegung durch Projection auf die geradlinige Bewegung zurückführen.

Wenn nämlich der bewegliche Punkt in jeder seiner aufeinander folgenden Lagen auf eine feste Achse $X'X$ projicirt wird, so ist *die Geschwindigkeit der Projection in jedem Augenblick die Projection der Geschwindigkeit.*

Es seien m und m' die Projectionen zweier benachbarter Lagen M und M' des beweglichen Punktes, und ma_1 sei die Projection

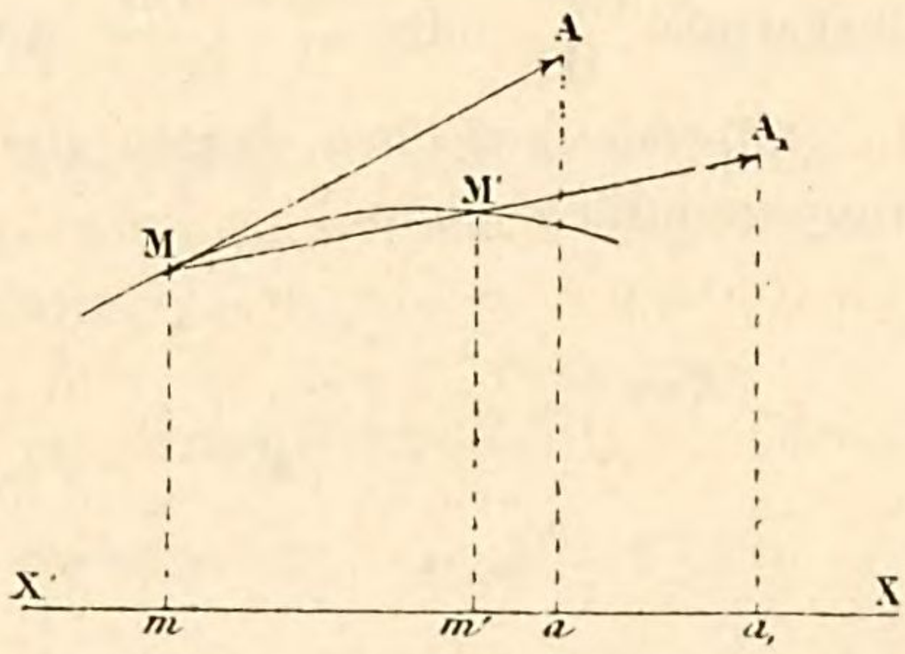


Fig. 8.

der mittleren Geschwindigkeit MA_1. Die drei in der Figur durch ihre Spuren Mm, $M'm'$ und $A_1 a_1$ dargestellten Projectionsebenen schneiden auf der Achse $X'X$, da sie parallel sind, proportionale Längen ab:

$$\frac{ma_1}{mm'} = \frac{MA_1}{MM'} = \frac{1}{\Delta t},$$

also

$$ma_1 = \frac{mm'}{\Delta t},$$

das heisst, ma_1 ist die mittlere Geschwindigkeit des beweglichen Punktes m. Wenn Δt der Grenze Null zustrebt, bleiben diese Beziehungen bestehen; während also MA_1 sich einer Grenze MA, der Geschwindigkeit des Punktes M zur Zeit t nähert, convergirt ma_1 gegen eine Grenze ma, welche gleichzeitig die Geschwindigkeit von m zu der nämlichen Zeit t und die Projection von MA ist.

Dieser Lehrsatz ist auch für schiefwinklige Projection richtig. Er gilt ferner für den Fall der Projection auf eine Ebene, und in der

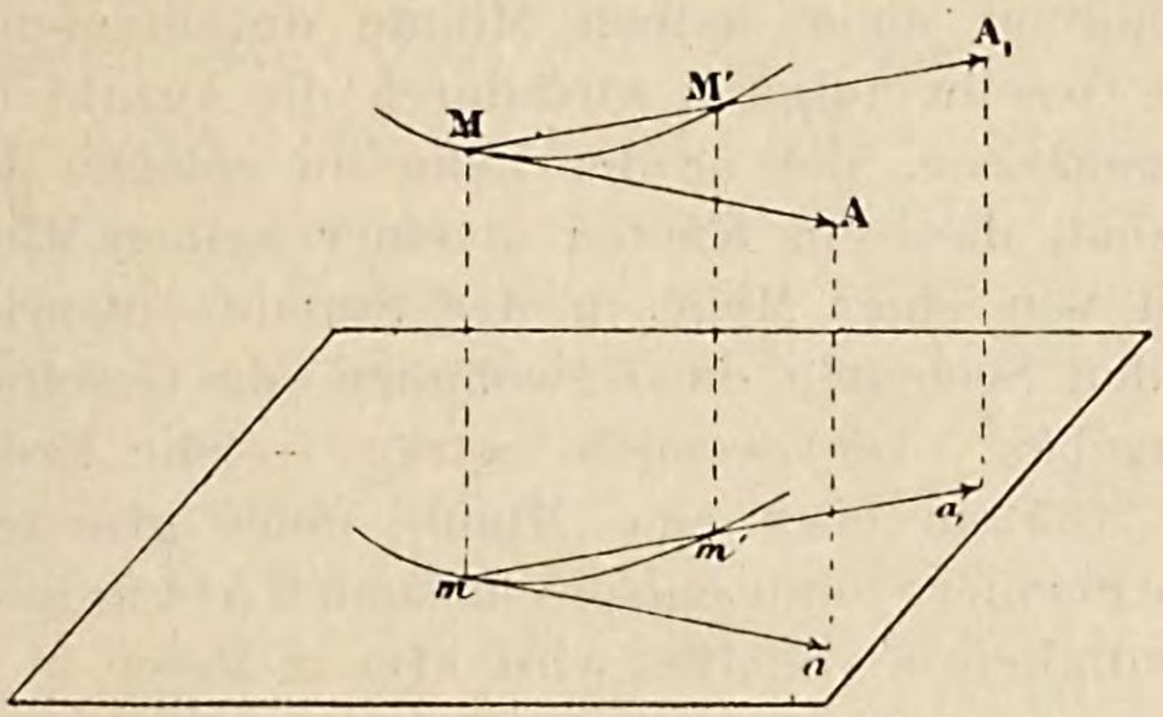


Fig. 9.

letzteren Form wird man ihn jedesmal dann mit Vortheil anwenden, wenn die Bahn, wie es häufig vorkommt, durch ihre Projectionen auf feste Ebenen gegeben ist.

Für den Augenblick wollen wir uns auf das folgende unmittelbare Ergebniss des Lehrsatzes in seiner ersten Form beschränken: Es seien

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

die Projectionen des beweglichen Punktes auf die drei Coordinatenachsen; die Projectionen der Geschwindigkeit sind dann

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

20. Practische Messung der Geschwindigkeit. — Die practische Messung der Geschwindigkeit begegnet keinen Schwierigkeiten, wenn es sich um eine gleichförmig geradlinige Bewegung handelt. Es genügt dann nach der Definition, den während der Zeiteinheit durchlaufenen Weg zu messen.

Es soll zum Beispiel die Geschwindigkeit eines in gleichförmiger Fahrt befindlichen Schiffes bestimmt werden. Vom Schiff lässt man einen dreieckigen Schwimmer ins Meer hinab, welcher so beschwert ist, dass er aufrecht schwimmt und an Ort und Stelle bleibt, sobald sich das Schiff eine kurze Strecke entfernt hat. An dem Schwimmer oder *Logschiff* ist eine Leine, *die Logleine,* befestigt, welche der Seemann nach und nach abrollt. Sobald das Logschiff sich in einer passenden Entfernung (Schiffslänge) von dem Fahr-

zeug befindet, dreht man in dem Augenblick, in welchem ein an der Logleine befestigtes Stück Tuch vorbeikommt, eine Sanduhr um und lässt die Leine eine halbe Minute lang abrollen. Der von dem Fahrzeug während einer halben Minute durchlaufene Weg und folglich seine Geschwindigkeit wird durch die Anzahl der passirenden *Knoten* gemessen, die in der Leine in solchen Entfernungen angebracht sind, dass ein Knoten in einer halben Minute der Geschwindigkeit von einer Meile in der Stunde entspricht[1]); daher stammt bei den Seeleuten die Gewohnheit, die Geschwindigkeit in Knoten anzugeben. Die Seemeile beträgt — die Erde als Kugel betrachtet — 1852 m oder eine Minute eines grössten Kreises.[2]) Eine Seemeile in einer Stunde entspricht somit 0,514 m in der Secunde. Die Geschwindigkeit des Schiffes wird also in Meter in der Secunde erhalten, wenn man die Anzahl der Knoten mit 0,514 multiplicirt.

Ist die Bewegung eine ungleichförmige, so wird die Messung der Geschwindigkeit schwieriger. Die Untersuchung der Fallgesetze liefert uns später ein Beispiel für die Bestimmung der Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung.

21. Curve der Bewegung; Geschwindigkeitscurve. — Es sei $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz eines Punktes. Wir ziehen zwei rechtwinklige Achsen OX und OY und zeichnen, indem wir

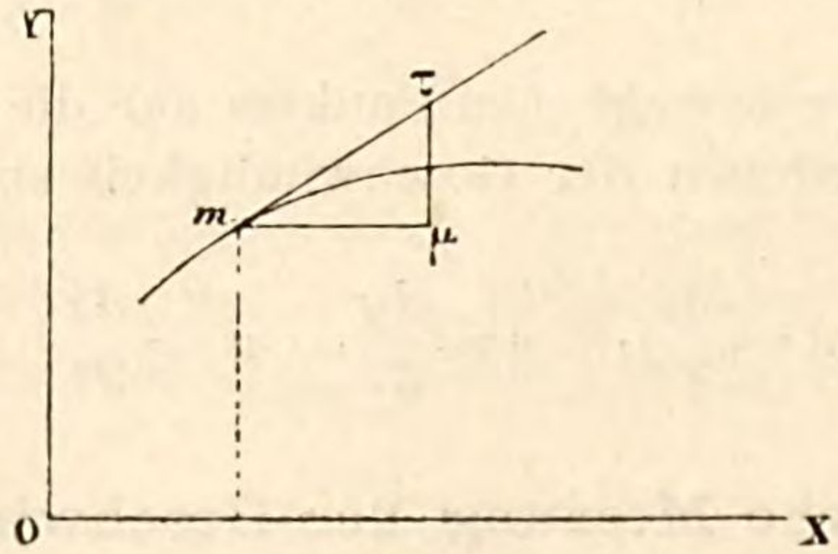


Fig. 10.

die Zeit auf OX und den Weg auf OY auftragen, die Curve $s = f(t)$. Diese Curve, die geometrisch das Bewegungsgesetz darstellt, nennt

---

[1]) Wenn man den Abstand zweier Knoten nach dieser Angabe ausrechnet, findet man 15,4 m. In der Praxis wird diese Länge etwas (etwa 0,6 m) kleiner genommen, um die geringe Verschiebung des Schwimmers, welcher nothwendigerweise durch die Logleine etwas nachgezogen wird, in Rechnung zu ziehen.

[2]) Die Seemeile ist also nahezu der vierte Theil der deutschen geographischen Meile, welche 4 Minuten des Äquatorumfanges oder 7420 m beträgt. — L.

man *Wegcurve.* Wie wir später sehen werden, ist es häufig möglich, den beweglichen Punkt diese Curve, welche nicht mit seiner Bahn verwechselt werden darf, beschreiben zu lassen. Die Geschwindigkeit zur Zeit t oder $\frac{ds}{dt}$ ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie in dem zur Abscisse t gehörigen Punkte m mit der Achse OX bildet; man findet die Geschwindigkeit durch Construction, wenn man parallel zu OX eine Länge $m\mu = 1$ sec zieht und im Punkte μ eine Senkrechte bis zum Schnitt mit der Tangente $m\tau$ errichtet.

Für die Geschwindigkeiten lässt sich eine ähnliche Curve, *die Geschwindigkeitscurve,* zeichnen, indem auf der Abscissenachse wieder

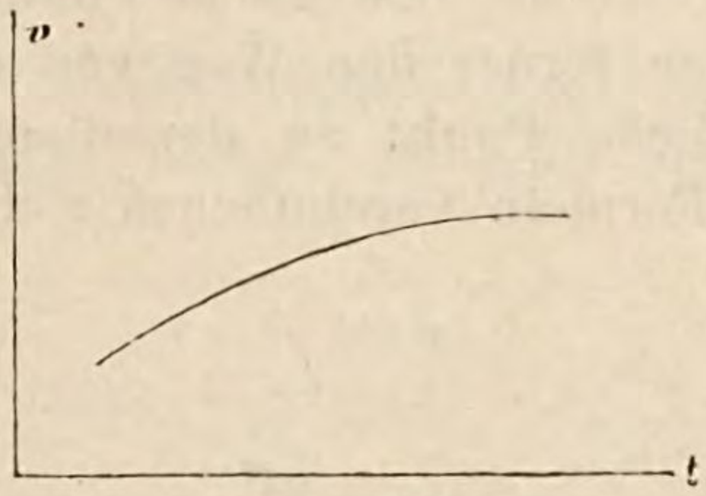


Fig. 11.

die Zeit, auf der Ordinatenachse aber die Geschwindigkeit aufgetragen wird. Aus dieser Curve kann man die Wegcurve durch eine Integration wieder erhalten. Es giebt Apparate, welche solche Integrationen mechanisch ausführen, zum Beispiel das Planimeter von Amsler.

22. Beschleunigung. — Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden mit veränderlicher Geschwindigkeit, so ist der Fall besonders interessant, bei welchem sich die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Beträge ändert. Die Bewegung wird dann eine *geradlinige, gleichförmig veränderliche* genannt, und die constante Änderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit heisst die *Beschleunigung*; dieselbe ist positiv oder negativ, je nachdem die Geschwindigkeit wächst oder abnimmt.

Es sei

v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$,
v die Geschwindigkeit zur Zeit t,
γ die Beschleunigung.

Nach der Definition hat man

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t},$$

also

$$v = v_0 + \gamma t.$$

Die Beziehung zwischen Weg und Zeit ergiebt sich hieraus unmittelbar. Da die Geschwindigkeit die Derivirte des Weges nach der Zeit ist, bekommt man den Weg durch Integration:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Wenn zur Zeit $t = 0$ der bewegliche Punkt in Ruhe ist, so wird $v_0 = 0$ und wenn man ferner den Weg von der Lage an rechnet, welchen der bewegliche Punkt zu derselben Zeit einnimmt, ist $x_0 = 0$; die beiden Formeln vereinfachen sich dann auf

$$v = \gamma t$$

und

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Ändert sich die Bewegung, die noch immer *geradlinig* sein soll, *ungleichförmig*, so wird die Beschleunigung auf folgende Weise definirt. Sei v die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zur Zeit t, $v + \Delta v$ die Geschwindigkeit zur Zeit $t + \Delta t$, so ist $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ die mittlere Beschleunigung γ_1; es ist dies diejenige Beschleunigung, welche man einem mit gleichförmiger Beschleunigung sich bewegenden Punkt ertheilen müsste, damit in derselben Zeit Δt seine Geschwindigkeit v sich um denselben Betrag Δv vergrösserte.

Wenn Δt der Grenze Null zustrebt, nähert sich diese mittlere Beschleunigung γ_1 einer Grenze γ, welche man die Beschleunigung zur Zeit t nennt:

$$\gamma = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

oder

$$\gamma = \frac{dv}{dt}:$$

Die Beschleunigung ist die Derivirte der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Es ist aber

$$v = \frac{dx}{dt},$$

also

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}:$$

Die Beschleunigung ist die zweite Derivirte des Weges nach der Zeit.

Zu ihrer Darstellung wird eine bestimmte, mit dem passenden Zeichen versehene Länge benutzt, welche man auf der vom beweglichen Punkt durchlaufenen Geraden aufträgt und nach der einen oder andern Seite unter Berücksichtigung des Zeichens richtet.

Wir wollen jetzt einen *beweglichen Punkt* betrachten, *welcher sich auf einer beliebigen Bahn bewegt.* Es seien MA und $M'A'$ die Ge-

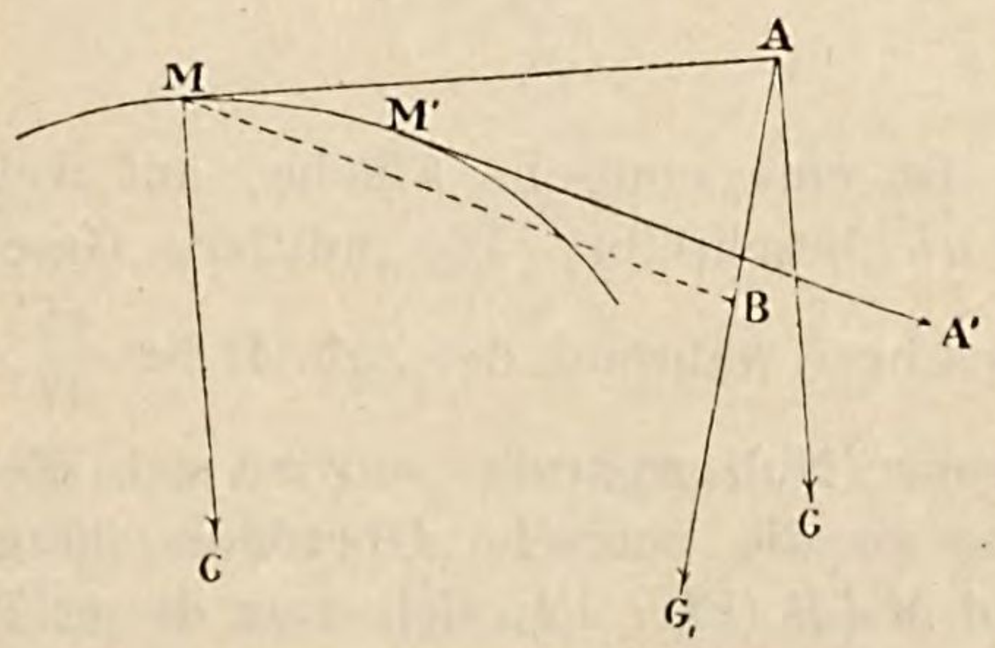


Fig. 12.

schwindigkeiten zu den Zeiten t und $t+\Delta t$; ziehen wir durch den Punkt M die Strecke MB, gleich und parallel zu $M'A'$, und verbinden die Punkte A und B, so ist die Länge AB geometrisch die Änderung der Geschwindigkeit während der Zeit Δt. Wenn wir also auf AB eine Länge $AG_1 = \frac{AB}{\Delta t}$ auftragen, so wird dieselbe die mittlere Beschleunigung γ_1 des beweglichen Punktes während der Zeit Δt nach Grösse und Richtung darstellen. Wenn jetzt Δt der Grenze Null zustrebt, wird die Ebene MAB sich einer Grenzlage, der Osculationsebene im Punkt M, nähern; in dieser Ebene nimmt AG_1 nach Grösse und Richtung einen Grenzwerth AG an, nämlich die Beschleunigung des Punktes zur Zeit t; es ist bequemer, dieselbe durch eine Strecke MG' darzustellen, welche

durch den Punkt M geht und der Strecke AG gleich und parallel ist.

Den Begriff der Beschleunigung kann man leicht auf den der Geschwindigkeit zurückführen. Durch ein und denselben Punkt O des Raumes ziehen wir Strecken Oa, $Ob \ldots$, welche den auf einander folgenden Geschwindigkeiten des beweglichen Punktes MA, $M'A' \ldots$, gleich und parallel sind. Der geometrische Ort

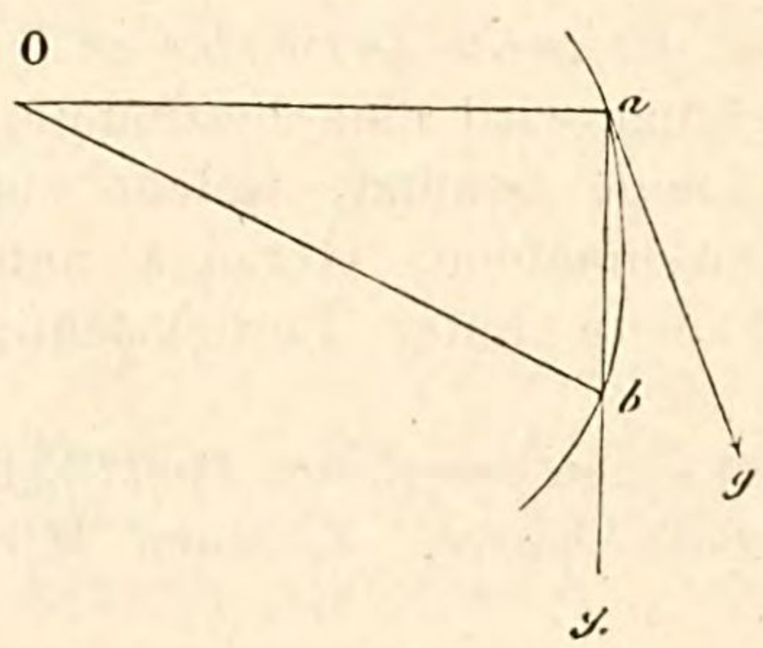


Fig. 13.

dieser Strecken ist eine conische Fläche, auf welcher der Punkt a eine Curve[1]) ab beschreibt. Die mittlere Geschwindigkeit ag_1 von a auf dieser Curve während der Zeit Δt ist $\frac{ab}{\Delta t}$, das heisst γ_1. Wenn Δt der Grenze Null zustrebt, so wird sich die Ebene Oab der Berührungsebene an die conische Oberfläche längs Oa unendlich nähern, während MAB (Fig. 12) sich einer dieser Berührungsebene parallelen Ebene nähert; die Beschleunigung AG des beweglichen Punktes M zur Zeit t ist nichts anderes als die Geschwindigkeit ag des Punktes a in demselben Augenblick.

Wir wollen dieses Verfahren auf die *gleichförmige Kreisbewegung* anwenden. Ein beweglicher Punkt M beschreibt die Peripherie eines Kreises vom Radius R mit einer constanten Geschwindigkeit v. Wenn auch diese Geschwindigkeit MA der Grösse nach sich gleich bleibt, so ist sie doch der Richtung nach verschieden; es muss also eine Beschleunigung vorhanden sein. Ziehen wir durch den Punkt O die Strecke Oa, gleich und parallel zu MA, so ist der geometrische Ort des Punktes a ein Kreisumfang; a durchläuft denselben in der gleichen Zeit, welche M braucht, um die Peripherie

---

[1]) Diese Curve ist von Hamilton mit dem Namen Hodograph bezeichnet worden. Vgl. Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Deutsche Übersetzung von Helmholtz und Wertheim, I. p. 27. — L.

des Kreises mit dem Halbmesser R zu durcheilen. Die Geschwindigkeiten von a und M müssen also den Radien der beschriebenen

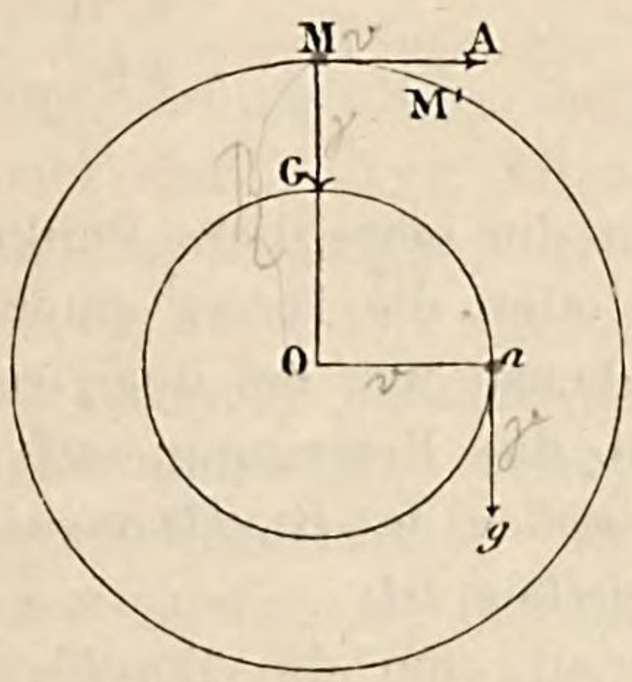


Fig. 14.

Kreise v und R proportional sein. Wenn γ die Geschwindigkeit des Punktes a ist, haben wir somit

$$\frac{\gamma}{v} = \frac{v}{R},$$

oder

$$\gamma = \frac{v^2}{R}.$$

Dies ist der Werth der Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung. Wenn wir vom Punkte M aus eine Länge MG, gleich und parallel zu ag, auftragen, so haben wir in MG die geometrische Darstellung der Beschleunigung, welche, wie man sieht, in jedem Augenblick in der Richtung des Halbmessers nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet ist.

Dem Ausdruck für diese Beschleunigung kann man noch eine andere, oft nützliche Form geben. Es sei bei irgend einer kreisförmigen Bewegung $\Delta\Theta$ der dem Bogen $MM' = \Delta s$ entsprechende Winkel MOM', so hat man

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} R$$

und als Grenzwerth

$$v = \omega R,$$

worin $\omega = \lim \frac{\Delta\Theta}{\Delta t}$ *die Winkelgeschwindigkeit der Drehung* bedeutet.

Setzen wir diesen Werth von v in den obigen Ausdruck für γ ein, so ergiebt sich

$$\gamma = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

wenn T die Zeit, welche der bewegliche Punkt zum Zurücklegen des Umfanges gebraucht, oder die Dauer einer Umdrehung bedeutet.

Wir sehen hier ebenso wie bei der Geschwindigkeit unmittelbar, dass, wenn man die Bewegung auf eine Ebene oder eine Achse projicirt, *die Projection der Beschleunigung in jedem Augenblick die Beschleunigung der Projection ist.*

Hiernach wird man, um die Beschleunigung zu berechnen, drei Coordinatenachsen Ox, Oy, Oz zu Grunde legen. Die Coordinaten x, y, z des beweglichen Punktes sind drei gegebene Functionen der Zeit

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \chi(t), \\ z &= \psi(t), \end{aligned}$$

deren erste Derivirten die Geschwindigkeiten der Projectionen oder die Projectionen der Geschwindigkeit liefern:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v\cos\alpha, \\ \frac{dy}{dt} &= v\cos\beta, \\ \frac{dz}{dt} &= v\cos\gamma, \end{aligned}$$

wobei

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

die zweiten Derivirten bedeuten die Beschleunigungen der Projectionen oder die Projectionen der Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \gamma\cos a, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \gamma\cos b, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \gamma\cos c, \end{aligned}$$

worin

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

23. Normale Beschleunigung; tangentielle Beschleunigung. — Häufig zieht man es vor, die Beschleunigung anders zu bestimmen. Da die Beschleunigung in der Krümmungsebene gelegen ist, so kann man sie durch ihre Projection auf zwei in dieser Ebene liegende Geraden messen, nämlich die Tangente im Punkt M und die in der Krümmungsebene gelegene Normale in demselben Punkt oder die Hauptnormale. Die dritte Projection ist also Null, und das Achsensystem ist beweglich.

Um diese neuen Projectionen zu berechnen, gehen wir auf die mittlere Beschleunigung zurück. Es sei $MA = v$ die Ge-

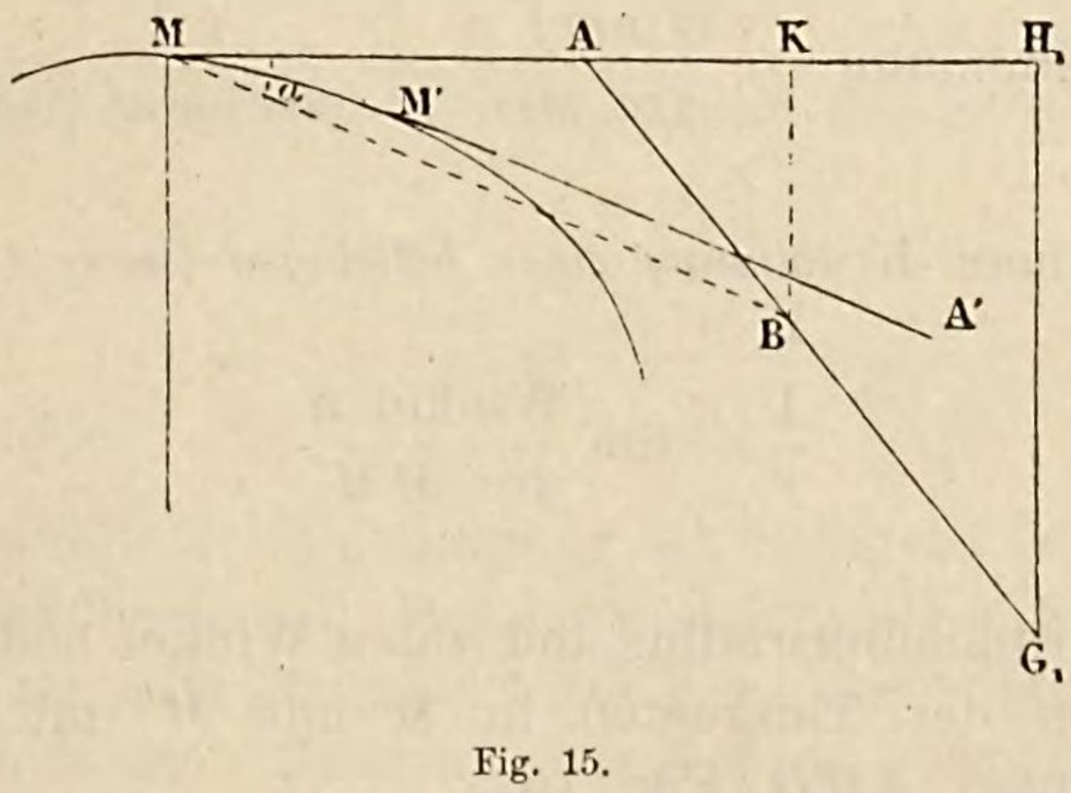


Fig. 15.

schwindigkeit zur Zeit t, $M'A' = v'$ die Geschwindigkeit zur Zeit $t + \Delta t$; durch den Punkt M ziehen wir MB, gleich und parallel zu $M'A'$, und verbinden A mit B; $AG_1 = \frac{AB}{\Delta t}$ ist die mittlere Beschleunigung. Projiciren wir AG_1 auf MA und auf eine Senkrechte zu MA, so werden die Strecken AH_1 und H_1G_1 die Projectionen der Beschleunigung auf die Tangente und die Hauptnormale zur Grenze haben. Zerlegen wir ebenso AB in AK und BK, so finden wir

$$G_1H_1 = \frac{BK}{\Delta t} \text{ und } AH_1 = \frac{AK}{\Delta t}.$$

Diese beiden Grössen wollen wir nach einander berechnen.

Die *Krümmung eines Kreises* ist bekanntlich der Contingenzwinkel der beiden Tangenten, welche an die Enden eines Bogens von

der Länge 1 gezogen sind, oder, was auf dasselbe herauskommt,

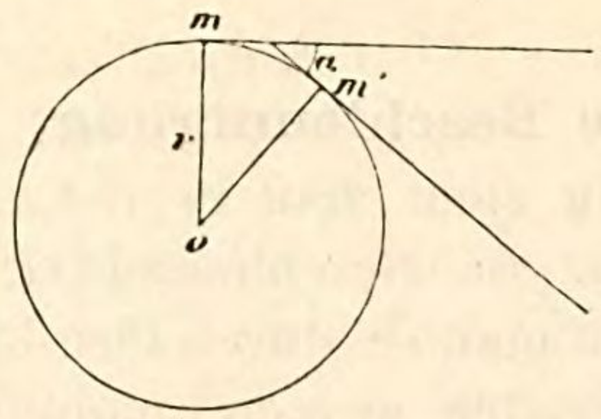


Fig. 16.

das Verhältniss des Contingenzwinkels α der beiden Tangenten in m und m' zum Bogen mm':

$$\text{Krümmung} = \frac{\text{Winkel } \alpha}{\text{arc } mm'} = \frac{\frac{\text{arc } mm'}{r}}{\text{arc } mm'} = \frac{1}{r};$$

analog nennt man *Krümmung einer beliebigen Curve*

$$\frac{1}{r} = \lim \frac{\text{Winkel } \alpha}{\text{arc } MM'},$$

worin r den Krümmungsradius und α den Winkel bedeutet, welchen die Richtungen der Tangenten in M und M' mit einander einschliessen (Winkel AMB, Fig. 15).

Der Ausdruck für $G_1 H_1$ kann also geschrieben werden:

$$G_1 H_1 = \frac{BK}{\Delta t} = \frac{v' \sin \alpha}{\Delta t} = v' \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\text{arc } MM'} \cdot \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t};$$

an der Grenze wird $v' = v$, $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, $\frac{\alpha}{\text{arc } MM'} = \frac{1}{r}$, $\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} = v$,

und es ist

$$\lim G_1 H_1 = \frac{v^2}{r},$$

oder, indem man mit γ_n die *Beschleunigung in der Richtung der Hauptnormalen* bezeichnet,

$$\gamma_n = \frac{v^2}{r}.$$

Berechnen wir ebenso den Grenzwerth von AH_1:

$$AH_1 = \frac{AK}{\Delta t} = \frac{v' \cos \alpha - v}{\Delta t} = \frac{v'\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - v}{\Delta t}$$

$$= \frac{v' - v}{\Delta t} - 2v' \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} - 2v' \sin\frac{\alpha}{2} \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\Delta t}.$$

Da der Grenzwerth des zweiten Gliedes auf der rechten Seite $= 0$ ist, behalten wir einfach

$$\lim AH_1 = \frac{dv}{dt},$$

oder, wenn γ_t die *tangentielle Beschleunigung* bedeutet,

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}\ ^{1}).$$

Die tangentielle Beschleunigung ist jedesmal Null, wenn die Bewegung gleichförmig ist. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist dies der Fall; die Beschleunigung ist fortwährend längs des Halbmessers nach dem Centrum des Kreises gerichtet und gleich $\frac{v^2}{r}$, wie wir schon abgeleitet haben (**22**).

24. Ausdruck für die Beschleunigung mit Hülfe der Bahnelemente. — Wir wollen noch einen Ausdruck für die Beschleunigung angeben, dessen Kenntniss von Nutzen ist.

Auf der Bahncurve seien M und M' die Lagen des beweglichen Punktes zu den Zeiten t und $t + \Delta t$, und es sei $MA = v\,\Delta t$

---

[1]) In diesem Ausdruck $\frac{dv}{dt}$ wird die Geschwindigkeit v nach dem gewöhnlichen Gebrauch als numerische Grösse aufgefasst. Wenn man auf geometrische Grössen direkt die Differentialrechnung anwenden würde, hätte man es nicht nöthig, die Frage zu zergliedern; man könnte sagen, dass die Beschleunigung immer die Derivirte der Geschwindigkeit ist, oder vielmehr der geometrischen Grösse, welche die Geschwindigkeit darstellt. Hamilton hat in seiner Quaternionentheorie versucht, geometrische Grössen oder Vectoren direct der Rechnung zu unterwerfen.

der Weg, welchen der Punkt auf der Tangente während der Zeit Δt zurückgelegt haben würde, wenn die Bewegung von der Zeit t

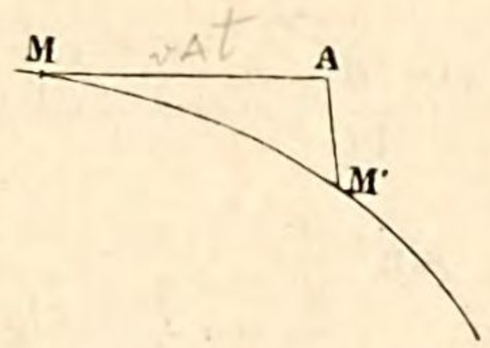


Fig. 17.

an geradlinig und gleichförmig geworden wäre; wir ziehen die Verbindungslinie AM', welche Duhamel die *Deviation* nennt; diese Linie hat die Richtung der Beschleunigung zur Grenzlage, und $\lim \frac{AM'}{\frac{\Delta t^2}{2}}$ stellt genau die Beschleunigung zur Zeit t dar. Die erste Behauptung ist unmittelbar klar, die zweite lässt sich folgendermassen beweisen:

Die Coordinaten des Punktes M' sind

$$x + \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{1\,.\,2} + \ldots,$$

$$y + \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{1\,.\,2} + \ldots,$$

$$z + \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{1\,.\,2} + \ldots;$$

die Coordinaten des Punktes A sind

$$x + \frac{dx}{dt}\Delta t,$$

$$y + \frac{dy}{dt}\Delta t,$$

$$z + \frac{dz}{dt}\Delta t.$$

Die Projectionen von AM' sind daher unter Vernachlässigung der Glieder von höherer Ordnung als der zweiten, welche auf das Resultat keinen Einfluss haben,

$$\frac{\Delta t^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{\Delta t^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{\Delta t^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{d^2z}{dt^2};$$

die Grenzwerthe von $2 \cdot \frac{AM'}{\Delta t^2}$ sind folglich

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

also

$$\lim 2 \frac{AM'}{\Delta t^2} = \gamma.$$

Wir werden beim Studium der zusammengesetzten Bewegung bald Gelegenheit haben, diesen bei Anwendungen oft nützlichen Ausdruck für die Beschleunigung zu gebrauchen.

25. Zusammensetzung von Bewegungen. — Bis jetzt haben wir uns nur mit der Bewegung eines Punktes, der auf feste Achsen bezogen war, beschäftigt und sind dabei nicht auf Schwierigkeiten gestossen; denn wenn man auch solche Achsen nicht wirklich zieht, so kann man sie sich immer gezogen denken. So lange man es nur mit Verschiebungen eines Punktes in Bezug auf ein gegebenes Achsensystem zu thun hat, ist es ferner vollständig einerlei, ob dasselbe wirklich unbeweglich ist oder nicht. Es ist indessen wichtig, jetzt weiter zu gehen und den Fall zu betrachten, in welchem die Achsen, auf welche die Bewegung bezogen wird, selbst beweglich sind.

Ein Punkt hat eine in Bezug auf das System A gegebene Bewegung; dieses System A bewegt sich selbst in bekannter Weise im System B; die Bewegung des Punktes in Bezug auf B soll ermittelt werden: Auf dieses Problem laufen schliesslich alle Fragen über die *Zusammensetzung von Bewegungen* hinaus.

26. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. — In erster Linie wollen wir uns mit Geschwindigkeiten beschäftigen.

Es seien zunächst *zwei geradlinige, gleichförmige Bewegungen,*

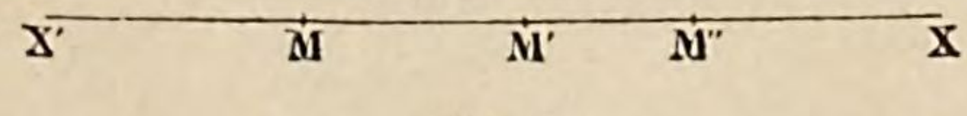


Fig. 18.

welche längs derselben Geraden erfolgen, zusammen zu setzen. Der bewegliche Punkt M bewegt sich auf der Geraden $X'X$, indem er in der Zeit Δt einen Weg $MM' = v\,\Delta t$ zurücklegt; in derselben Zeit gleitet die Gerade $X'X$ in sich selbst, so dass nach Verlauf der

Zeit Δt der Punkt M' der Geraden nach M'' gekommen ist; MM''' sei gleich $v' \Delta t$.

Der von dem Punkt wirklich in der Zeit Δt zurückgelegte Weg ist

$$MM'' = (v + v') \Delta t.$$

Die resultirende Bewegung ist also gleichförmig und die resultirende Geschwindigkeit

$$V = v + v'$$

ist die algebraische Summe der Geschwindigkeiten der beiden gegebenen Bewegungen.

Wenn die beiden längs derselben Geraden gerichteten Bewegungen nicht gleichförmig wären, so würde die Betrachtung der mittleren Geschwindigkeiten noch zu demselben Resultat führen; denn man hat immer

$$MM'' = MM' + M'M''.$$

Folglich ist

$$\frac{MM''}{\Delta t} = \frac{MM'}{\Delta t} + \frac{M'M''}{\Delta t}$$

und an der Grenze

$$V = v + v'.$$

Wir wollen jetzt versuchen, *zwei geradlinige, gleichförmige Bewegungen, welche nach verschiedenen Richtungen erfolgen, zusammen zu setzen.* Ein Punkt bewegt sich gleichförmig auf einer Geraden OX, welche ihrerseits parallel zu sich selbst verschoben wird, so dass ihr Punkt O gleichförmig auf OY gleitet. Zur Zeit t ist der bewegliche Punkt auf OX nach P gekommen,

$$OP = vt,$$

während die Gerade OX nach $O'X'$ gelangt ist

$$OO' = v't;$$

der bewegliche Punkt ist also in M; die Länge $O'M$ ist nämlich gleich OP, weil PM zu OY und $O'M$ zu OX parallel ist. In

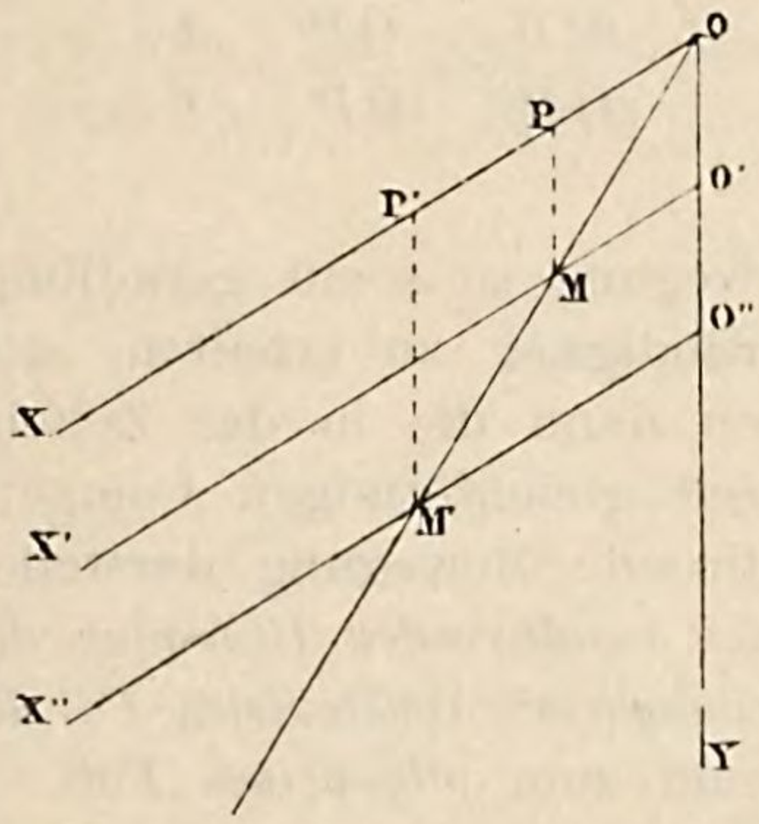


Fig. 19.

einer anderen Zeit t' wird sich der bewegliche Punkt auf OX in P' befinden

$$OP' = vt',$$

und die Gerade ist nach $O''X''$ gekommen

$$OO'' = v't';$$

der bewegliche Punkt wird dann in M' sein, dem Schnittpunkt der von P' aus zu OY gezogenen Parallelen und der Geraden $O''X''$.

Es ist aber

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{t}{t'} = \frac{OO}{OO''}$$

oder

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{PM}{P'M'}.$$

Die beiden Dreiecke POM und $P'OM'$ sind also ähnlich, da die Winkel bei P und P' einander gleich und die anliegenden Seiten proportional sind. Folglich sind auch die Winkel beider Dreiecke bei O einander gleich; die beiden Richtungen OM und OM' fallen zusammen; die Bahn des Punktes M ist eine Gerade.

Die Bewegung ist ferner gleichförmig. Aus der Ähnlichkeit derselben Dreiecke folgt nämlich

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{t}{t'}.$$

Die resultirende Bewegung ist somit geradlinig und gleichförmig.

Um die Geschwindigkeit zu erhalten, setzen wir $t = 1$; OP, PM und OM werden dann die in der Zeiteinheit durchlaufenen Wege für die beiden gleichförmigen Componenten und für die gleichförmige resultirende Bewegung darstellen; man sieht, dass *die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung die Diagonale des aus den gegebenen Geschwindigkeiten construirten Parallelogramms ist.*

Wir kommen nun zum *allgemeinen Fall.* Es sei S die Bahn des Punktes M im System A, Σ im System B die Bahn desjenigen Punktes des Systems A, mit welchem zur Zeit t der bewegliche Punkt zusammenfällt. Es seien MM' und MM'' die auf diesen

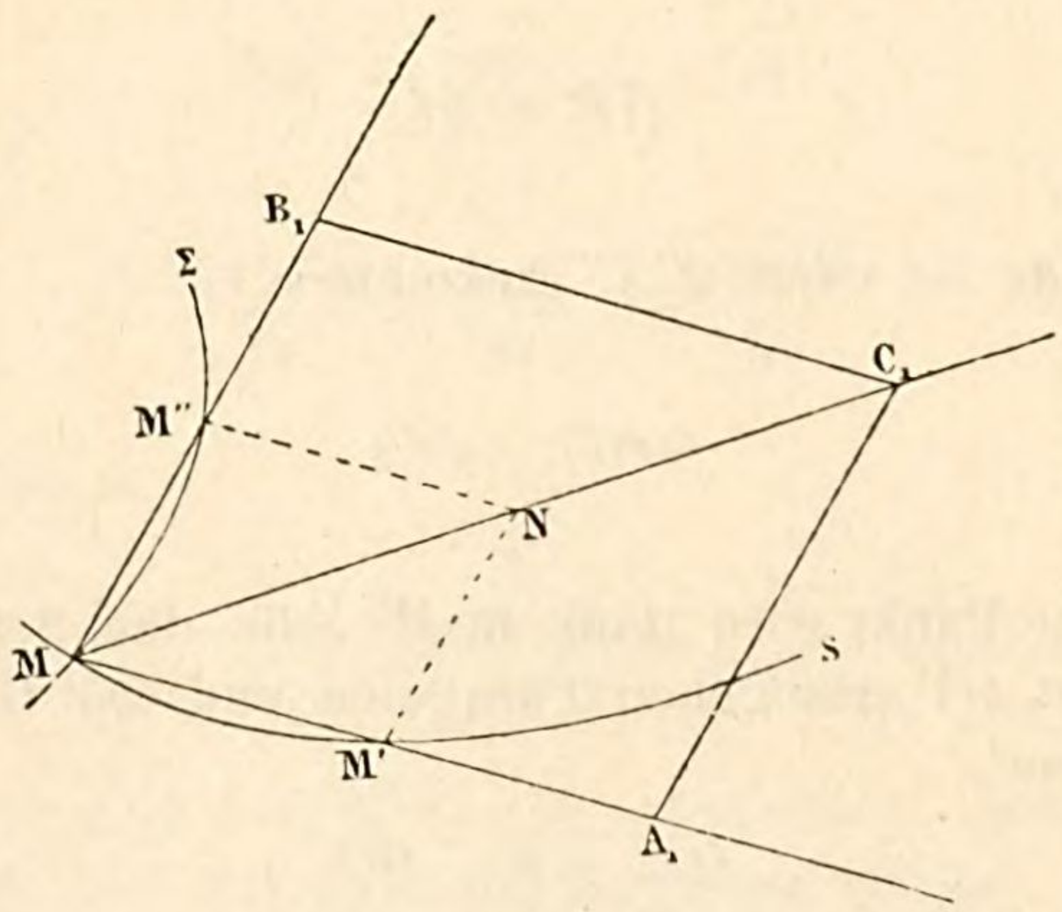


Fig. 20.

beiden Bahnen in der Zeit Δt beschriebenen Bogen; zur Zeit $t + \Delta t$ wird der bewegliche Punkt in N sein, am Ende der Diagonale des aus den Seiten MM' und MM'' construirten Parallelogramms; nach dem Vorhergehenden werden die drei Grössen $\frac{MM'}{\Delta t}$, $\frac{MM''}{\Delta t}$, $\frac{MN}{\Delta t}$ die Geschwindigkeiten der componirenden Bewegungen und die der Resultanten zu Grenzwerthen haben. Wenn wir nun auf MM', MM'' und MN Längen MA_1, MB_1 und MC_1 auftragen, welche gleich den obigen Brüchen sind, so wird die letzte dieser Längen

die Diagonale des mit den beiden anderen construirten Parallelogramms sein; da diese Beziehung bestehen bleibt, wenn Δt der Grenze Null zustrebt, so wird die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung dadurch erhalten, dass man die Geschwindigkeiten der Componenten nach dem *Satz vom Parallelogramm* summirt. Mit

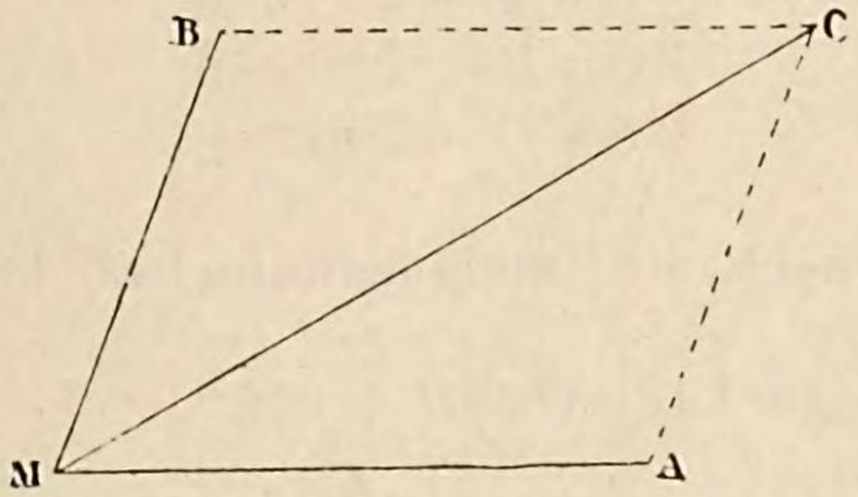


Fig. 21.

anderen Worten, wir haben die Geschwindigkeiten der Componenten geometrisch zu addiren; man bezeichnet nämlich als *geometrische Summe* zweier Grössen MA und MB die Verbindungslinie des Punktes M mit dem Punkte C, welcher dadurch erhalten wird, dass man am Ende von MA die Linie MB der Grösse und Richtung nach anträgt.

Die Allgemeinheit des Gesetzes für die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten ist augenscheinlich: *Die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung ist die geometrische Summe der Geschwindigkeiten der Componenten,* welches auch ihre Zahl sein möge. Zur Geschwindigkeit des beweglichen Punktes im System A addirt man geometrisch die Geschwindigkeit, welche im System B in demselben Augenblick derjenige Punkt des Systems A hat, in dem sich gerade der bewegliche Punkt befindet, dann hierzu die Geschwindigkeit im System C desjenigen Punktes von B, in dem gerade dieser Punkt von A ist u. s. w.

Die Regel vereinfacht sich, wenn die Bewegungen des einen Systems im andern *translatorische Bewegungen* sind, das heisst, wenn alle Punkte des betrachteten Systems in derselben Zeit in einem zweiten System gleiche und parallele Verschiebungen erfahren. Zur Geschwindigkeit des Punktes M in A wird man dann einfach die Geschwindigkeit des Systems A in B addiren und so fort, immer natürlich nach der Regel der Summation geometrischer Grössen.

Der analytische Ausdruck dieser Regel ist sehr einfach. Wenn man nämlich die componirenden Bewegungen v, v', v'' ... und die resultirende Geschwindigkeit V auf eine Achse projicirt, so wird die Projection von V gleich der Summe der Projectionen der verschiedenen Seiten der gebrochenen Linie $v\ v'\ v''$ ... sein. Wählen wir

also drei Coordinatenachsen Ox, Oy, Oz und bezeichnen mit α, β, γ; α', β', γ'; ... A, B, C die Winkel der Geschwindigkeiten v, v' ... und der Resultanten V mit den Achsen, so wird

$$V\cos A = v\cos\alpha + v'\cos\alpha' + \ldots,$$

oder

$$V\cos A = \Sigma v\cos\alpha,$$
$$V\cos B = \Sigma v\cos\beta,$$

und

$$V\cos C = \Sigma v\cos\gamma;$$

es besteht ferner noch die fundamentale Beziehung

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Wir haben also vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten, V, A, B und C.

Da die Grösse V offenbar von der Wahl der Achsen unabhängig ist, müssen sich die auf die Achsen bezüglichen Grössen eliminiren lassen. In der That, wenn man in dem aus den obigen Gleichungen folgenden Ausdruck für V^2

$$V^2 = (\Sigma v\cos\alpha)^2 + (\Sigma v\cos\beta)^2 + (\Sigma v\cos\gamma)^2,$$

die Quadrate entwickelt, so bekommt man

$$\begin{aligned} V^2 &= v^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + v'^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') + \ldots \\ &\quad + 2vv'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') + \ldots \\ &= v^2 + v'^2 + \ldots + 2vv'\cos(v, v') + \ldots, \end{aligned}$$

worin $\cos(v, v')$ den Cosinus des Winkels der beiden Richtungen von v und v' bedeutet, oder mit der obigen Bezeichnung

$$V^2 = \Sigma v^2 + 2\Sigma vv'\cos(v, v').$$

Für zwei Geschwindigkeiten ist die Resultante die Diagonale

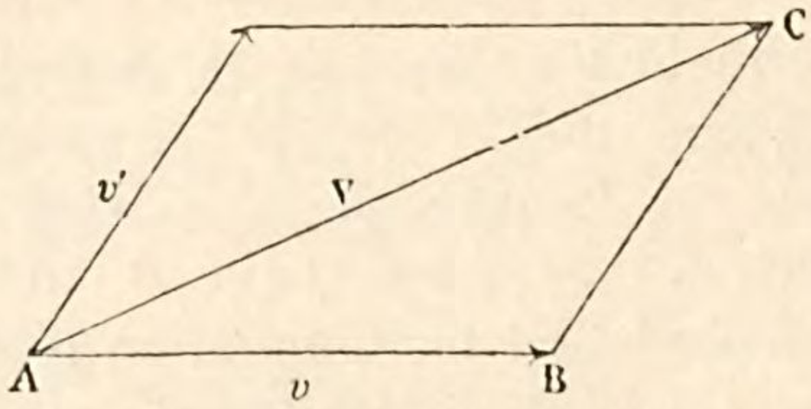


Fig. 22.

des Parallelogramms der componirenden Geschwindigkeiten, und man hat

$$V^2 = v^2 + v'^2 + 2vv'\cos(v, v').$$

Für drei Geschwindigkeiten ist die Resultante die Diagonale

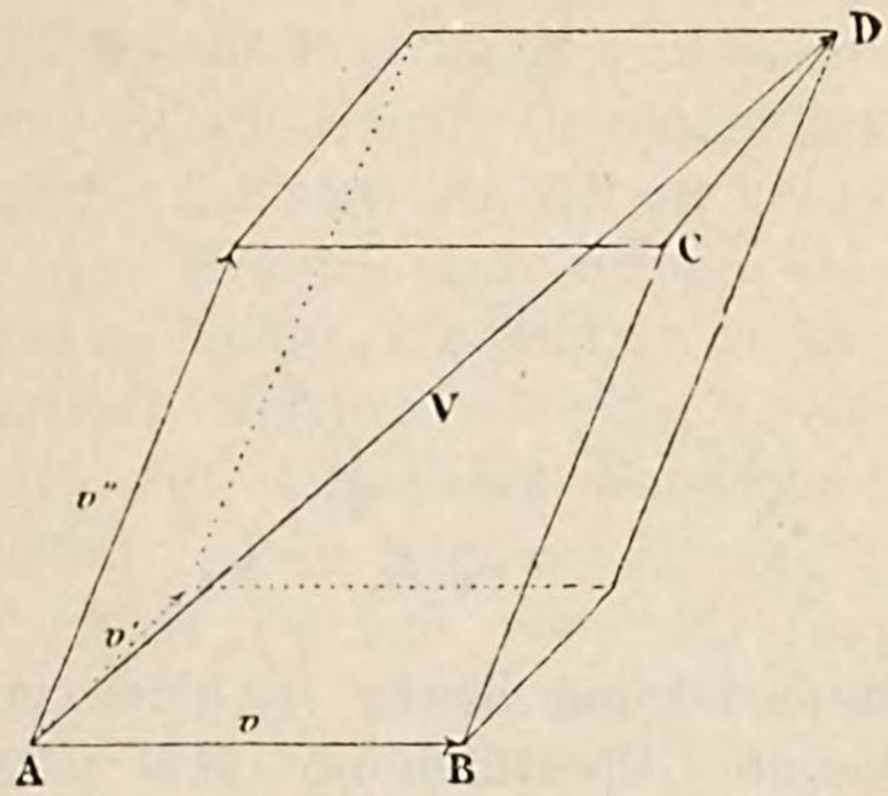


Fig. 23.

des Parallelepipeds der componirenden Geschwindigkeiten:

$$V^2 = v^2 + v'^2 + v''^2 + 2vv' \cos(v, v') + 2v'v'' \cos(v', v'') + 2v''v \cos(v'', v).$$

Wenn eine Bewegung gegeben ist, kann man sie immer als Resultante von zwei oder mehr Bewegungen auffassen, die zu einer einzigen zusammengesetzt worden sind. Eine gegebene Bewegung kann also immer in mehrere andere *zerlegt* werden, vorausgesetzt, dass die verschiedenen Componenten, durch welche man sie ersetzt, als Resultante die vorgeschriebene Geschwindigkeit ergeben, wenn man sie nach der gewöhnlichen Regel wieder zusammensetzt. So kann man eine Geschwindigkeit, wie wir schon angegeben haben, durch ihre Projectionen auf die Coordinatenachsen ersetzen; ebenso wird man die folgende Aufgabe angreifen:

Ein Punkt bewegt sich in einem System A, welches sich selbst wieder in einem System B verschiebt; man kennt die Bewegung des Punktes in Bezug auf das System B und ebenso die Bewegung des Systems A in B; gesucht wird die relative oder scheinbare Bewegung des Punktes im System A.

Dieses Problem kommt offenbar auf das folgende hinaus: Gegeben ist die resultirende Bewegung und eine der Componenten, gesucht wird die zweite Componente; mit andern Worten, die resultirende Bewegung ist in zwei Componenten zu zerlegen, deren eine bekannt ist. Es sei in einem bestimmten Augenblick MM'' (Fig. 24) die nach Grösse und Richtung gegebene resultirende Verschiebung, $M'M''$ die gleichfalls bekannte Componente; zu MM'' als Diagonale und $M'M''$ oder MM_1 als Seite construiren wir ein Parallelogramm

$M_1 M'' M' M$; MM' ist dann die gesuchte Componente und das Problem somit gelöst.

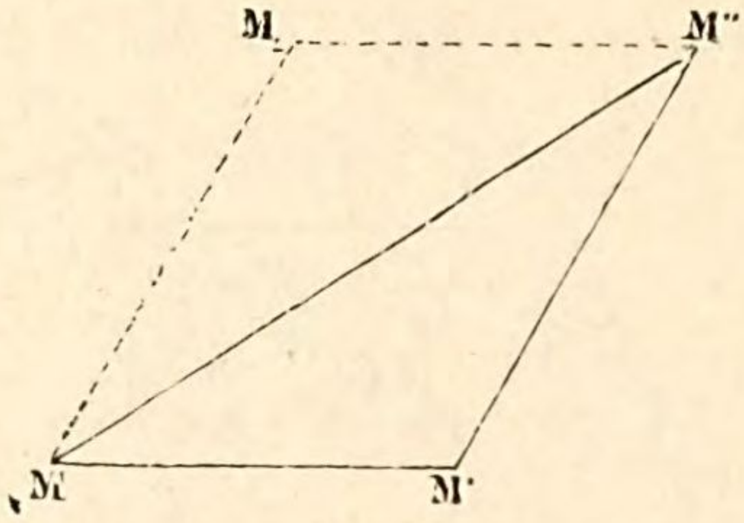


Fig. 24.

Man stellt diese Lösung häufig in einer praktischeren Form dar. Die unbekannte Verschiebung MM' kann nämlich als geometrische Summe der resultirenden Bewegung MM'' und der Verschiebung $M''M'$ betrachtet werden, welche letztere der bekannten Componente $M'M''$ entgegengesetzt gleich ist. Indem man wie gewöhnlich von der Verschiebung zur Geschwindigkeit übergeht, sieht man, dass *die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung des beweglichen Punktes im System A in jedem Augenblick gleich der geometrischen Summe zweier Geschwindigkeiten ist, nämlich der wirklichen Geschwindigkeit des Punktes im System B und einer auf das System B bezogenen Geschwindigkeit; die letztere ist der Geschwindigkeit desjenigen Punktes von A entgegengesetzt gleich, in welchem sich gerade der bewegliche Punkt befindet.*

Es seien z. B. zwei Schiffe auf der Fläche eines ruhigen Sees in geradliniger und gleichförmiger Bewegung begiffen; PQ ist die

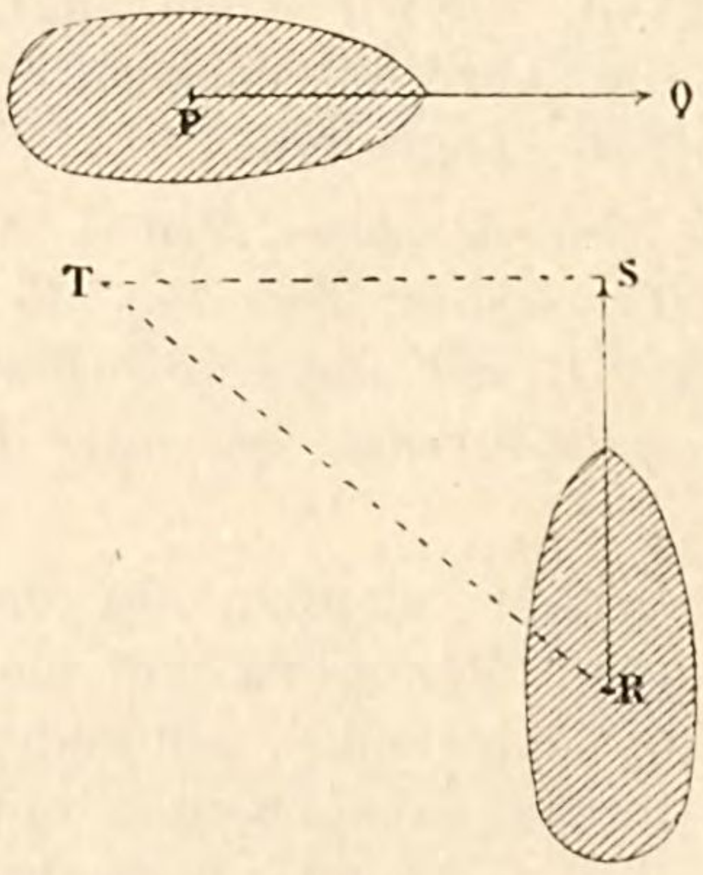


Fig. 25.

Geschwindigkeit des Schiffes P, RS die des Schiffes R. Wir suchen die scheinbare Bewegung von R in Bezug auf P. Das System B

ist hier das unbewegliche Wasser des Sees; das System A ist das Schiff P und der ganze Theil des Raumes, den wir ihm in Gedanken unter Beilegung derselben Bewegung zutheilen. Wir kennen die geradlinige, mit der gleichförmigen Geschwindigkeit RS erfolgende Bewegung des Schiffes R im System B; wir kennen auch im System B die Bewegung des Punktes von System A, in welchem sich gerade der bewegliche Punkt R befindet; es ist dies die Bewegung des Theils des Raumes, welchen wir durch Beilegung der gleichen Geschwindigkeit PQ mit dem Schiff P verbunden haben. Nach der gegebenen Regel haben wir zu RS geometrisch eine Geschwindigkeit ST gleich PQ und von entgegengesetztem Zeichen hinzuzufügen; wir erhalten dann die Geschwindigkeit RT des Schiffes R im System A, dass heisst die scheinbare Geschwindigkeit von R in Bezug auf P; auf P befindliche Personen werden R in der Richtung RT und mit der Geschwindigkeit RT sich verschieben sehen.

27. Zusammensetzung von Beschleunigungen. — Wir wollen jetzt zur Zusammensetzung von Beschleunigungen übergehen.

Es mögen zunächst *zwei geradlinige Bewegungen längs derselben Geraden* erfolgen. Ein Punkt M bewegt sich auf der Geraden $X'X$ zur Zeit t mit einer Geschwindigkeit v_r, bezogen auf die Gerade $X'X$; zur Zeit $t+\Delta t$ sei seine Geschwindigkeit $v_r+\Delta v_r$; andrerseits gleite die Gerade $X'X$ in sich selbst und v_e sei die

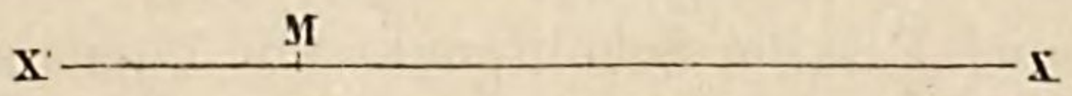


Fig. 26.

Geschwindigkeit dieser Verschiebung zur Zeit t, $v_e+\Delta v_e$ zur Zeit $t+\Delta t$. Nun ist die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung, wie wir wissen, gleich der Summe der Geschwindigkeiten der Componenten; wenn also v die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung zur Zeit t bedeutet,

$$v = v_r + v_e,$$

so ist die Geschwindigkeit zur Zeit $t+\Delta t$

$$v+\Delta v = (v_r+\Delta v_r)+(v_e+\Delta v_e).$$

Man hat also

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_r}{\Delta t} + \frac{\Delta v_e}{\Delta t};$$

und als Grenzwerth

$$\gamma = \gamma_r + \gamma_e$$

wenn γ, γ_r und γ_e die Beschleunigungen der resultirenden Bewegung und die der Componenten bedeuten. *Die Beschleunigung der resultirenden Bewegung ist die algebraische Summe der Beschleunigungen der componirenden Bewegungen.*

Wir wollen jetzt den *allgemeinen Fall* behandeln, in welchem die beiden Bewegungen beliebige sind. Der bewegliche Punkt verschiebt sich in irgend einer Weise in Bezug auf die Achsen A, und diese letzteren mögen eine beliebige Bewegung in Bezug auf die festen Achsen B haben; die Beschleunigung der resultirenden Bewegung ist zu bestimmen.

28. Bewegung eines starren Körpers.[1]) — Wir stellen zunächst den Satz auf, dass jede *Verschiebung eines starren Körpers durch eine translatorische und eine drehende Bewegung hervorgebracht werden kann.* Diese Behauptung ergiebt sich aus den folgenden Lehrsätzen:

1. Jede Verschiebung eines starren Körpers um einen festen Punkt kann durch eine Drehung um eine durch diesen Punkt gehende feste Achse hervorgebracht werden.

Wir denken uns um den festen Punkt O als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben. Zwei auf dieser Kugel gelegene Punkte A und B genügen, um die Lage des Körpers zu bestimmen. Nehmen wir also an, der Bogen AB eines grössten Kreises sei in eine beliebige Lage $A'B'$ gekommen. Ich behaupte, dass man AB in $A'B'$ durch eine Drehung um OP überführen kann; P ist der Schnittpunkt von Bogen grösster Kreise,

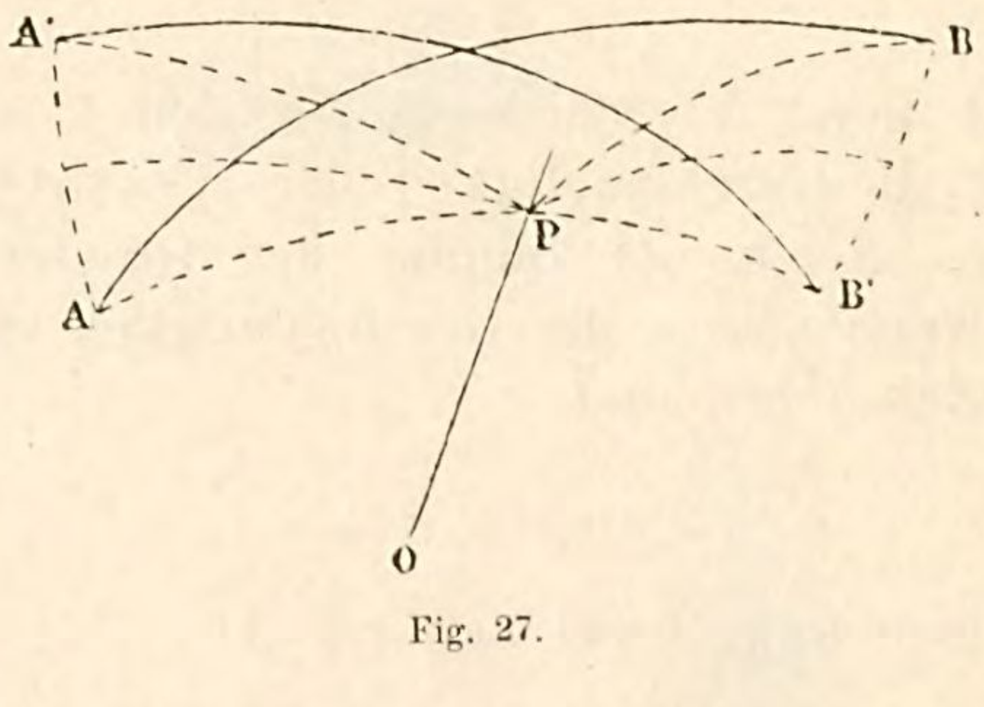


Fig. 27.

welche senkrecht auf den Mitten der Bogen grösster Kreise AA', BB' errichtet sind. Die beiden sphärischen Dreiecke PAB, $PA'B'$ sind nämlich congruent, da ihre drei Seiten paarweise einander gleich sind; folglich sind die Winkel in P einander gleich: APB

[1]) Siehe Briot, Leçons de mécanique; Paris, Dunod, 1861, p. 380.

$= A'PB'$; wenn man den beiden gemeinsamen Theil $A'PB$ abzieht, werden die übrigen Theile APA', BPB' auch noch gleich sein; eine Drehung des Körpers um OP um den Winkel APA' bringt folglich A nach A' und B nach B', das heisst den Körper von seiner ersten in seine zweite Lage.

2. *Lehrsatz von d'Alembert.*[1]) — *Wenn ein starrer Körper sich auf irgend eine Weise um einen festen Punkt bewegt, so sind die Geschwindigkeiten aller Punkte des Körpers in jedem Augenblick dieselben, als wenn der Körper sich zu dieser Zeit um eine gegebene Achse mit bestimmter Winkelgeschwindigkeit drehte.*

Es sei O der feste Punkt, M ein Punkt des Körpers zur Zeit t, M' die Lage des nämlichen Punktes zur Zeit $t + \Delta t$. Wir haben die Behauptung aufgestellt, dass man die Verschiebung des Körpers während dieser Zeit Δt durch eine Drehung um einen bestimmten Winkel Θ erzeugen kann, welche um eine gegebene durch den Punkt O gehende Achse OP_1 erfolgt. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt M einen Kreisbogen MM' in einer zur Achse

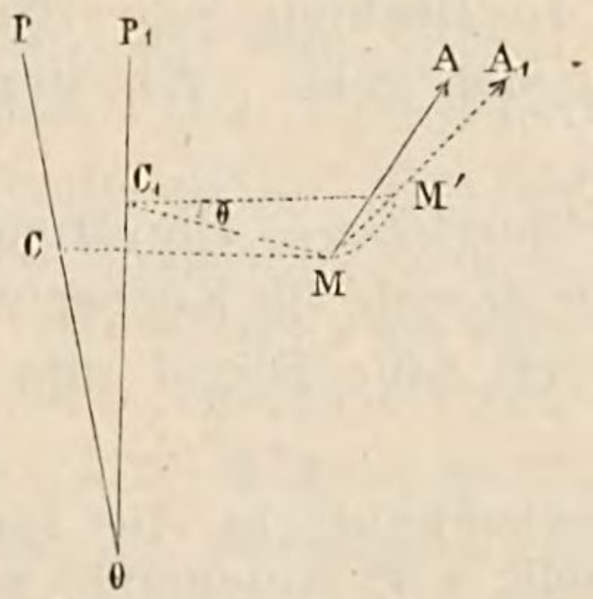


Fig. 28.

OP_1 senkrechten Ebene C_1MM', und die mittlere Geschwindigkeit v_1 des Punktes M ist $\frac{MM'}{\Delta t} = MA_1$. Wenn Δt unendlich abnimmt, strebt OP_1 einer Grenzlage OP zu, *der augenblicklichen Rotationsachse* (Momentanachse) zur Zeit t; die Ebene $M'MC_1$ bleibt senkrecht zur Achse, die Normale MC_1 auf OP_1 wird zur Normalen MC auf OP, während gleichzeitig die Secante MA_1 zu der auf MC senkrechten Tangente MA wird. Die Geschwindigkeit MA ist also senkrecht zur Ebene POM, welche durch die Achse OP und den Punkt M gelegt ist. Man hat nun

$$v_1 = \frac{MM'}{\Delta t} = \frac{MM'}{\text{arc } MM'} \times \frac{\Theta}{\Delta t} \times C_1M,$$

---

[1]) D'Alembert, Recherches sur la précession des équinoxes; Paris 1749.

da der Bogen MM' gleich dem Drehungswinkel Θ mal dem Radius $C_1 M$ ist. Der Grenzwerth des ersten Ausdrucks $\frac{MM'}{\text{arc } MM'}$ ist gleich 1, $\frac{\Theta}{\Delta t}$ hat die Winkelgeschwindigkeit ω zur Zeit t zur Grenze, und $C_1 M$ wird zu CM. Es ist also

$$v = \omega \times C\,M.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes M ist folglich dieselbe, als wenn der Körper sich um die Momentanachse OP mit einer Winkelgeschwindigkeit ω drehte, welche von der Lage des betrachteten Punktes unabhängig ist.

Geometrisch lässt sich eine Drehung durch eine der Winkelgeschwindigkeit ω gleiche Länge darstellen, welche man auf der Achse in einer solchen Richtung aufträgt, dass ein in dieser Richtung stehender Beobachter die Drehung von links nach rechts erfolgen sieht, so wie z. B. die scheinbare Bewegung der Sonne, die Uhrzeigerbewegung, und die Drehung einer (rechtsgängigen) Schraube beim Einschrauben vor sich geht. Wir nennen diesen Drehungsinn *direct* oder *positiv*.[1])

3. *Lehrsatz von Poinsot.*[2]) — Die Momentanachse ändert fortwährend ihre Richtung sowohl im Körper wie im Raume.[3]) Um den Punkt O beschreiben wir eine Kugel und es seien P_1, Q_1, R_1 ...

---

[1]) Nach dieser Übereinkunft ist die Linie, welche die tägliche Drehung der Erde darstellt, vom Mittelpunkt nach dem Südpol gerichtet. Wenn man nun auf der Erdachse die Längen als positiv nimmt, welche vom Mittelpunkt nach dem Nordpol gerichtet sind, so muss die Winkelgeschwindigkeit ω negativ gezählt werden. Wir haben also

$$\omega = -\frac{2\pi}{86164} = -\,0{,}000073.$$

Die Dauer einer Umdrehung der Erde oder ein Sterntag beträgt nämlich 86164 Secunden mittlerer Sonnenzeit. Es ist zu beachten, dass unser positiver Drehungssinn mit dem retrograden der Astronomen übereinstimmt; der directe Sinn ist für sie die Richtung der wirklich stattfindenden Bewegungen.

[2]) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps; Paris 1834.

[3]) Wenn die Achse im Körper eine feste Lage hat, so ist sie auch nothwendigerweise fest im Raume. Sieht man also einen Körper sich um eine Achse drehen, welche im Körper fest zu liegen scheint, aber im Raume ihre Richtung ändert, so kann man mit Sicherheit behaupten, dass diese Achse nicht die Momentanachse ist, um welche die Drehung wirklich erfolgt; denn die Momentanachse kann unmöglich im Körper fest und im Raume beweglich sein.

die den Zeiten t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t\ldots$ entsprechenden Punkte, in welchen die zeitlich aufeinander folgenden Drehungsachsen des

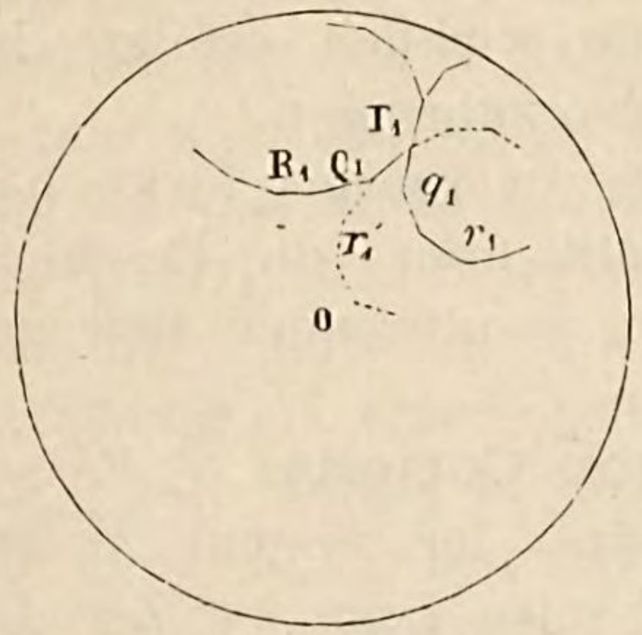


Fig. 29.

Körpers, im Raume betrachtet, die Oberfläche der Kugel durchdringen; ferner seien P_1, q_1, $r_1,\ldots$ die Punkte, in welchen dieselben Achsen in Bezug auf den Körper die Oberfläche der Kugel zur Zeit t gleichzeitig durchsetzen. Zur Zeit $t+\Delta t$ hat sich der Körper um die Achse $O P_1$ um den Winkel $q_1 P_1 Q_1$ gedreht, das Polygon $P_1 q_1 r_1$ ist nach $P_1 Q_1 r'_1$ gekommen und wir können uns die Aufeinanderfolge der Lagen des Körpers darstellen durch Drehen der beweglichen Pyramide $O P_1 q_1 r_1\ldots$ auf der festen Pyramide $O P_1 Q_1 R_1\ldots$ Wenn Δt sich der Grenze Null unendlich nähert, so werden aus den beiden Polygonen zwei Curven und aus den beiden Pyramiden zwei Kegel, welche sich in jedem Augenblick längs einer Geraden $O P$ berühren; *man kann sich folglich die Bewegung eines starren, um einen festen Punkt kreiselnden Körpers durch die ohne Gleiten erfolgende Drehung des beweglichen Kegels auf dem festen hervorgebracht denken;* „dies ist die wirkliche Lösung des Problems, weil man sich mit Hülfe derselben von der Bewegung eines Körpers ein ebenso klares Bild machen kann, wie von der Bewegung eines Punktes.“

Betrachten wir nun zwei aufeinander folgende Lagen eines starren Körpers, der im Raum frei beweglich ist; ein Punkt des Körpers O in der ersten Lage wird in der neuen Lage nach O' gekommen sein: $O O'$ ist die Verschiebung dieses Punktes. Wir geben dem ganzen Körper eine seitliche Verschiebung, die gleich und parallel zu $O O'$ ist; O wird nach O' kommen, und um den Körper in seine zweite Lage zu bringen, wird man ihn nur noch um den als fest betrachteten Punkt O' bewegen müssen. Diese zweite Bewegung kann durch Drehung um eine bestimmte durch den Punkt O' gehende Achse $O' P$ hervorgebracht werden. Jede Verschiebung eines freien starren Köpers lässt sich also durch eine

translatorische Bewegung ersetzen, welche der Verschiebung eines seiner Punkte gleich ist, und eine Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Achse; es giebt offenbar eine unendlich grosse Zahl von Möglichkeiten, die wirklich erfolgte Bewegung in der beschriebenen Weise hervorzubringen.[1])

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, wollen wir zu unserer Aufgabe zurückkehren, die Beschleunigung der aus zwei beliebigen Bewegungen resultirenden Bewegung zu berechnen.

29. Lehrsatz von Coriolis. — Es sei S die relative Bahn des beweglichen Punktes im System A und M die Lage des Punktes zur Zeit t, P seine Lage zur Zeit $t + \Delta t$; ist v_r seine relative Geschwindigkeit im System A, und nehmen wir $MA = v_r \Delta t$, so ist die Deviation der ersten Bewegung AP.

Es werde ferner im System B die Bahn desjenigen Punktes des

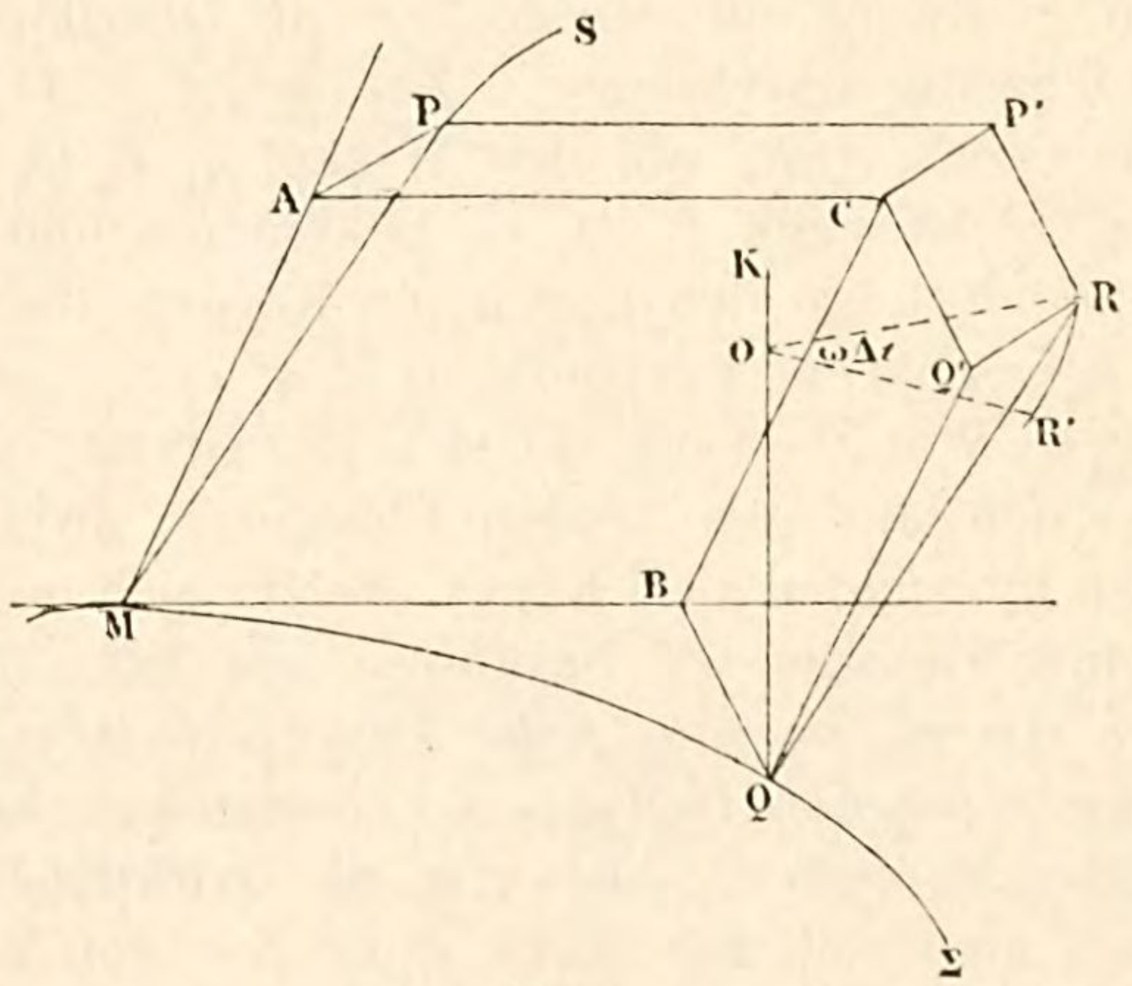


Fig. 30.

Systems A, welcher sich zur Zeit t in M befindet, mit Σ bezeichnet, und BQ sei die Deviation dieser zweiten Bewegung.

Wenn die beiden Bewegungen geradlinig und gleichförmig wären, so würde der bewegliche Punkt zur Zeit $t + \Delta t$ in C sein,

---

[1]) Es ist stets möglich, die Bewegung in einer besonders einfachen Weise auszuführen, nämlich so, dass die Verschiebung parallel zur Drehungsachse erfolgt. Die Bewegung des Körpers ist dann der einer Schraube analog, die sich in der Schraubenmutter verschiebt. (Guilio Mozzi, Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi; Napoli 1763). Die Gerade, welche dann einfach in sich selbst gleitet, heisst die *Centralachse.*

dem Endpunkt der Diagonale des über MA und MB construirten Parallelogramms. In Wirklichkeit befindet er sich jedoch nicht in diesem Punkt. Wir ziehen CP' gleich und parallel zu AP, CQ' gleich und parallel zu BQ und vollenden das Parallelogramm $P'CQ'R$; R würde die gesuchte Lage sein, wenn das System A keine Drehung erfahren hätte. Da aber nicht vorausgesetzt wurde, dass die Bewegung des Systems A im System B ausschliesslich eine Verschiebung sein soll, so müssen wir annehmen, dass abgesehen von der Verschiebung noch eine Drehung um eine durch den Punkt Q gehende Achse QK stattgefunden hat. Wenn ω die Momentangeschwindigkeit der Drehung um diese Achse zur Zeit t ist, so beträgt die Drehung $\omega \Delta t$, und der Punkt R kommt nach R'.[1]) Die Deviation der resultirenden Bewegung wird also durch geometrische Addition der drei Grössen CP', $P'R$, RR' erhalten, und die Beschleunigung der resultirenden Bewegung findet man durch Zusammensetzen der Grenzwerthe für die Ausdrücke (vgl. **24**)

$$\frac{2\,CP'}{\Delta t^2}, \quad \frac{2\,P'R}{\Delta t^2}, \quad \frac{2\,RR'}{\Delta t^2}.$$

Die Grenzwerthe der beiden ersten Ausdrücke sind die Beschleunigungen γ_r und γ_e der relativen Bewegung und der Verschiebungsbewegung des Punktes M; diese letztere ist bezogen auf das System B die Bewegung desjenigen Punktes, mit welchem zur Zeit t der bewegliche Punkt zusammenfällt. Der Grenzwerth des dritten Ausdrucks lässt sich leicht ermitteln, wenn man beachtet, dass

$$\begin{aligned} RR' &= OR \times \omega \Delta t, \\ &= OR \sin KQR \times \omega \Delta t; \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{2\,RR'}{\Delta t^2} = \frac{2\,QR \sin KQR}{\Delta t}\,\omega.$$

Da aber OR oder $QR \sin KQR$ eine Grösse der ersten Ordnung ist, so kann man bei der Bestimmung ihres Grenzwerthes die Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen. Man kann also im Product $QR \sin KQR$ die Grösse QR durch $QQ' = BC = MA = v_r \Delta t$

---

[1]) Bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten konnte diese Verschiebung RR', ebenso wie die Deviationen AP und BQ als Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt werden, denn die Grössen, um die es sich handelte, waren von der ersten Ordnung. Man konnte so *in allen Fällen* für die bei der resultirenden Bewegung erfolgte Verschiebung $V \Delta t$ die Grösse MC setzen.

ersetzen, denn die Differenz dieser beiden Strecken ist kleiner als die Strecke $Q'R$, welche gleich der Deviation AP und somit eine Grösse der zweiten Ordnung ist. Der Winkel KQR ist im Allgemeinen endlich und der Winkel RQQ' unendlich klein; wir dürfen somit den Winkel KQR durch KQQ' ersetzen, das heisst, durch den Winkel (ω, v_r) der beiden Richtungen QK (ω) und QQ' oder MA (v_r). Als Grenzwerth des dritten Ausdrucks ergiebt sich somit

$$2\omega v_r \sin(\omega, v_r).$$

Diese *zusammengesetzte centrifugale Beschleunigung* γ_c ist gleich dem doppelten Flächeninhalt desjenigen Parallelogramms, welches aus der Winkelgeschwindigkeit der Drehung und der relativen Geschwindigkeit construirt ist. Aus dem Vorhergehenden folgt ferner, dass dieselbe auf der Ebene dieses Parallelogramms senkrecht steht und im Sinne der Rotation des Systems gerichtet ist; mit andern Worten, *ihre Richtung ist eine solche, dass sich die Drehungsachse auf der linken und die relative Geschwindigkeit auf der rechten Seite* eines

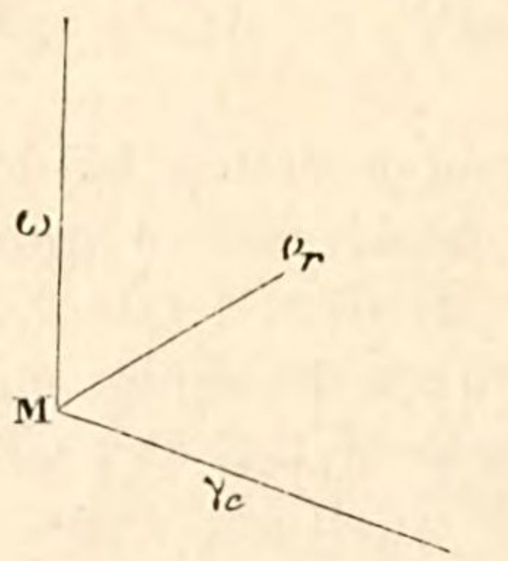


Fig. 31.

Beobachters befindet, der mit den Füssen in M und dem Kopf in γ_c den Winkel (ω, v_r) betrachtet;[1]) diese Regel ist leicht zu behalten.

Wir erhalten also die Beschleunigung γ der resultirenden Bewegung, wenn wir geometrisch zusammensetzen:

1) die relative Beschleunigung γ_r;
2) die Beschleunigung der Verschiebung γ_e;
3) die zusammengesetzte centrifugale Beschleunigung γ_c:

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_r} + \overline{\gamma_e} + \overline{\gamma_c},$$

worin $\overline{\gamma}$, $\overline{\gamma_r}$, $\overline{\gamma_e}$, $\overline{\gamma_c}$ geometrische Grössen sind und das Zeichen $+$ eine geometrische Addition bedeutet. Dies ist der bekannte *Satz von*

[1]) Es ist zu beachten, dass $\omega\, v_r \sin(\omega, v_r)$ nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit des Endpunktes von v_r darstellt.

Coriolis.[1]) Newton hatte die Beschleunigung in dem Fall bestimmt, wo die beweglichen Achsen eine einfache Verschiebung erfahren, Clairaut für den Fall einer beliebigen ebenen Bewegung; Coriolis gab zuerst die Lösung des allgemeinen Falls.

30. Zusammensetzung von Drehungen. — Es ist nicht ganz einfach sich die Bewegung eines Körpers vorzustellen, der sich beliebig im Raume bewegt; leicht kann man sich dagegen eine Verschiebung oder eine Drehung um eine Achse denken.

Wir haben gesehen (**28**), wie jede Bewegung eines starren Körpers auf diese beiden einfachen Bewegungen zurückgeführt werden kann.

Wir wollen diesen Abschnitt durch das Studium der Zusammensetzung von Drehungen vervollständigen.

Es sei zuerst eine Drehung ω mit einer zur Drehungsachse OZ senkrechten Verschiebung v zusammenzusetzen. Wir betrachten einen Punkt M auf der Geraden OM; dieselbe soll auf derjenigen Ebene ZOA

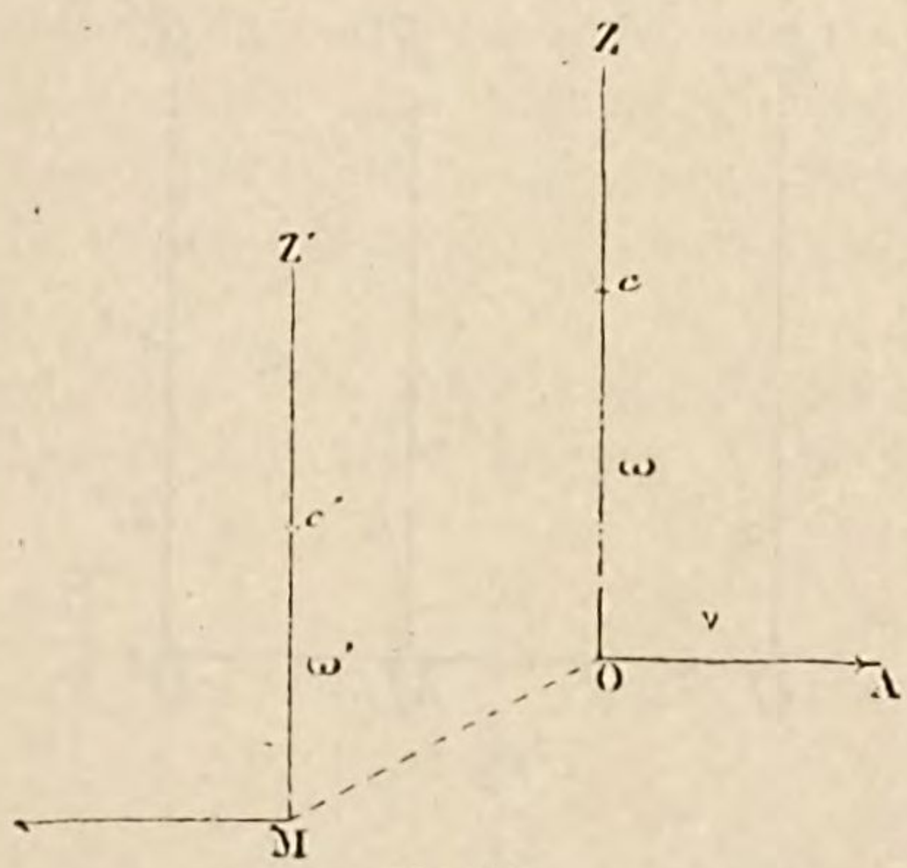


Fig. 32.

senkrecht stehen, welche die Drehung $Oc = \omega$ und die Geschwindigkeit $OA = v$ enthält. Die Drehungsgeschwindigkeit des Punktes M ist $\omega \times OM$, und ihre Richtung ist nach unserer fundamentalen Übereinkunft die in der Figur angegebene. Wenn wir nun

$$\omega \times OM = v$$

wählen, so wird die Geschwindigkeit des Punktes M Null sein. MZ' wird eine Gerade darstellen, deren Punkte im betrachteten

---

[1]) Coriolis, Journal de l'École Polytechnique, XXIVe cahier, 142; 1835.

Augenblick sämmtlich in Ruhe sind, es wird die Momentanachse der Rotation sein. Die Winkelgeschwindigkeit ω' um diese Achse ist genau gleich ω; denn da der Punkt O nur die Verschiebungsgeschwindigkeit v haben darf, so muss ihm die Drehung ω' eine solche Geschwindigkeit geben, dass

$$\omega' \times MO = v$$

ist, das heisst, ω' ist gleich ω.

Die beiden Bewegungen sind also durch eine einzige Drehung ω um OZ' ersetzt.

Wenn die Verschiebung, anstatt zu OZ senkrecht zu sein, eine beliebige ist, kann man sie in eine senkrecht zur Achse gerichtete und in eine ihr parallele Verschiebung zerlegen. Aus der Zusammensetzung der ersteren mit der Drehung wird eine Rotation resultiren, welche in Verbindung mit der zur Achse parallelen Verschiebung eine Schraubenbewegung liefert.

Es seien jetzt *zwei Drehungen* von gleichem Sinn, ω und ω', *um*

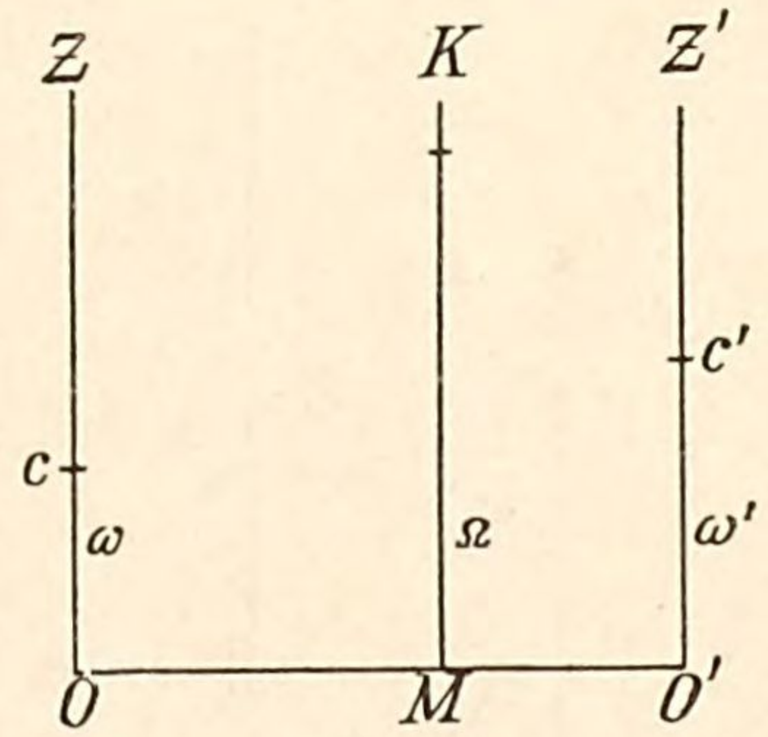


Fig. 33.

zwei parallele Achsen OZ und $O'Z'$ zusammenzusetzen. Eine zu den zwei Achsen senkrechte Ebene wird durch die beiden gleichzeitigen Bewegungen eine Drehung in sich selbst erfahren. Es giebt also in der Ebene einen Punkt, dessen Geschwindigkeit Null ist und folglich in dem Körper eine zur Ebene senkrechte feste Achse; wir wollen die Lage dieser augenblicklichen Drehungsachse ermitteln. Wenn der Punkt M auf der Geraden OO' die Beziehung

$$\omega \times OM = \omega' \times O'M$$

oder

$$\frac{OM}{\omega'} = \frac{O'M}{\omega}$$

befriedigt,

so ist MK die gesuchte Momentanachse, das heisst, eine einzige Drehung Ω um MK bewirkt die aus den beiden gegebenen Drehungen resultirende Geschwindigkeit. Die Grösse von Ω finden wir, wenn wir die Geschwindigkeit $\Omega \times MO'$, welche die Drehung Ω dem Punkt O' verleiht, der Geschwindigkeit $\omega \times OO'$, welche derselbe der Voraussetzung nach allein hat, gleichsetzen:

$$\Omega = \frac{\omega \times O\,O'}{M\,O'}.$$

Durch Addition von 1 zu den beiden gleichen Ausdrücken

$$\frac{\omega}{O'M} = \frac{\omega'}{O\,M}$$

erhält man

$$\omega + \omega' = \frac{\omega \times O\,O'}{O'\,M},$$

folglich

$$\Omega = \omega + \omega'.$$

Zwei in demselben Sinn erfolgende Drehungen um zwei parallele Achsen können also durch eine einzige gleichgerichtete Drehung um eine zu den beiden parallele Achse ersetzt werden; ihre Winkelgeschwindigkeit ist gleich der Summe der Winkelgeschwindigkeiten beider Drehungen.

Beide Drehungen sollen jetzt entgegengesetzten Sinn haben und von ungleicher Grösse sein: $\omega > \omega'$.

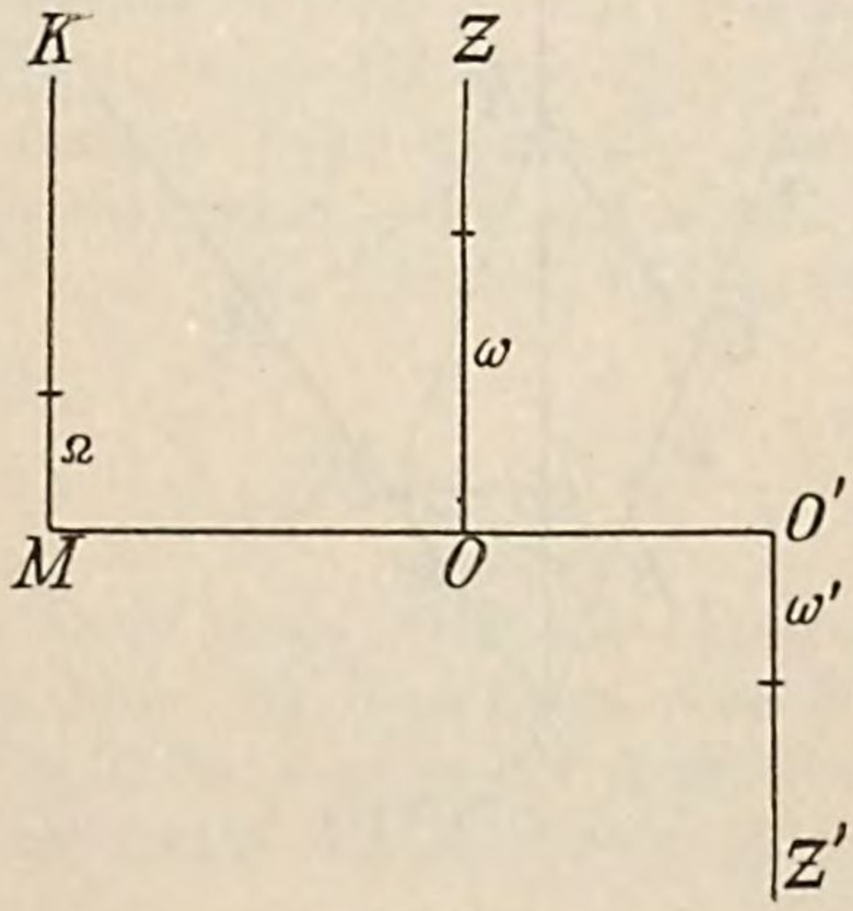


Fig. 34.

Die Lage der Momentanachse würde noch definirt sein durch die Gleichung

$$\omega \times O\,M = \omega' \times O'M,$$

und die resultirende Geschwindigkeit Ω würde gleich der Differenz der componirenden Geschwindigkeiten sein

$$\Omega = \omega - \omega'.$$

Wenn die beiden Drehungen entgegengesetzten Sinn haben, aber an Grösse gleich sind, so ergiebt die eben angestellte Betrachtung keine Lösung: man hat dann ein *Drehungspaar*, nach einem der Theorie der Kräfte entlehnten Ausdruck.

Es ist ohne Weiteres klar, dass ein *Drehungspaar einer translatorischen Verschiebung mit der Geschwindigkeit* $\omega \times OO'$ *gleichwerthig ist.*

Wir betrachten endlich den Fall *von zwei Drehungen um zwei beliebige* durch einen Punkt gehende *Achsen.*

Ein Körper drehe sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um OZ', während die Ebene $Z'OZ$ um OZ rotirt. Die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung eines beliebigen Punktes ergiebt sich durch Zusammensetzung von zwei Geschwindigkeiten. Nun bleibt der Punkt O fest; man kann daher die resultirende Geschwindigkeit jedes Punktes des Körpers dadurch erzeugen, dass man ihn um eine durch O gehende Achse sich drehen lässt. Tragen wir auf den Achsen OZ und OZ' die Längen OC und OC' ab, welche ein Maass für ω und ω' bilden, und construiren wir das Parallelogramm

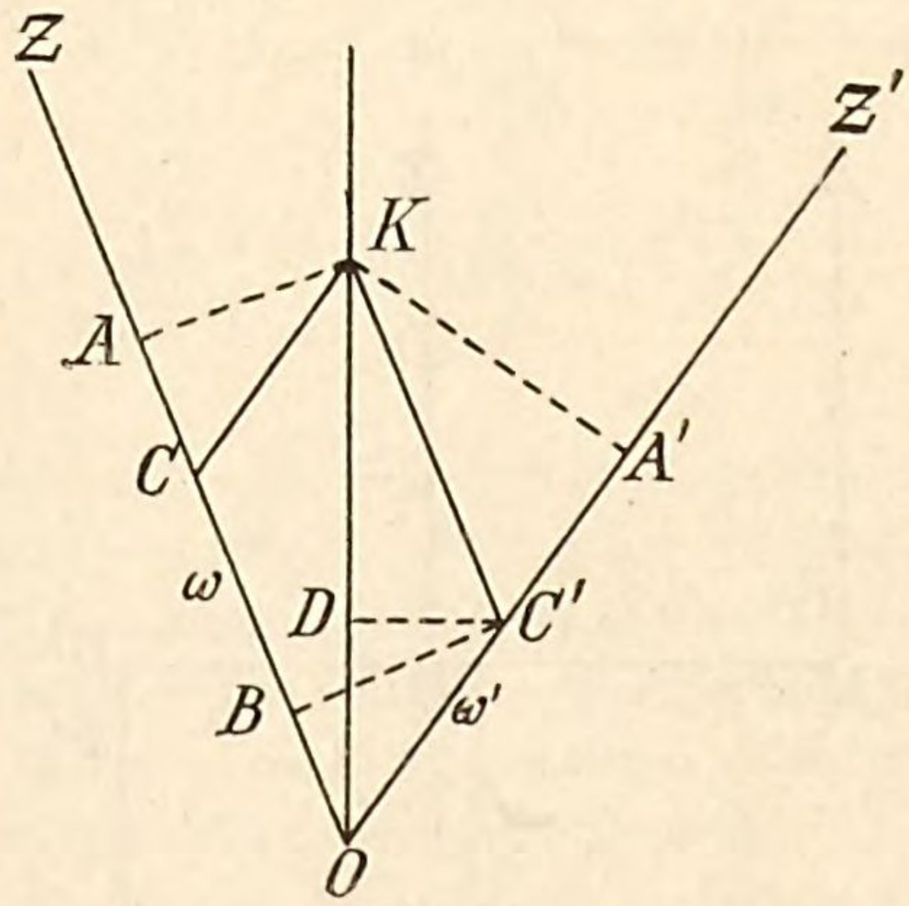


Fig. 35.

$OCC'K$, so ist die Diagnale OK die Achse der resultirenden Drehung. Die Geschwindigkeiten des Punktes K: $\omega \times KA$, $\omega' \times KA'$ sind nämlich (wegen der Congruenz der Dreiecke KCO, $KC'O$) einander gleich und von entgegengesetzter Richtung; der Punkt K bleibt

folglich in Ruhe. Die resultirende Drehungsgeschwindigkeit ist durch die Gleichung

$$\omega \times C'B = \Omega \times C'D$$

gegeben. Die Congruenz der beiden Dreiecke KCO und $KC'O$ ergiebt aber

$$OC \times C'B = OK \times C'D.$$

Also verhält sich

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{OK}{OC},$$

das heisst OK ist die Grösse der resultirenden Drehung. Es ist übrigens leicht einzusehen, dass der Sinn dieser Drehung derselbe ist, wie derjenige der beiden ursprünglichen. Die Diagonale OK stellt also nach Grösse und Richtung vollständig die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Drehung dar. Die Regel vom Parallelogramm der Drehungen, welche wir Lagrange[1]) verdanken, ist somit bewiesen.

Wenn sich die beiden Achsen nicht schneiden, so kann man durch einen beliebigen Punkt der einen eine Parallele zur anderen ziehen und sich vorstellen, dass an dieser Parallelen zwei gleiche und entgegengesetzte Rotationen wirken; man wird so die beiden Drehungen mit Leichtigkeit auf eine Drehung und eine (durch ein Drehungspaar dargestellte) Verschiebung zurückführen.

Hat man *eine beliebige Zahl von Drehungen um beliebige Achsen*, so kann man durch einen beliebigen Punkt O des Körpers Parallelen zu den verschiedenen Drehungsachsen ziehen und alle diese Rotationen auf eine einzige Drehung um eine durch diesen Punkt O gehende Achse und eine seitliche Verschiebung zurückführen; diese Zusammensetzung lässt sich offenbar auf unendlich viele Arten bewerkstelligen.[2])

II. Statik.

31. Kraft. — Man nennt *Kraft* alles das, was fähig ist, den Zustand der Ruhe oder der Bewegung eines Körpers zu ändern.

Der Begriff der Kraft ist einer der einfachsten und sichersten; denn er kommt uns durch die Erfahrung jeden Augenblick zum

---

[1]) Lagrange, Mécanique analytique; Paris 1788.

[2]) Unter diesen Arten liefert eine wieder die Schraubenbewegung; wir werden hier also von Neuem auf die *Centralachse* und gleichzeitig auf ein einfaches Mittel zu ihrer Bestimmung geführt.

Bewusstsein. Wir können einen Körper nicht von seinem Platz bewegen, ihn nicht deformiren, ihn nicht zerbrechen, ohne uns der Anstrengung, welche wir leisten, bewusst zu werden. Wir sehen auch sofort ein, dass bei jeder Kraft drei Dinge zu unterscheiden sind: der Angriffspunkt, die Richtung, und die Grösse; diese Begriffe sind so einfach, dass eine Definition derselben nicht nothwendig erscheint.

Wirken mehrere Kräfte gleichzeitig auf einen ruhenden Körper und stören sie seine Ruhe nicht, so halten sie sich, wie man sagt, *das Gleichgewicht.* Die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte ist *die Statik* (*στατικὴ*), wie die Kinematik ein rein mathematischer Theil der Mechanik. Zum Begriff des Raumes, der einzigen Grundlage der Geometrie, kommt noch die Vorstellung Kraft hinzu. Wenn wir diesen Begriff einmal eingeführt haben, ist die Methode der Statik eine geometrische. Es ist also angebracht, das Studium der Statik dem Studium der Dynamik vorausgehen zu lassen, wie auch die Begründung der Statik durch Archimedes um achtzehn Jahrhunderte früher erfolgte, ehe Galilei die Fundamente der Dynamik legte.[1])

32. Messung der Kräfte: Dynamometer. — Kräfte sind einander gleich, wenn sie, an demselben Punkt in entgegengesetztem Sinne wirkend, sich das Gleichgewicht halten. Eine Kraft ist doppelt so gross als eine andere, wenn sie zwei der letzteren gleichen Kräften, die den nämlichen Punkt in derselben Richtung zu bewegen suchen, das Gleichgewicht hält. Eine Kraft ist die dreifache einer andern, wenn sie ebenso drei gleichen Kräften das Gleichgewicht hält und so fort. Die Intensitäten von Kräften können folglich als Function einer beliebigen als Einheit gewählten Kraft ausgedrückt, also gemessen werden.

Hat man den numerischen Werth einer Kraft bestimmt, so wird man sie durch eine dieser Grösse proportionale Länge darstellen können, welche in der Richtung der Kraft von ihrem Angriffspunkt aufgetragen wird: wir haben somit eine Kraft geometrisch dargestellt.

Die gewöhnlich in der Mechanik angenommene Einheit ist das Kilogramm, das heisst die Kraft, mit welcher die Schwere auf ein Liter Wasser von 4^0 C wirkt.

Zur Vergleichung von Kräften mit der Einheit der Kraft werden Dynamometer (*δύναμις* Kraft, *μέτρον* Maass) benutzt.

---

[1]) Vgl. Duhamel, Cours de mécanique; Paris, 1853: Vorrede und Statik.

Diese Apparate bestehen im Wesentlichen alle aus einer Feder, deren Deformation sich messen lässt; eine beliebige an dem Instrument wirkende Kraft, welche dieselbe Deformation wie ein Gewicht von n Kilogramm hervorbringt, beträgt n Kilogramm. Das Instrument wird also vor dem Gebrauch mit bekannten Gewichten geaicht.

Das einfachste Dynamometer ist die in Fig. 36 abgebildete Schnellwaage des Handels; sie besteht aus einer V-förmig gebogenen Feder; mit jedem Arm ist ein senkrecht an ihm befestigter Kreisbogen verbunden, welcher durch einen Schlitz des anderen Armes hindurchgeht. An dem freien Ende des einen Kreisbogens kann man ein Gewicht oder eine beliebige andere Kraft wirken lassen. Der zweite Bogen endigt in einem Ringe, an welchem man das Instrument halten oder aufhängen kann. Dieser zweite Bogen trägt eine Theilung von seinem freien Ende an bis zu einem Ansatzstück, welches dazu dient, eine Beschädigung des Instruments zu verhüten, wenn zufällig eine die Elasticitätsgrenze übersteigende Kraft auf die Feder wirken würde.

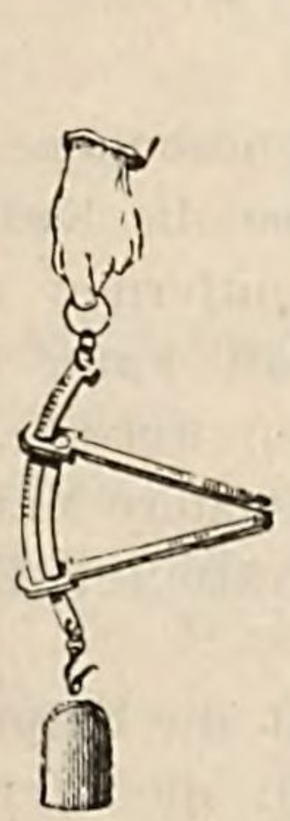


Fig. 36.

Fig. 37.

Bei anderen Schnellwaagen (Fig. 37) ist die Feder in Form einer Spirale im Inneren einer beiderseits geschlossenen Röhre angebracht; die Feder lehnt sich einerseits gegen die obere Verschluss platte und andererseits gegen einen beweglichen Stempel, dessen Schaft mit einer durch Versuche ermittelten Theilung versehen ist und in einem zum Befestigen des Apparates bestimmten Ringe endigt. Die Kraft wirkt an einem in der unteren Verschlussplatte angebrachten Haken und zieht die obere Platte nach dem Stempel hin; je stärker die Kraft ist, um so länger muss das Stück des Schaftes sein, welches sichtbar wird. Ihre Intensität liest man sofort an der Theilung ab.

Das für stärkere Kräfte bestimmte *Dynamometer von Régnier* ist im Wesentlichen eine aus zwei Theilen zusammengesetzte Feder, deren Enden mit einander verbunden sind. Man befestigt die Mitte des einen Theils und lässt an der Mitte des anderen die zu messende Kraft als Druck wirken, indem man dafür sorgt, dass die Verbindungslinie der beiden Mitten in die Richtung der Kraft fällt. Die beiden Theile nähern sich und setzen eine vor einem Quadranten spielende Nadel in Bewegung. Der

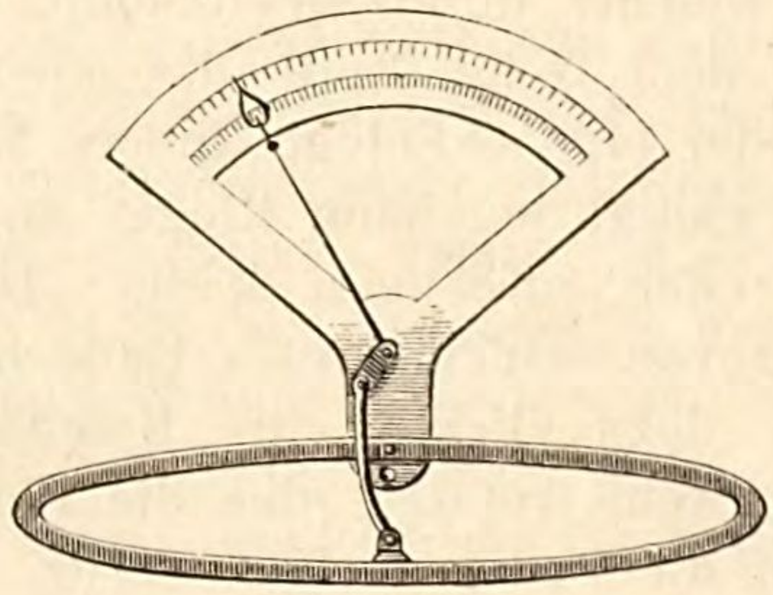


Fig. 38.

Apparat lässt sich noch in anderer Weise gebrauchen: Man befestigt das eine Ende der beiden Theile und lässt die Kraft am anderen als Zug angreifen; die beiden Enden entfernen sich, und das System plattet sich wieder ab. Die Kraft kann an einem dem ersten concentrischen Kreisbogen gemessen werden, vor welchem ein zweiter Punkt der Nadel spielt. Die letztere Methode wird angewandt, wenn man es mit stärkeren Kräften z. B. der Muskelkraft eines Pferdes zu thun hat.

Bei allen diesen Vorrichtungen nimmt die Empfindlichkeit bei einigermaassen beträchtlichen Kräften ab; die Verschiebung des Zeigers ist für einen gleichen Zuwachs der Kraft um so geringer, je grösser die schon vorhandene Deformation der Feder ist.

Dieser Übelstand ist bei dem *Dynamometer von Poncelet* vermieden; dasselbe besteht einfach aus zwei gleichen und parallelen Stahlstäben, welche mit den Enden an einander gefügt sind. Man befestigt die Mitte des einen und lässt die Kraft an der Mitte des anderen wirken; die Verschiebung wird direct an einem mit dem ersten Stab fest verbundenen Maassstab abgelesen, vor welchem sich der an dem anderen Stab befestigte Index bewegt. Sind die Kräfte beträchtlich, so giebt man den Stäben nach dem Vorschlag von *Morin* parabolische Gestalt; bei dieser Form ist die Zerreissfestigkeit der Stäbe für die ganze Länge überall dieselbe; ferner ist die Durchbiegung für denselben Auf-

wand an Kraft die doppelte, die Empfindlichkeit des Instruments also grösser. Morin hat gefunden, dass die Proportionalität

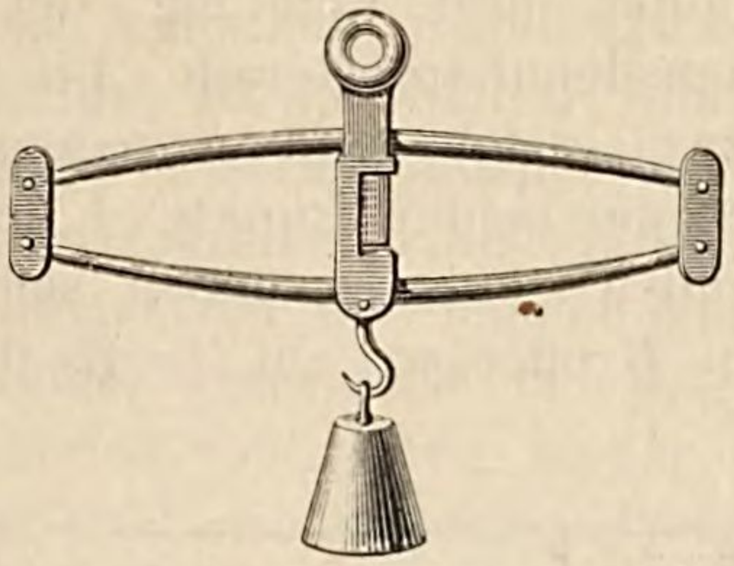


Fig. 39.

zwischen der wirkenden Kraft und der erzeugten Biegung bestehen blieb, bis die letztere ein Zehntel von der Länge der Stäbe betrug.

In vielen Fällen ist es von Interesse, die Deformationen einer Dynamometerfeder zu registriren; man braucht dann nur mit der Feder einen Schreibstift zu verbinden, welcher einen sich gleichförmig abrollenden Papierstreifen berührt. Ein zweiter auf einer Leitstange sitzender Schreibstift zeichnet auf dem Papier eine Gerade auf, welche der Kraft Null entspricht. Die Ordinate der vom beweglichen Stift gezeichneten Curve giebt in jedem Augenblick den Aufwand an Kraft.[1])

33. Zusammensetzung von Kräften, die an einem Punkte angreifen. — Wenn mehrere Kräfte an demselben Punkte angreifen und sich nicht das Gleichgewicht halten, so existirt immer eine einzige Kraft oder *Resultante,* welche dieselben ersetzen kann. Durch die Wirkung der vorhandenen Kräfte sucht sich nämlich der Punkt in einer bestimmten Richtung zu bewegen; es ist klar, dass eine in dieser Richtung im entgegengesetzten Sinn angebrachte Kraft von passender Stärke den Punkt im Gleichgewicht halten würde. Es sei $-P$ diese Kraft. Wir können offenbar an dem betrachteten Punkt zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $-P$ und P angreifen lassen, ohne an der Wirkung der ursprünglichen Kräfte etwas zu ändern. Nun hebt nach der Voraussetzung $-P$ die Gesammtwirkung der ursprünglichen Kräfte auf; es bleibt also nur noch die Kraft P übrig. Bei gegebenen Kräften oder *Componenten* ist also die Ermittlung dieser Resultanten P ein Gleichgewichtsproblem.

Die Behandlung dieses Problems beruht auf folgendem Satz: *Man kann eine Kraft in jedem anderen Punkt ihrer Richtung angreifen*

[1]) Morin, Notice sur divers appareils dynamométriques; Paris, 1841.

lassen, vorausgesetzt, dass dieser neue Angriffspunkt mit dem ursprünglichen unveränderlich verbunden ist. Es sei F die gegebene in A angreifende Kraft und B ein Punkt ihrer Richtung, der mit A durch eine unbiegsame und unausdehnbare Gerade AB verbunden sein soll. In B bringen wir zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $-F$ und F an. Da aber die beiden Punkte A und B unveränderlich mit einander verbunden sind, so heben sich die beiden Kräfte F in A und $-F$ in B offenbar auf.[1]) Es bleibt nur noch die

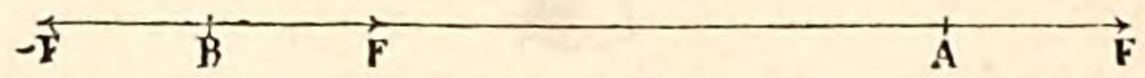


Fig. 40.

in B wirkende Kraft F übrig, welche nichts Anderes als die gegebene Kraft ist, deren Angriffspunkt von A nach B verlegt wurde. Man könnte leicht zeigen, dass in einem freien System keine andere Art der Verlegung einer Kraft erlaubt ist.

Auch der reciproke Satz lässt sich ohne Mühe beweisen: *Wenn eine auf einen freien beweglichen Punkt A wirkende Kraft F nach einem mit demselben verbundenen Punkt B verlegt werden darf, so liegt dieser zweite Punkt in der Richtung der Kraft.*

Dies vorausgeschickt, wollen wir zwei an demselben Punkt angreifende Kräfte betrachten. Wir wissen, dass in diesem Fall immer eine Resultante, und wir können hinzufügen, eine einzige vorhanden ist. Ganz allgemein nämlich *kann ein beliebiges System von Kräften nicht zwei verschiedene Resultanten R und R′ haben.* Denn ist R' die Resultante des Systems, so hebt $-R'$ die Wirkung der gegebenen Kräfte auf; $-R'$ würde nach der Voraussetzung auch der Kraft R, welche die gegebenen Componenten ersetzt, das Gleichgewicht halten und muss folglich der Kraft R entgegengesetzt gleich sein. R' fällt also mit R zusammen, und die obige Behauptung ist somit bewiesen.

Zuerst wollen wir die Richtung der Resultanten bestimmen; offenbar muss dieselbe in der Ebene der beiden Kräfte und im Innern des durch ihre Richtungen gebildeten Winkels liegen.[2]) Wenn beide

---

[1]) Wir sehen als selbstverständlich an, dass zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche an zwei Punkten, die durch eine Gerade von unveränderlicher Länge verbunden sind, und in der Richtung dieser Geraden wirken, sich das Gleichgewicht halten.

[2]) Dies folgt ohne Weiteres aus dem Princip der Zusammensetzung von Bewegungen; der folgende Beweis vom Parallelogramm der Kräfte (im Wesentlichen nach D. Bernoulli, Commentaires de l'Académie de Pétersbourg I; 1726) kann somit nicht vollständig den Begriff der Bewegung entbehren. „Es wäre auch sehr merkwürdig, wenn man die

Kräfte gleich sind, so fällt die Richtung der Resultanten offenbar mit der Halbirungslinie des Winkels der beiden Kräfte zusammen.

Ferner ist noch zu bemerken, dass zwei an demselben Punkt angreifende Kräfte parallel zu einander in einen beliebigen Punkt ihrer Resultante verlegt werden können, wenn dieser Punkt mit dem ursprünglichen Angriffspunkt unveränderlich fest verbunden ist. Denn diese Kräfte können durch eine einzige Kraft, ihre Resultante, ersetzt werden; die letztere können wir nach jedem beliebigen Punkt ihrer Richtung verschieben und dort wieder genau wie vorher zerlegen; wir erhalten zwei den ursprünglichen gleiche und parallele Kräfte, welche in einem beliebigen Punkt der Resultante angreifen.

Es seien nun zwei Kräfte AM und AN gegeben, und zwar möge die Grösse der Kraft AM 5 Einheiten und die von AN 3 Einheiten eines gemeinschaftlichen Grundmaasses betragen. Wir zerlegen die

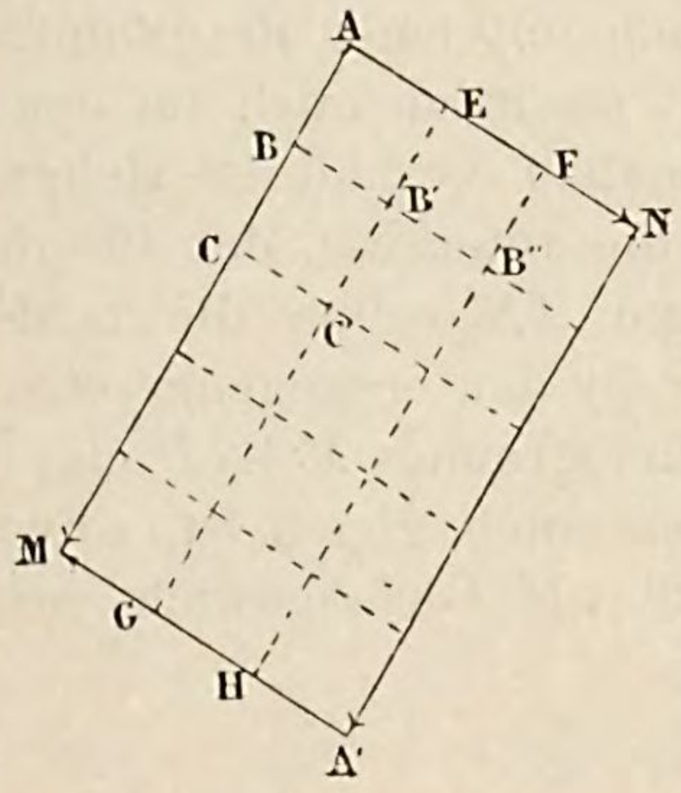


Fig. 41.

Kraft AM in 5 gleiche Kräfte, AB, $BC\ldots$, welche in A, B, C, $\ldots$ angreifen. Ebenso zerlegen wir AN in 3 Theile AE, EF, FN; durch die Punkte B, C, $\ldots$ ziehen wir Parallelen zu AN, ebenso durch E, F, N Parallelen zu AM und bezeichnen die Eckpunkte

---

fundamentale Eigenschaft der Kräfte beweisen könnte, ohne sich auf ihre Definition zu stützen, welche sie als die Ursache der Bewegung bezeichnet.“ (Bour, Cours de mécanique et machines; Paris, 1865 — 68: Statique, 45).

Hiermit soll indessen nicht gesagt sein, dass man die Zusammensetzung von Kräften als einfache Folgerung aus der Zusammensetzung von Beschleunigungen aufzufassen hat. Man thut gut daran, die Selbständigkeit jedes Theiles der Mechanik zu wahren, jedoch mit beständigem Hinweis auf die engen Beziehungen, welche diese einzelnen Disciplinen unter einander verknüpfen.

aller so gebildeten Rhomben. Die beiden gleichen Kräfte AB und AE, deren Resultante in die Richtung der Diagonale AB' des Rhombus $ABB'E$ fällt, können parallel zu ihren Richtungen nach dem Punkt B' verlegt werden; man erhält auf diese Weise zwei Kräfte $B'C'$ und $B'B''$, deren eine man nach EB', die andere nach BB' verschieben darf. Durch dieselbe Operation kann man die beiden Kräfte BC und BB' nach $B'C'$ und CC' transportiren und durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich die Kraft AM nach EG und die Kraft AE nach MG verlegen. In derselben Weise lassen sich die Kräfte EG und EF nach FH und GH und endlich FH und FN nach NA' und HA' verschieben. Da wir die beiden Kräfte AM und AN ohne Änderung ihrer Wirkung nach NA' und MA' bringen durften, können wir die Resultante beider Kräfte auch in dem Punkt A' angreifen lassen, und A' ist folglich ein Punkt ihrer Richtung. Die Diagonale des über den beiden gegebenen Kräften AM und AN construirten Parallelogramms fällt also der Richtung nach mit jener Resultanten zusammen.

Der Lehrsatz gilt natürlich auch für den Fall, dass die beiden Kräfte nicht in rationalem Verhältniss stehen.

Es bleibt noch die Intensität der Resultanten zu bestimmen. Die Strecken AM und AN sollen die beiden gegebenen Kräfte darstellen; fügen wir in der entgegengesetzten Richtung der Diagonale AP des Parallelogramms $MANP$ eine Kraft AP' zu, welche der unbekannten Resultanten gleich ist, so wird zwischen den drei Kräften AM, AN und AP' Gleichgewicht bestehen; eine beliebige

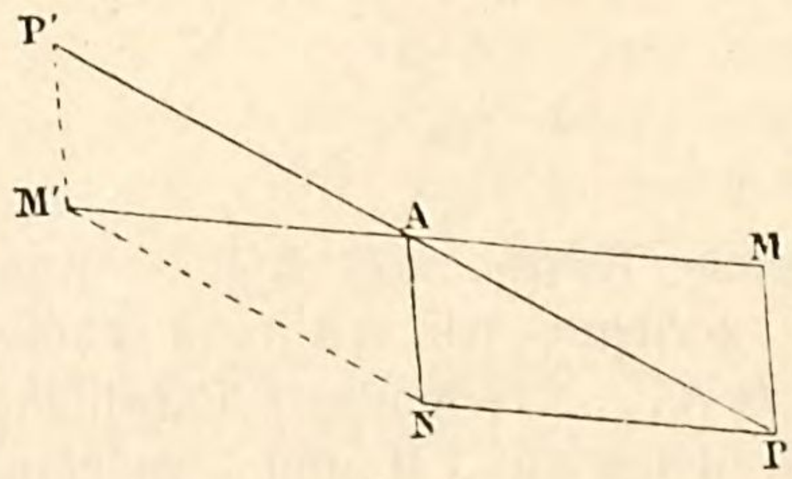


Fig. 42.

dieser drei Kräfte, z. B. AM, hebt die Wirkung der beiden übrigen auf. Die Resultante von AN und AP' muss also der Kraft AM entgegengesetzt gleich sein; mit anderen Worten, um P' zu bestimmen, hat man eine rein geometrische Aufgabe zu lösen; es ist nämlich ein Parallelogramm zu construiren, von dem eine Seite AN, die Richtung einer anderen Seite AP' und die Diagonale AM' gegeben sind. Durch N ziehen wir die Linie NM' parallel zu PP' und durch den Punkt M', wo diese Parallele die Verlängerung

von AM schneidet, $M'P'$ parallel zu AN: Die Strecke AP' stellt dann die Intensität der Kraft AP' dar, weil das mit AP' und AN construirte Parallelogramm AM' zur Diagonale hat. Nun ist aber $AP' = M'N = AP$. *Die Resultante zweier beliebiger Kräfte wird also der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des über beiden Kräften construirten Parallelogramms dargestellt.*

Man kann den Satz auch so aussprechen, *dass die Resultante der beiden Kräfte ihre geometrische Summe ist.*

Dieser Satz ist für eine beliebige Anzahl von Kräften gültig, die an demselben Punkt angreifen. Die Resultante lässt sich also immer nach den allgemeinen Regeln der Addition geometrischer Grössen berechnen, wie wir es für Geschwindigkeiten gezeigt haben.

34. Gleichgewicht von Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden. — Für das Gleichgewicht mehrerer, an einem materiellen Punkte angreifender Kräfte F, F', F'', ... besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass ihre Resultante Null sei. Eine beliebige Kraft ist dann der Resultanten aller anderen entgegengesetzt gleich. Für den besonderen Fall dreier Kräfte folgt sofort, dass die drei gegebenen Kräfte in derselben Ebene liegen und den Beziehungen genügen müssen:

$$\frac{F}{\sin(F', F'')} = \frac{F'}{\sin(F'', F)} = \frac{F''}{\sin(F, F')}.$$

35. Lehrsatz von Varignon. — *Das Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punkt* ist das Product aus der Grösse der Kraft in den senkrechten Abstand des Punktes von ihrer Richtung.

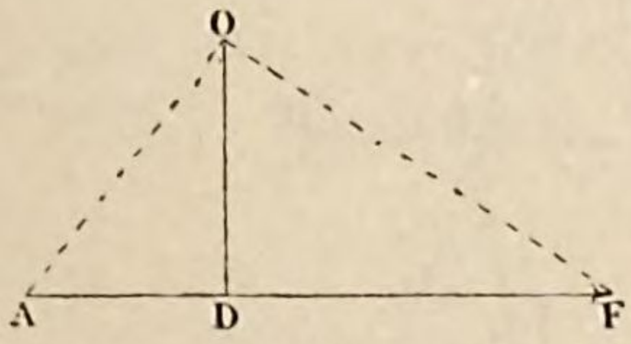


Fig. 43.

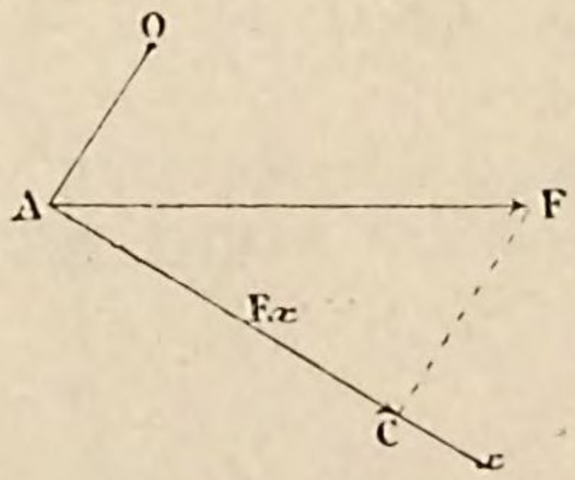


Fig. 44.

Das Moment der Kraft AF auf den Punkt O ist also gleich AF mal OD, das heisst, gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks AOF oder auch gleich dem Radius Vector OA multiplicirt mit $AC = F_x$, der Projection der Kraft auf eine zum Radius Vector senkrechte Gerade Ax. Wirkt nun eine beliebige Anzahl von Kräften auf den Punkt A, so hat man

$$\Sigma \text{ Mom. } F = \Sigma (F_x \,.\, OA) = OA \,.\, \Sigma F_x.$$

$\Sigma F_x = R_x$ ist aber die Projection der Resultanten auf Ax, und $OA \,.\, R_x$ ist das Moment der Resultanten; wir finden also

$$\Sigma \text{Mom. } F = \text{Mom. } R,$$

das heisst: *Das Moment der Resultanten einer beliebigen Anzahl in einem Punkt angreifender und in derselben Ebene gelegener Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten*; das Moment einer Kraft wird als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die Kraft den Punkt, in welchem sie angreift, im positiven oder negativen Sinn (**28**) zu drehen sucht.

36. Zusammensetzung paralleler Kräfte. — Die Zusammensetzung paralleler Kräfte bietet sicher weniger Schwierigkeiten als die geometrische Addition von Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkt schneiden; das Gesetz des Hebels war schon Archimedes bekannt, der dasselbe zur Grundlage der Statik machte, während die Regel vom Parallelogramm der Kräfte kaum bis auf Galilei zurückreicht. Wenn diese Regel aber einmal aufgestellt ist, so lässt sich die Zusammensetzung paralleler Kräfte sehr leicht aus derselben in der folgenden Weise herleiten.

An den Enden der starren Geraden AB sollen zwei parallele und gleich gerichtete Kräfte F und F' angreifen. Wir fügen in A und B zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte AC und BD hinzu; diese letzteren halten sich das Gleichgewicht und ändern den Zu-

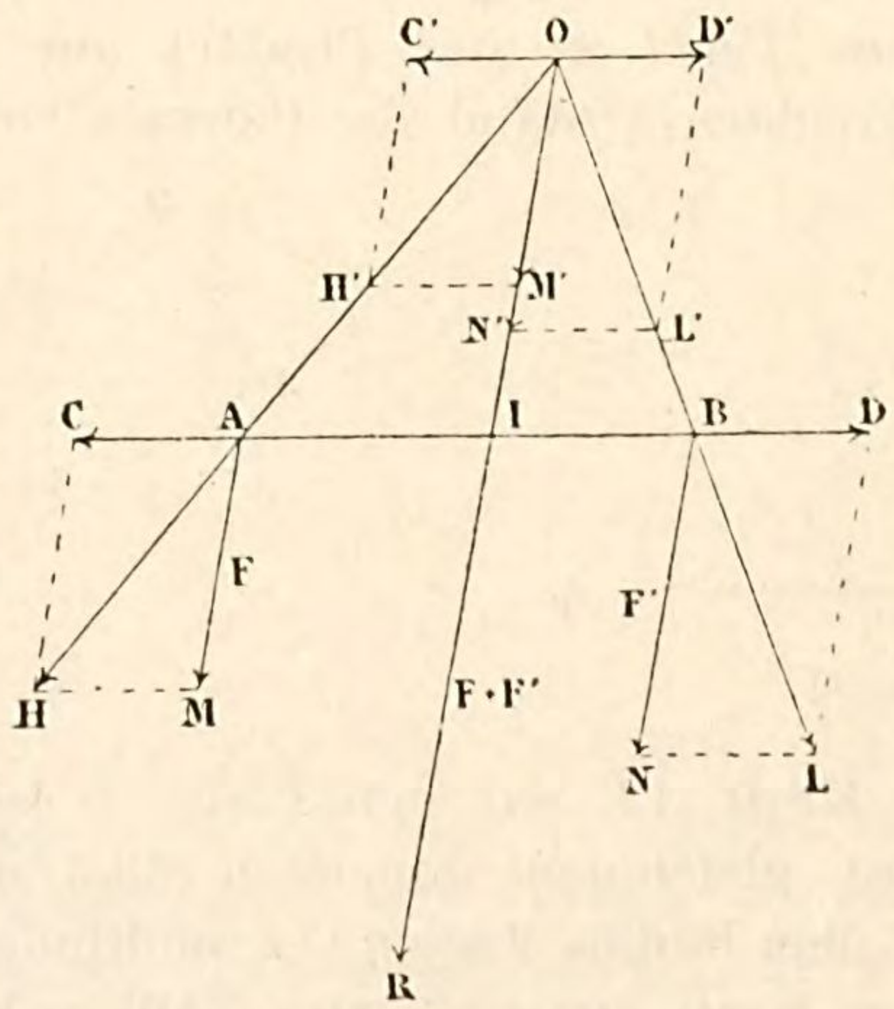


Fig. 45.

stand des Systems in keiner Weise. Die beiden im Punkt A angreifenden Kräfte AC und AM setzen sich zu einer Kraft AH,

und ebenso BD und BN zu einer Kraft BL zusammen. Die beiden in einer Ebene liegenden, convergirenden Geraden AH und BL schneiden sich im Punkt O. Nach diesem Punkt O verlegen wir die Kräfte F, AC und F', BD. Am Punkt O greifen dann vier Kräfte an; die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte OC' und OD' heben sich auf; OM' und ON' summiren sich und geben eine der Richtung der gegebenen Kräfte parallele Resultante, deren Grösse gleich der Summe $F + F'$ ist. Man kann diese Resultante nach dem Punkt I verlegen, in welchem ihre Richtung die Gerade AB schneidet. Die Lage des Punktes I ist leicht zu bestimmen. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AHM und OAI folgt $\frac{IA}{IO} = \frac{MH}{F}$; ebenso aus der Ähnlichkeit von BLN und OBI $\frac{IB}{IO} = \frac{NL}{F}$; durch Division beider Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{IA}{IB} = \frac{F'}{F}.$$

Die Abstände des Angriffspunktes der Resultanten von den Angriffspunkten der Componenten verhalten sich also umgekehrt wie die Grösse der Componenten.

Man kann die Gleichung auch schreiben

$$\frac{F}{IB} = \frac{F}{AI} = \frac{F + F'}{AB}.$$

Jede der drei Kräfte F, F' und $F + F'$ ist dem Abstand der Angriffspunkte der beiden anderen proportional.

Es mögen jetzt zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, F und $-F'$, an den Enden einer starren Geraden AB

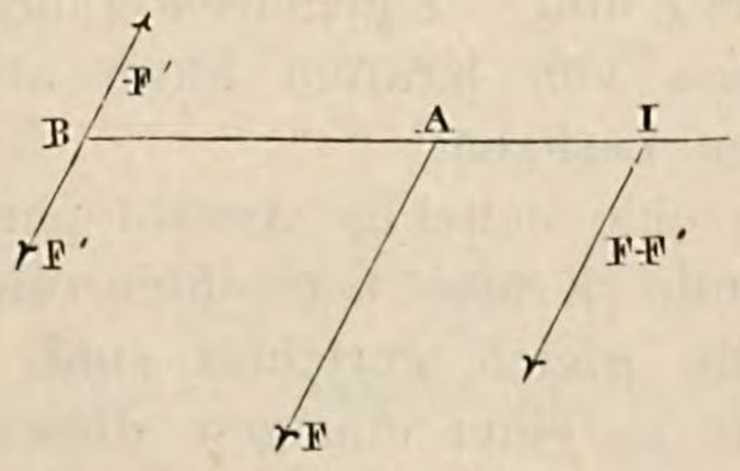


Fig. 46.

angreifen, und es sei dem absoluten Werthe nach $F > F'$. Wir können die Kraft F in zwei andere, parallele und gleichgerichtete

Kräfte zerlegen, deren eine F' im Punkt B und die andere $F—F'$ in einem Punkt I angreift, so dass $\frac{IA}{BA} = \frac{F'}{F—F'}$ ist. Nun heben sich die beiden Kräfte F' und $—F'$ auf, da sie entgegengesetzt und gleich sind; es bleibt nur die im Punkt I angreifende Kraft $F—F'$ übrig. Die beiden gegebenen Kräfte lassen sich also durch eine ihrer Differenz gleiche Resultante ersetzen, welche der gemeinschaftlichen Richtung parallel und im Sinne der grösseren Kraft gerichtet ist. Die Gleichung $\frac{IA}{AB} = \frac{F'}{F—F'}$ kann auch geschrieben werden $\frac{IA}{IA + AB} = \frac{F'}{F}$, oder

$$\frac{IA}{IB} = \frac{F'}{F};$$

also auch noch in diesem Fall ist die Lage des Punktes I durch die oben gegebene Regel bestimmt.

Der Beweis versagt, wenn $F—F' = 0$ wird. Man nennt ein solches System von zwei gleichen, parallelen und entgegengesetzt gerichteten Kräften ein *Kräftepaar*.

Ein Kräftepaar hat keine Resultante; denn wenn es eine Resultante OR hätte, so müsste es, wie man sieht, noch eine zweite Resultante $O'R'$ haben, wenn man es um 180^0 so in seiner Ebene

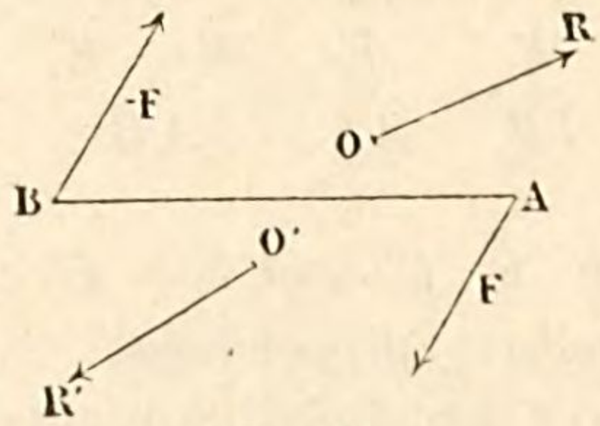


Fig. 47.

drehte, dass die Kräfte F und $—F$ gegenseitig ihre Rollen vertauschen; ein beliebiges System von Kräften kann aber nicht zwei verschiedene Resultanten besitzen.

Wir wollen nun eine beliebige Anzahl parallele, nicht in derselben Ebene liegende Kräfte betrachten und zunächst voraussetzen, dass sie alle gleich gerichtet sind. Durch Zusammensetzung zweier Kräfte zu einer einzigen, dieser letzteren mit einer dritten u. s. w. wird man die Resultante aller gegebenen Kräfte erhalten; diese Resultante wird der Grösse nach gleich der Summe der Componenten sein; ferner ist sie der gemeinsamen Richtung der Kräfte parallel und ihnen gleichgerichtet; ihr Angriffspunkt

wird nur von der Lage der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte und dem Verhältniss der letzteren zu einander abhängen, aber in keiner Weise weder von der absoluten Grösse noch von der gemeinsamen Richtung der Kräfte. Diesen Angriffspunkt nennt man den *Mittelpunkt der parallelen Kräfte.* Wenn die Kräfte zwar parallel, aber nicht gleichgerichtet sind, werden wir sie auf zwei Kräfte reduciren können, deren jede die Summe gleichgerichteter Kräfte darstellt: Diese beiden parallelen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte haben eine Resultante, wenn sie von ungleicher Grösse sind; sie halten sich das Gleichgewicht oder reduciren sich auf ein Kräftepaar, wenn sie einander gleich sind. Der Angriffspunkt der Resultanten hat, wenn überhaupt eine solche vorhanden ist, dieselben Eigenschaften wie in dem Fall gleichgerichteter Kräfte und heisst noch immer der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Die Lage des Mittelpunktes paralleler Kräfte wird analytisch mit Hülfe des Satzes von den Momenten paralleler Kräfte bestimmt.

37. Satz von den Momenten paralleler Kräfte. — Man nennt *Moment einer Kraft in Bezug auf eine ihr parallele Ebene* das Product aus der Grösse der Kraft in ihren Abstand von der Ebene. Wir betrachten zunächst zwei parallele und gleichgerichtete Kräfte F und F', welche in den Punkten A und B an-

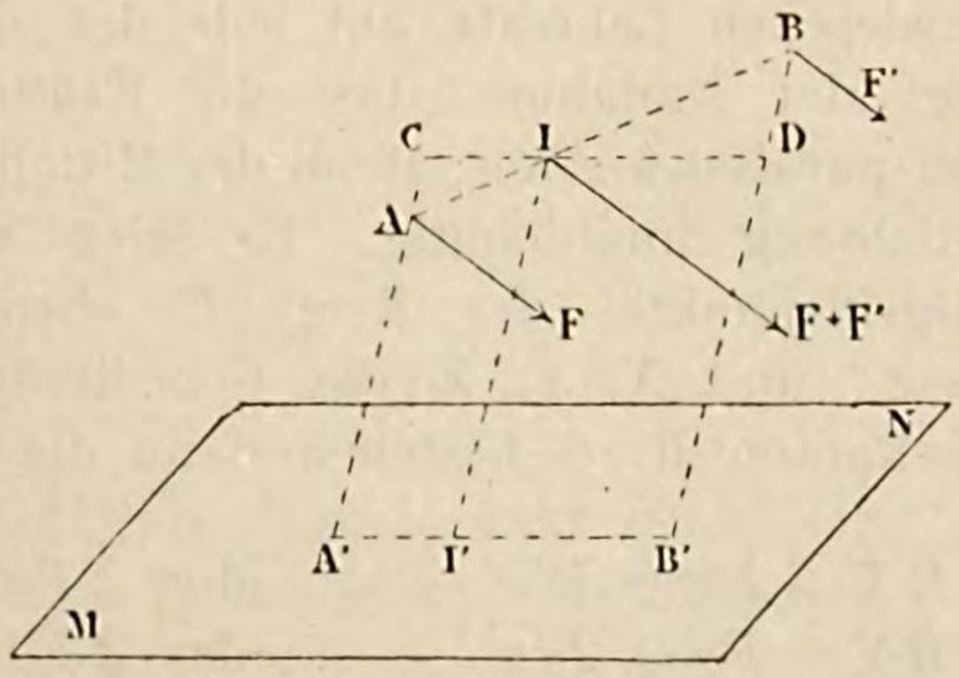


Fig. 48.

greifen; ihre Resultante $F + F'$ wirkt in einem solchen Punkte I, dass die Beziehung $\frac{IA}{IB} = \frac{F'}{F}$ besteht. Es sei MN eine den Kräften parallele Ebene; von den Punkten A, B und I fällen wir Perpendikel AA', BB', II' auf die Ebene MN und behaupten:

$$(F + F') \times II' = F \times AA' + F' \times BB'.$$

Zum Beweise ziehen wir durch den Punkt I eine Parallele CD zu $A'B'$; man hat dann

$$\frac{AC}{BD} = \frac{IA}{IB} = \frac{F'}{F},$$

folglich

$$F \times AC = F' \times BD,$$

oder

$$F \times (II' - AA') = F' \times (BB' - II'),$$

und endlich

$$(F + F') \times II' = F \times AA' + F' \times BB';$$

das Moment der Resultanten ist also gleich der Summe der Momente der Componenten.

Wenn die beiden parallelen Kräfte F und F' entgegengesetzt gerichtet sind, so lässt sich leicht beweisen, dass das Moment der Resultanten gleich der Differenz der Momente der Componenten ist. Beide Lehrsätze kann man in einen Satz zusammenfassen: *Das Moment der Resultanten zweier paralleler Kräfte ist in allen Fällen gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten.* Dieser Satz gilt für eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte.

38. Mittelpunkt paralleler Kräfte. — Um den Mittelpunkt paralleler Kräfte zu bestimmen, wendet man den im vorigen Paragraphen bewiesenen Lehrsatz auf jede der drei Coordinatenebenen an, unter der Annahme, dass die Kräfte nach einander jeder der Ebenen parallel werden; denn der Mittelpunkt der Kräfte ist von ihrer Richtung unabhängig. Es seien x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft F, ebenso x', y', z' die der Kraft F' etc., und X, Y, Z die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultanten R; es bestehen dann die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} RX &= Fx + F'x' + \ldots \text{ oder } \Sigma Fx, \\ RY &= Fy + F'y' + \ldots \text{ oder } \Sigma Fy, \\ RZ &= Fz + F'z' + \ldots \text{ oder } \Sigma Fz, \end{aligned}$$

welche die Lage des Mittelpunktes der parallelen Kräfte bestimmen; denn die Grösse der Resultanten ist durch die Beziehung

$$R = F + F' + \ldots \text{ oder } \Sigma F$$

gegeben. Wir wollen zum Beispiel die durch die Schwerkraft auf die einzelnen Elemente eines Körpers ausgeübte Wirkung betrachten; dieselbe besteht in einem System paralleler Kräfte, welche

man durch eine einzige Resultante P ersetzen kann; der Angriffspunkt (X, Y, Z) heisst der *Schwerpunkt* des Körpers. Bezeichnet man mit p das Gewicht eines Elementes mit den Coordinaten x, y, z, so hat man

$$P = \Sigma p,$$

und

$$PX = \Sigma px, \quad PY = \Sigma py, \quad PZ = \Sigma pz.$$

39. Kräftepaar. — Kehren wir jetzt zum Fall des Kräftepaares zurück, den Poinsot[1]) zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung gemacht hat.

Bei einem Kräftepaar F, $-F$ nennt man *Hebelarm* des Paares den kürzesten Abstand AB der beiden Geraden, in welchen die

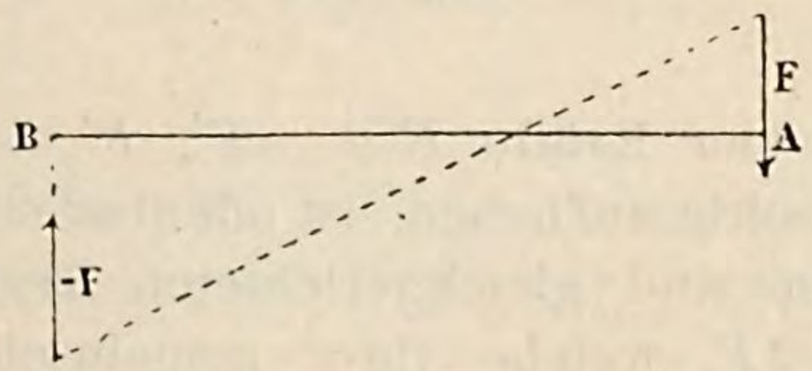


Fig. 49.

beiden Kräfte F und $-F$ wirken; diese letzteren können wir uns nach den Punkten A und B verlegt denken, da es, wie wir wissen, immer möglich ist, den Angriffspunkt einer Kraft nach einem beliebigen Punkt ihrer Richtung zu verschieben.

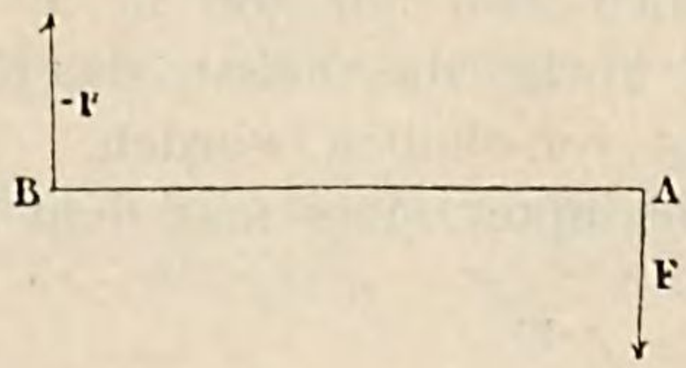


Fig. 50.

Lehrsatz: *Ein Kräftepaar kann parallel zu sich selbst im Raume verschoben werden, und man kann es in seiner Ebene beliebig um einen Punkt drehen, vorausgesetzt, dass der neue Hebelarm mit dem ursprünglichen unveränderlich verbunden ist.*

1. Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, betrachten wir einen Hebelarm AB, welcher parallel zu sich selbst nach $A'B'$ verschoben ist; in A' bringen wir zwei den Kräften F gleiche Kräfte F'' und $-F'$ in entgegengesetzter Richtung an; ebenso

---

[1]) Poinsot, Eléments de Statique; Paris, 1804.

lassen wir in B' zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte F' und $-F''$ angreifen, welche ebenfalls den Kräften F gleich sind. Die

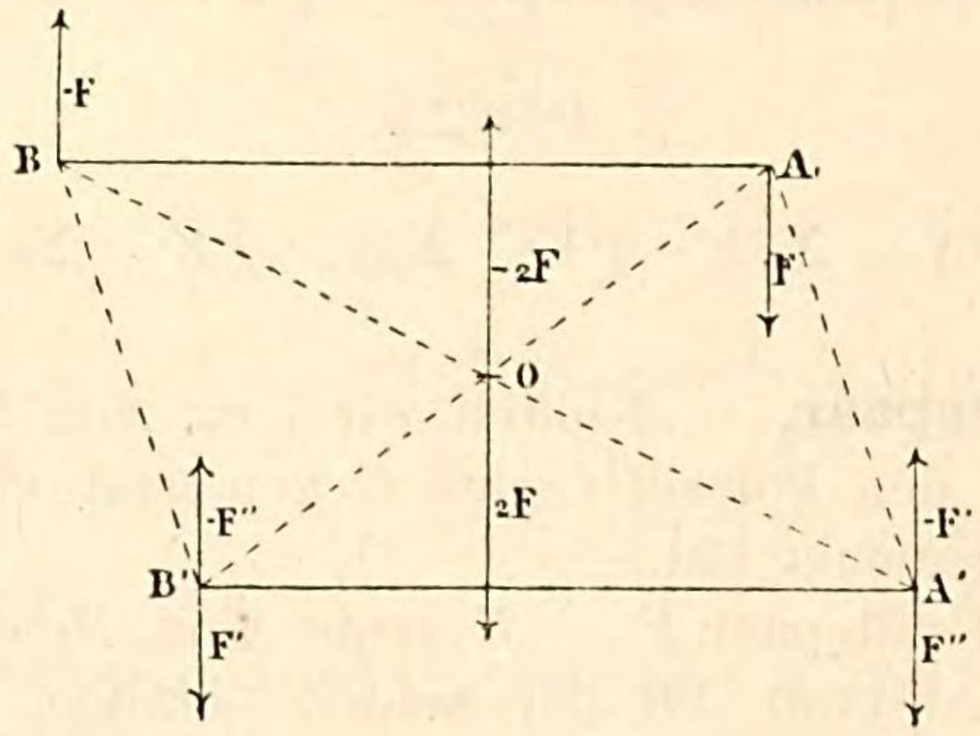


Fig. 51.

Einführung dieser vier Kräfte F'', $-F'$, F', $-F''$, von welchen sich je zwei gegenseitig aufheben, ist offenbar erlaubt. Nun haben die beiden gleichen und gleichgerichteten Kräfte $-F$ und $-F'$ eine Resultante $-2F$, welche ihrer gemeinschaftlichen Richtung parallel ist und deren Angriffspunkt in O, der Mitte von BA' liegt; ebenso ergeben die Kräfte F und F' eine Resultante $2F$, welche der Richtung derselben parallel ist und in demselben Punkt O angreift. Diese beiden Resultanten $-2F$ und $2F$ vernichten sich gegenseitig. Es bleiben also nur die in A' und B' angreifenden Kräfte F'' und $-F''$ übrig, das heisst, das Kräftepaar F, $-F$ ist parallel zu sich selbst verschoben worden.

2. Wir haben behauptet, dass man dem Paare in seiner Ebene

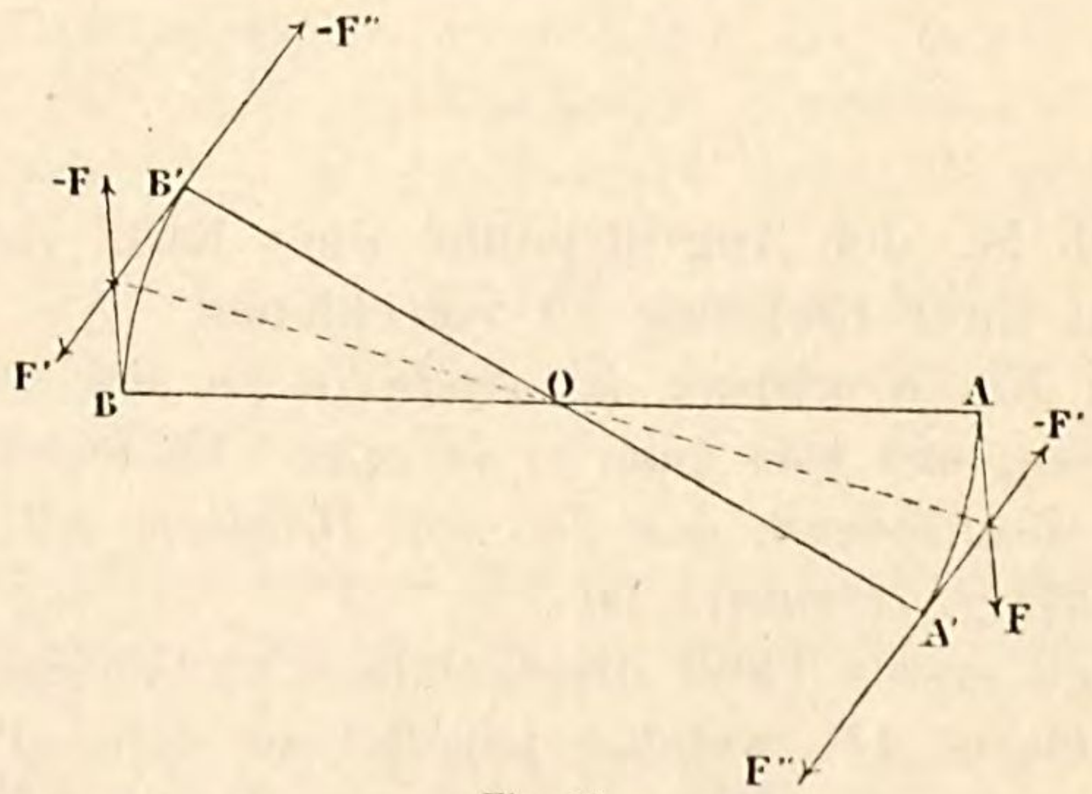


Fig. 52.

eine beliebige Winkeldrehung um einen Punkt O geben kann, von welchem wir annehmen dürfen, dass er auf der Mitte von AB

liegt; denn eine durch den ersten Theil des Satzes erlaubte seitliche Verschiebung ermöglicht es immer, den Mittelpunkt des Hebelarmes mit dem Punkt O zur Deckung zu bringen. Es sei $A'B'$ die neue Lage des Hebelarmes AB. In A' wollen wir zwei einander und den Kräften F gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kräfte F'' und $-F'$ anbringen; ferner sollen in B' zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte F' und $-F''$ angreifen, welche ebenfalls den Kräften F gleich sind. Die beiden gleichen Kräfte F und $-F'$ haben eine Resultante, deren Richtung mit der Halbirungslinie des Winkels ihrer Richtungen, das heisst, des Winkels AOA' zusammenfällt; die beiden Kräfte $-F$ und F' haben einer dieser letzteren entgegengesetzt gleiche Resultirende. Da diese beiden Resultanten sich gegenseitig aufheben, so bleiben nur die beiden Kräfte F'' und $-F''$ oder das ursprüngliche, nach $A'B'$ verlegte Kräftepaar übrig.

Man kann also einem Kräftepaar in seiner eigenen oder einer parallelen Ebene eine beliebige Lage geben, vorausgesetzt, dass der neue Hebelarm mit dem ursprünglichen unveränderlich verbunden ist.

Man nennt *Moment eines Kräftepaares* das Product einer Kraft des Paares in den Hebelarm: $F \times AB$ ist das Moment des Paares F, $-F$ mit dem Hebelarm AB. Dieses Moment ist das richtige Maass des Paares.

Man kann nämlich *ein gegebenes Kräftepaar immer durch ein in derselben oder einer parallelen Ebene gelegenes anderes Paar von demselben Moment ersetzen.*

Es sei wieder F, $-F$ das Paar mit dem gegebenen Hebel AB, und es möge AC der Arm desjenigen Paares sein, durch

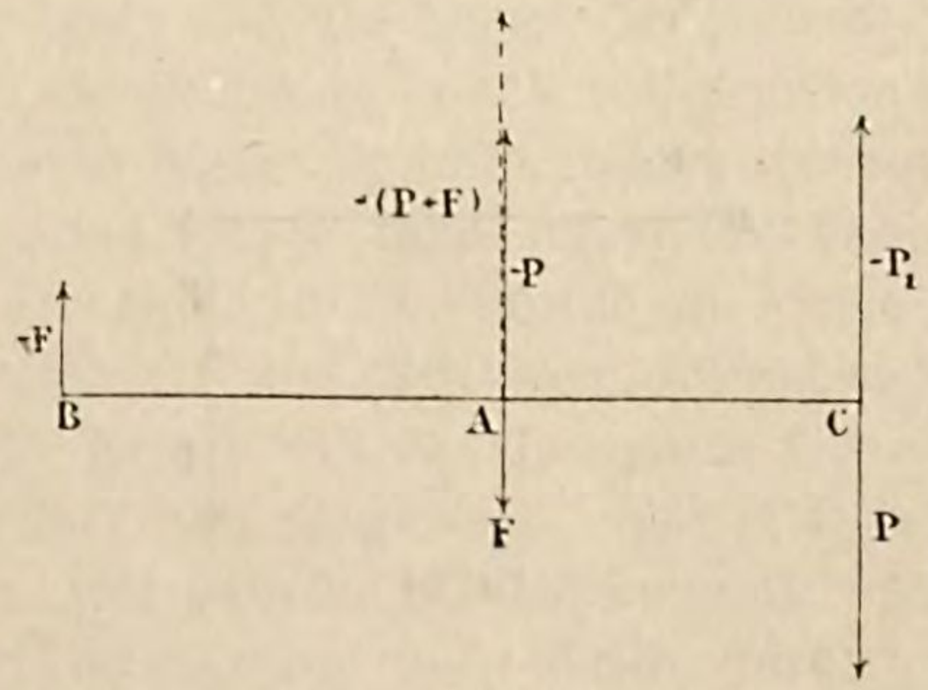


Fig. 53.

welches man das Paar AB ersetzen will. Der Zustand des Systems wird nicht geändert, wenn man im Punkte C zwei entgegengesetzt

gleiche Kräfte P und $-P_1$ anbringt. Diese Kräfte sollen auf AC senkrecht stehen und eine durch die Gleichung

$$P \times AC = F \times AB$$

bedingte Grösse haben. Man kann dafür auch schreiben

$$\frac{P}{AB} = \frac{F}{AC} = \frac{P+F}{BC},$$

mit anderen Worten, die beiden in C und B angreifenden parallelen und gleichgerichteten Kräfte $-P_1$ und $-F$ können durch eine einzige in A wirkende Kraft $-(P+F)$ von derselben Richtung ersetzt werden. Nun reduciren sich aber die beiden entgegengesetzten Kräfte $-(P+F)$ und F zu einer einzigen in dem Punkt A wirkenden Kraft $-P$. Es bleiben also nur zwei Kräfte, $-P$ in A und P in C, übrig, und das Paar $F, -F$ ist durch ein Paar $P, -P$ von dem gleichen Moment ersetzt; zwei Paare mit demselben Moment sind also gleichwerthig.

Das Moment stellt eine der zwei entgegengesetzt gleichen Kräfte des Paares dar, wenn der Hebelarm gleich der Längeneinheit ist.

Mit Hülfe der vorstehenden Sätze kann man *Kräftepaare* wie Kräfte *zusammensetzen*.

Zwei in derselben oder in parallelen Ebenen wirkende Kräftepaare können zu einem einzigen zusammengesetzt werden. Nach dem Obigen ist es immer möglich, dem zweiten Paar $P, -P$ den Hebelarm

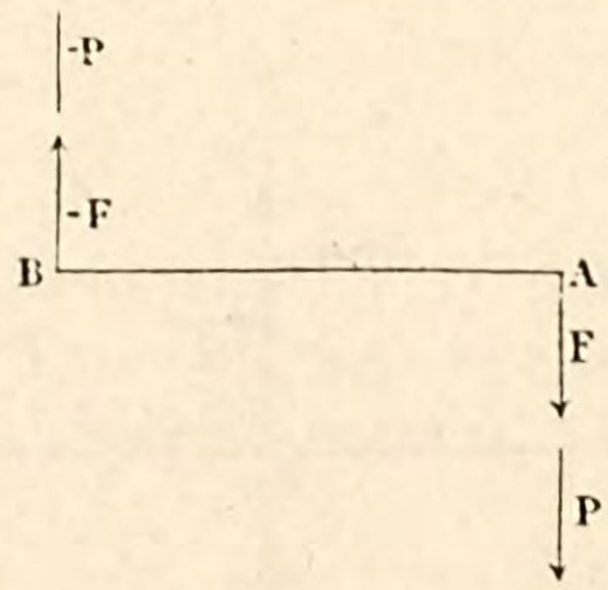


Fig. 54.

AB des ersten Paares $F, -F$ zu geben. Die Kraft P kann nun in A in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne wie die Kraft F in den nämlichen Punkt wirken. Setzen wir zuerst voraus, dass die Kräfte F und P den gleichen Sinn haben; sie können

dann durch ihre Summe $F + P$ ersetzt werden, ebenso wie wir die Kräfte $-F$ und $-P$ zu einer einzigen Kraft $-(F+P)$ vereinigen dürfen. Man hat also nur noch ein einziges Paar $F+P$ und $-(F+P)$ mit dem Hebelarm AB, das heisst, ein Paar, dessen Moment gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare ist. Wenn die Kräfte F und P entgegengesetzten Sinn hätten, so würde das Moment des resultirenden Paares gleich der Differenz der Momente der beiden Componenten sein, und die Resultante würde in dem Sinne des grösseren Paares wirken.

Poinsot stellt die Zusammensetzung von Kräftepaaren in allen Fällen sehr einfach mit Hülfe *der Achse des Paares* dar. Wir nehmen einen Punkt O im Raum willkürlich an und bringen dann das gegebene Kräftepaar in eine solche Lage, dass sein Hebelarm AB durch den Punkt O geht. In O errichten wir auf der Ebene des Paares eine Senkrechte; auf dieser Senkrechten tragen wir eine Länge Oa gleich dem Moment des Paares auf und kommen überein, diese Länge, je nach dem Sinne, in welchem das Paar wirkt, nach der einen oder anderen Seite aufzutragen; das Paar wird

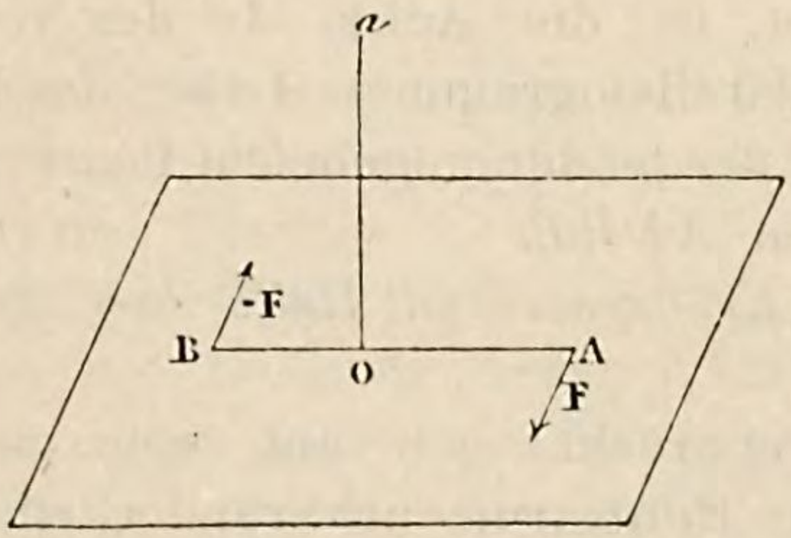


Fig. 55.

dann durch diese Linie Oa, die Achse des Paares, vollständig dargestellt sein. Um die Richtung, nach welcher man die Länge Oa aufzutragen hat, festzulegen, kommt man überein, dass ein mit den Füssen in O, dem Kopfe in a stehender Beobachter, welcher die Gerade AB betrachtet, diese Gerade in Folge der Einwirkung des Paares im positiven Sinne (**28**) sich drehen sieht. Kräftepaare sind somit, wie die Kräfte, durch eine nach Grösse und Richtung gegebene Linie geometrisch dargestellt. Nur in dem Fall von Kräftepaaren kann diese Linie parallel zu sich beliebig verschoben werden, während bei der Darstellung einer Kraft durch eine Gerade nur eine Verschiebung in der eigenen Richtung gestattet ist.

Die Zusammensetzung zweier in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen gelegener Paare geschieht einfach durch algebraische Addition der beiden Achsen.

Es seien jetzt zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Paare gegeben. In der gemeinsamen Schnittlinie beider Ebenen nehmen wir eine der Einheit gleiche Länge AB an; den Hebelarm jedes einzelnen der beiden Paare machen wir ebenfalls gleich der Längeneinheit; F, $-F$ und P, $-P$ seien alsdann die Kräfte der beiden Paare. Die Kräfte F und P kann man durch ihre Resultante

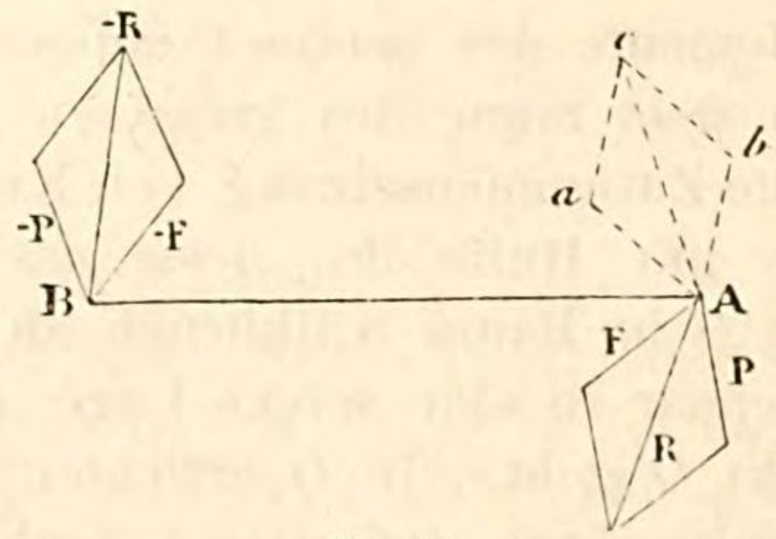


Fig. 56.

R, ebenso $-F$ und $-P$ durch ihre Resultante $-R$ ersetzen, welche letztere in derselben Ebene wie R gelegen ist; R, $-R$ ist also das resultirende Paar.

Wie man sieht, ist die Achse Ac des resultirenden Paares die Diagonale des Parallelogrammes $Aabc$; das Letztere ist aus den Achsen Aa und Ab der beiden gegebenen Paare gebildet und gleich dem Parallelogramm $AFRP$.

Man setzt also Kräftepaare mit Hülfe ihrer Achsen wie Kräfte zusammen.

Diese Regel erstreckt sich auf eine beliebige Zahl von Kräftepaaren, deren Hebelarme unveränderlich mit einander verbunden sind.

40. Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers.

Die Gesetze des Gleichgewichts eines starren Körpers ergeben sich unmittelbar aus den Regeln über die Zusammensetzung von Kräften und Kräftepaaren.

Es seien F, F', F'', .. Kräfte, die in beliebiger Anzahl in den Punkten A, A', A'', ... eines starren Körpers angreifen. In dem Körper wählen wir einen willkürlichen Punkt O; wenn wir in O zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte F, $-F$ anbringen, so wird hierdurch der Zustand des Systems nicht geändert. Die Kraft F in A und die in O angreifende Kraft $-$ F bilden zusammen ein Kräftepaar. Dieses Paar und die durch den Punkt O gehende Kraft F können die gegebene Kraft F ersetzen. Ebenso kann man für die Kraft F' ein Paar F', $-F'$ und eine durch den Punkt O gehende Kraft F' einführen. Indem man in

der gleichen Weise alle anderen Kräfte zerlegt, wird man eine Anzahl Kräftepaare erhalten, welche sich zu einem Paar zu-

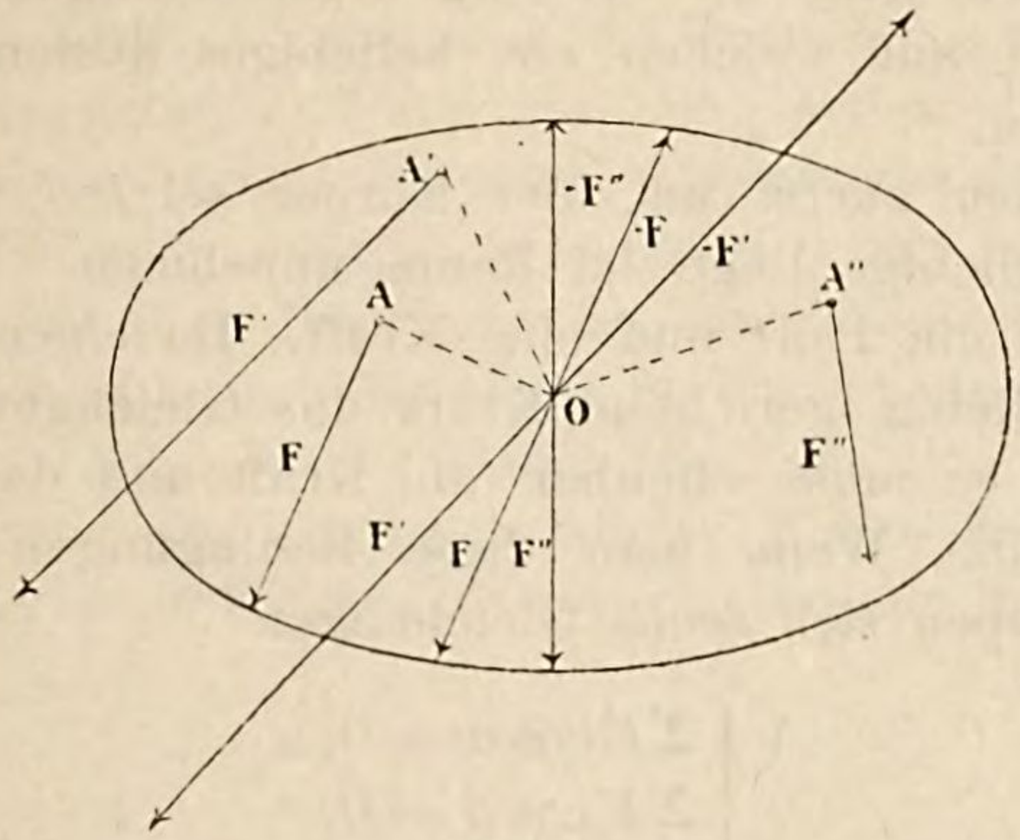


Fig. 57.

sammensetzen lassen und eine Anzahl durch den Punkt *O* gehende Kräfte, welche folglich zu einer einzigen Kraft vereinigt werden können.

Beliebig viele auf einen starren Körper wirkende Kräfte können also auf ein Kräftepaar und eine Kraft zurückgeführt werden.

Da die Wahl des Punktes *O* eine willkürliche ist, so lässt sich diese Reduction offenbar auf unendlich viele Arten ausführen; die Grösse und Richtung der resultirenden Kraft jedoch ist constant, während die Achse des Kräftepaares von der Wahl des Punktes *O* abhängt. Unter allen Arten, nach welchen man die auf einen starren Körper wirkenden Kräfte auf eine Kraft und ein Paar zurückführen kann, giebt es in Folge einer innigen Analogie zur Kinematik eine Art, welche einfacher ist als alle anderen; bei dieser fällt nämlich die Achse des Paares mit der Richtung der resultirenden translatorischen Bewegung zusammen. Das Paar, welches diese Eigenthümlichkeit besitzt, ist ein *Minimum* im Vergleich zu den resultirenden Paaren, welche einem beliebigen Ursprung zugehören; seine Achse ist die *Centralachse* von Poinsot; diese Bezeichnung ist dadurch vollkommen gerechtfertigt, dass in gleichen Abständen von dieser Achse die resultirenden Kräftepaare gleiche Werthe haben und ihre Achsen gegen die *Centralachse* gleich geneigt sind. Wenn man den Hebelarm des resultirenden Paares mit dem einen Ende nach *O* verlegt, so wird man die an diesem Ende wirkende Kraft des Paares mit der durch den Punkt *O* gehenden Resultanten zusammensetzen können. Das Paar und die Kraft sind dann also durch zwei Kräfte ersetzt.

Die Gesammtheit der auf einen festen Körper wirkenden Kräfte kann folglich auch auf zwei Kräfte zurückgeführt werden.

Wir können jetzt die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper, auf welchen ein beliebiges System von Kräften wirkt, aufstellen.

Wir nehmen zuerst an, der Körper sei *frei*, das heisst, er könne jede beliebige Lage im Raum annehmen. Wir reduciren alle Kräfte auf ein Paar und eine Kraft. Da einem Paar niemals durch eine beliebig gerichtete Kraft das Gleichgewicht gehalten werden kann, so muss offenbar die Kraft und das Paar einzeln gleich Null sein. Wenn man diese Bedingungen mathematisch ausdrückt, ergeben sich sechs Gleichungen

$$\begin{cases} \Sigma F \cos \alpha = 0, \\ \Sigma F \cos \beta = 0, \\ \Sigma F \cos \gamma = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma P \cos a = 0, \\ \Sigma P \cos b = 0, \\ \Sigma P \cos c = 0; \end{cases}$$

von welchen die drei ersten bedeuten, dass die Kraft, und die drei letzten, dass die Achse des resultirenden Paares Null ist; denn die Achsen P der Kräftepaare setzen sich wie Kräfte zusammen. Diese sechs Gleichungen bestimmen vollkommen das Gleichgewicht eines freien, starren Körpers.

Auf folgende Weise kann man den drei letzten Gleichungen eine bequemere Form geben:

Nachdem die im Punkt M (x, y, z) angreifende Kraft F in

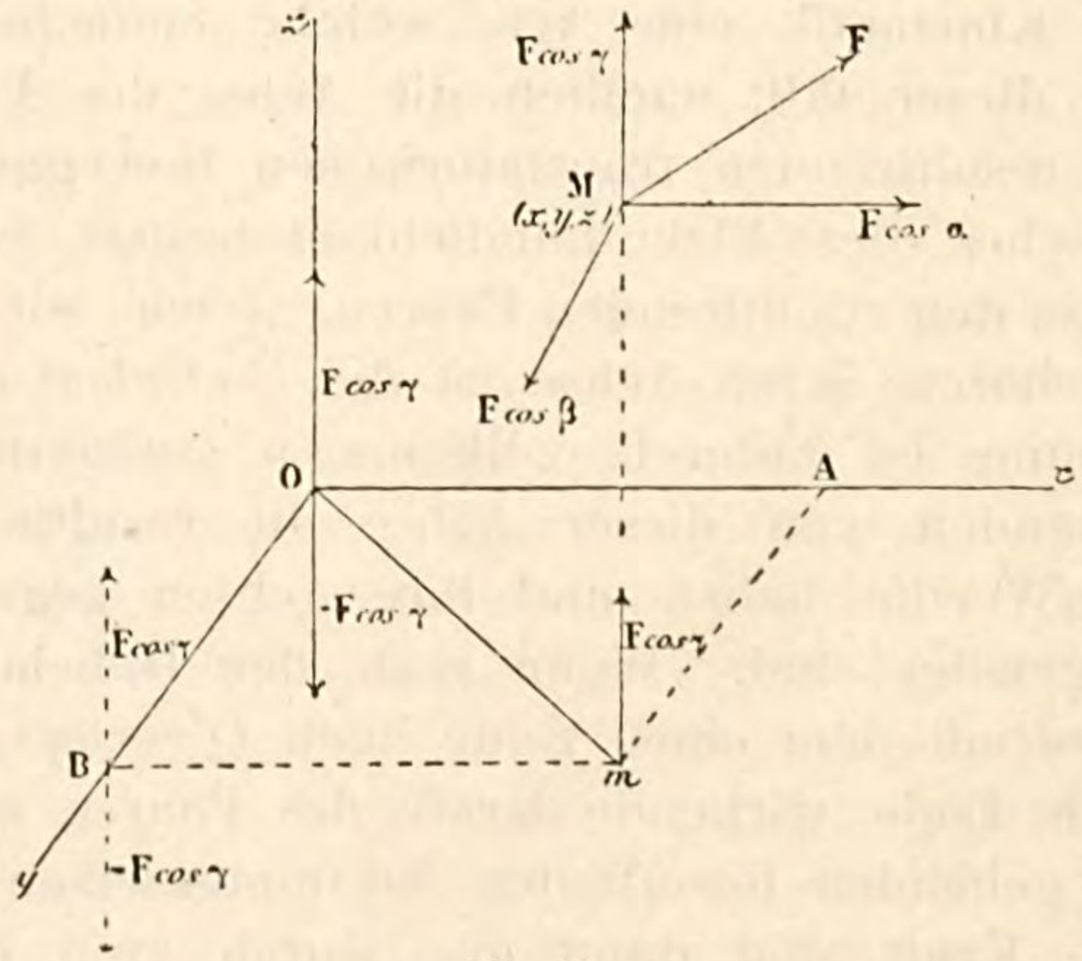


Fig. 58.

ihre drei Componenten parallel zu den Coordinatenachsen zerlegt ist, ersetzen wir jede der Componenten durch eine in O wirkende Kraft und in ein Paar. Die Kraft $F\cos\gamma$ wird z. B. in eine in O angreifende Kraft $F\cos\gamma$ und ein Paar $F\cos\gamma$, $-F\cos\gamma$ mit dem Hebel Om zerlegt. Wenn wir aber mA und mB parallel zu Oy und Ox ziehen und in B zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte vom Betrage $F\cos\gamma$ anbringen, so können wir uns an Stelle des Kräftepaares mit dem Hebelarm Om zwei Paare mit den Hebelarmen OB und Bm und den Kräften $F\cos\gamma$ denken. Das Paar mit dem Arm OB ist in der Ebene zOy, das Paar mit dem Hebel Bm in einer zur Ebene zOx parallelen Ebene gelegen und kann somit nach OA in der Ebene zOx verlegt werden; ihre Momente sind

$$F\cos\gamma\,.\,y \text{ und } -F\cos\gamma\,.\,x;$$

wir betrachten nämlich, wie gewöhnlich, die Momente derjenigen Paare als positiv, welche für einen Beobachter, der sich in der zu ihrer Ebene senkrechten Coordinatenachse befindet, eine Drehung von links nach rechts hervorzubringen suchen.

Verfährt man in derselben Weise mit den beiden anderen Componenten $F\cos\alpha$, $F\cos\beta$ und vereinigt die Momente der in derselben Ebene gelegenen Paare, so wird man an Stelle der Kraft F ihre drei im Punkt O angreifenden Componenten $F\cos\alpha$, $F\cos\beta$, $F\cos\gamma$ erhalten und ferner drei in den Coordinatenebenen liegende Kräftepaare mit den Momenten:

$$F\cos\gamma\,.\,y - F\cos\beta\,.\,z,\quad F\cos\alpha\,.\,z - F\cos\gamma\,.\,x,\quad F\cos\beta\,.\,x - F\cos\alpha\,.\,y.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen eines freien starren Körpers werden also

$$\begin{cases} \Sigma F\cos\alpha = 0, \\ \Sigma F\cos\beta = 0, \\ \Sigma F\cos\gamma = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma F(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0, \\ \Sigma F(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0, \\ \Sigma F(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0; \end{cases}$$

man schreibt dieselben auch häufig, indem man $F\cos\alpha = X$, $F\cos\beta = Y$, $F\cos\gamma = Z$ setzt, in der Form:

$$\Sigma X = 0,\quad \Sigma Y = 0,\quad \Sigma Z = 0;$$

$$\Sigma(yZ - zY) = 0,\quad \Sigma(zX - xZ) = 0,\quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Ein starrer Körper ist *unfrei*, wenn er nicht in allen Richtungen verschoben werden kann.

Wenn ein Punkt des starren Körpers fest liegt, so wird der Kraft, welche man immer in diesen Punkt verlegen kann, durch den Widerstand des festen Punktes das Gleichgewicht gehalten, und es bleibt nur das Kräftepaar übrig, welches durch diesen Widerstand nicht aufgehoben werden kann. Die nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung ist also in diesem Fall die, dass das Paar Null sei; diese Bedingung liefert die drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \Sigma P \cos a = 0, \\ \Sigma P \cos b = 0, \\ \Sigma P \cos c = 0; \end{cases}$$

oder

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Wenn der starre Körper eine feste Achse hat, so können wir zuerst jede Kraft durch ihre beiden Componenten, die eine parallel, die andere senkrecht zur Achse, ersetzen; die parallelen Componenten sind ohne Wirkung, weil der Körper sich nur um die Achse drehen und nicht in der Richtung derselben verschieben kann. Es bleiben also nur die zur Achse senkrechten Componenten übrig; sei f eine dieser Componenten und AO ihr kürzester Abstand von

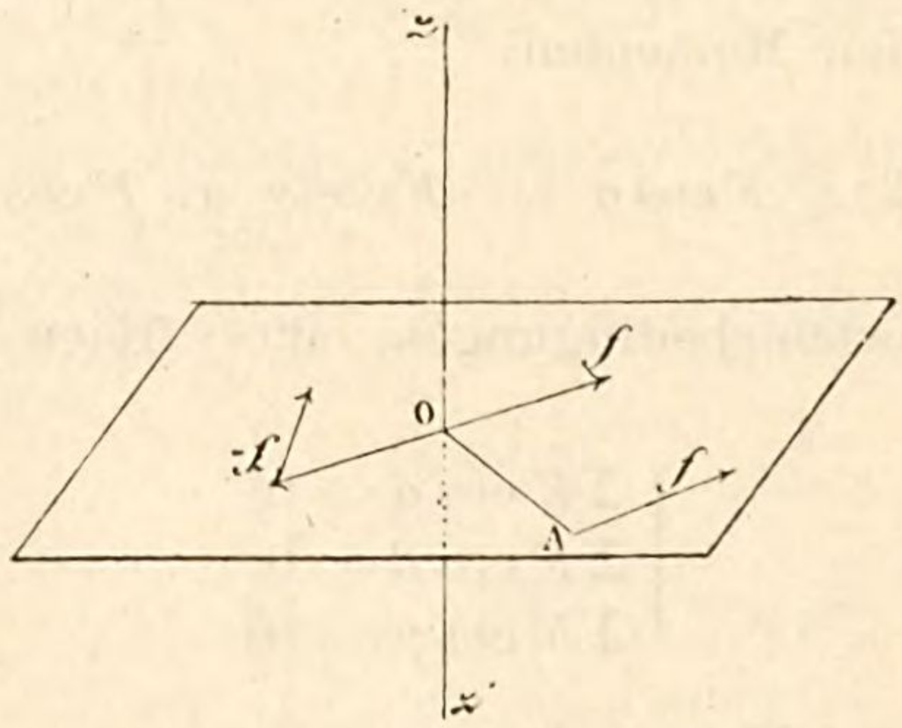


Fig. 59.

der Achse; wir verlegen den Angriffspunkt der Kraft nach A und ersetzen sie durch ein Paar f, $-f$ vom Hebelarm AO und eine in O wirkende Kraft f; da die Kraft durch den Widerstand des Punktes O aufgehoben wird, haben wir es nur noch mit dem Paar zu thun. Indem man so mit jeder Componente verfährt, bekommt man ein System von Kräftepaaren, die in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen und folglich unter einander parallel sind.

Diese Paare lassen sich zu einem einzigen vereinigen, dessen Moment gleich der Summe der Momente der gegebenen Paare ist; der Körper kann offenbar nur dann im Gleichgewicht sein, wenn dieses in einer zur Achse senkrechten Ebene gelegene Paar ebenfalls Null ist.

Wir nennen *Moment einer Kraft F in Bezug auf eine Achse* das Product der Projection f der Kraft auf eine zur Achse senkrechte

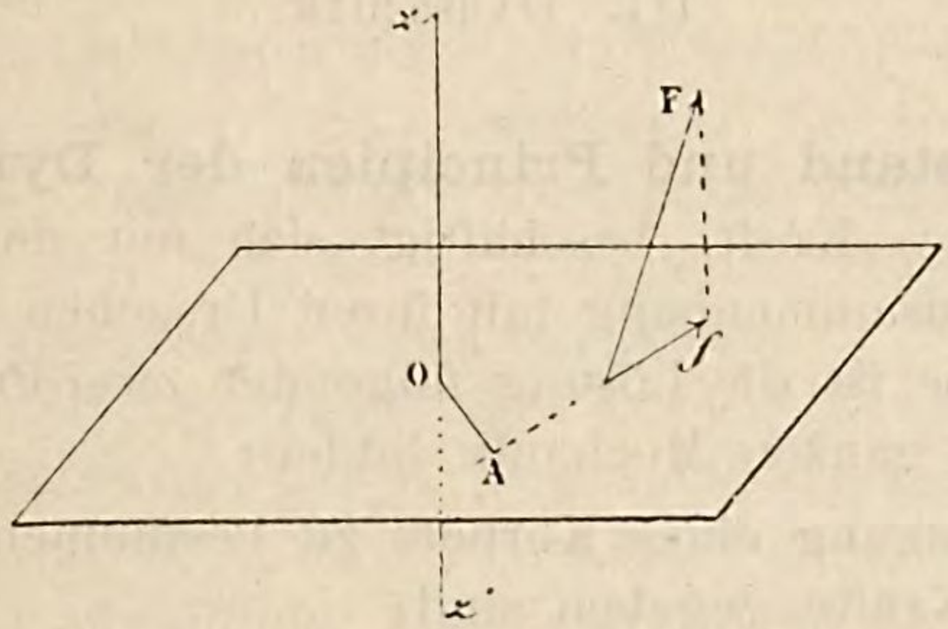


Fig. 60.

Ebene in den kürzesten Abstand OA von Achse und Kraft; diesem Product geben wir ein passendes Vorzeichen, je nach dem Sinne, n welchem die Kraft den Körper zu drehen sucht. Die obige Bedingung lässt sich dann so ausdrücken: *Damit ein starrer, um eine feste Achse beweglicher Körper im Gleichgewicht sei, muss die algebraische Summe der Momente aller auf den Körper wirkender Kräfte in Bezug auf die Achse gleich Null sein.*

Nun ist aber das Moment der Kraft f in Bezug auf die Achse Oz gleich der Summe der Momente ihrer Componenten X und Y in Bezug auf dieselbe Achse, und die obige Bedingung kann unter Beibehaltung der Übereinkunft in Betreff der Vorzeichen sofort hingeschrieben werden:

$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

Von den drei resultirenden, den Achsen parallelen Kräften und den drei in den Coordinatenebenen liegenden Kräftepaaren des allgemeinen Falls bleibt somit nur das in der zur Drehungsachse senkrechten Ebene xOy gelegene resultirende Paar übrig. Die im Punkte O angreifenden Kräfte werden offenbar durch den Widerstand der Achse aufgehoben, ebenso wie die Kräftepaare, die in den beiden die Achse Oz enthaltenden Coordinatenebenen liegen und deren Hebelarm nach dieser Achse selbst verlegt werden kann. Man hätte also die Gleichgewichtsbedingung mit Hülfe dieser beiden Überlegungen sofort aufstellen können.

Umgekehrt können im allgemeinen Fall eines freien, starren Körpers die drei letzten Gleichgewichtsbedingungen als Ausdruck dafür angesehen werden, dass die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf jede der Coordinatenachsen für sich Null ist; häufig interpretirt man sie auch in dieser Weise.

III. Dynamik.

41. Gegenstand und Principien der Dynamik. — Die *Dynamik* (*δύναμις*, Kraft) beschäftigt sich mit dem Studium der Bewegung im Zusammenhang mit ihren Ursachen, den Kräften.

Ihre Aufgabe ist die Lösung folgender zwei Probleme, welche das Endziel der ganzen Mechanik bilden:

1. Die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte gegeben sind;

2. Die Kräfte, welche thatsächlich auf einen Körper wirken, zu bestimmen, wenn seine Bewegung gegeben ist.

Die Dynamik stützt sich nicht allein, wie Kinematik und Statik, auf mathematische Grundlagen; sie nimmt besondere Principien zu Hülfe, welche sich zwar ursprünglich aus der Erfahrung heraus entwickelt haben, aber jetzt einen weit höheren Rang einnehmen; sie sind eine Art von Postulaten, deren Richtigkeit nur durch die stets wahrnehmbare Zuverlässigkeit der Folgerungen, zu welchen sie führen. bewiesen wird.

Diese beiden Principien sind das der Trägheit und das der relativen Bewegungen.

1. *Princip der Trägheit.* — Dieses Princip lässt sich folgendermaassen aussprechen:

Wirkt auf einen Körper keine äussere Kraft, so bleibt er in Ruhe, wenn er vorher in Ruhe war; ist er in Bewegung, so behält er dieselbe bei, und diese Bewegung ist dann nothwendig geradlinig und gleichförmig.

Der erste Theil dieses Princips ist eigentlich nur die Definition der Kraft selbst und enthält in Wirklichkeit kein Gesetz. Mit der Behauptung, ein Körper könne seinen Zustand, sowohl den der Ruhe wie den der Bewegung, nicht ändern, soll aber keineswegs gesagt sein, dass die Materie unfähig sei, Bewegung hervorzubringen: Jeder Körper wirkt scheinbar auf alle anderen und ist nur träge in Bezug auf sich selbst.

Der zweite Theil dagegen ist ein Postulat. Lange Zeit hat man die gleichförmige Kreisbewegung als die *natürliche* Form der

Bewegung angesehen. Kepler[1]) erkannte zuerst, dass ein in Bewegung befindlicher Körper, welcher der Wirkung einer äusseren Kraft nicht unterworfen ist, sich in gerader Linie und mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Eine aufmerksame Beobachtung muss auch auf diesen Satz führen. Lässt man eine Kugel auf horizontalem, sehr glattem Boden rollen, so bewegt sie sich mit langsam abnehmender Geschwindigkeit in gerader Linie weiter; je glätter der Boden ist, um so weniger wird die Abnahme der Geschwindigkeit merkbar werden; die Bewegung wird immer länger dauern und in gerader Linie stattfinden. Es ist also logisch anzunehmen, dass, wenn man alle Hindernisse hinwegräumen könnte, die Bewegung sich mit der anfänglichen Geschwindigkeit und Richtung ins Unbegrenzte fortsetzen würde.

Wenn also die Bewegung eines Körpers geradlinig und gleichförmig ist, so rührt dies daher, dass entweder keine Kraft auf ihn wirkt, oder dass die wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten; bei der geradlinig ungleichförmigen Bewegung fällt die Richtung der Kraft mit der Bahn zusammen; ist die Bewegung krummlinig, so wirkt eine Kraft, welche mit der Tangente einen bestimmten Winkel bildet.

2. *Princip der relativen Bewegungen.* Wenn ein System in einer translatorischen Bewegung begriffen ist und in diesem System ein Körper der Wirkung einer Kraft besonders unterworfen wird, so nimmt derselbe in dem System eine relative Bewegung an. Das Princip lautet: *Die relative Bewegung des Körpers ist unabhängig von der Verschiebung des Systems, also dieselbe, als wenn das System in Ruhe wäre.* Dieses Princip, welches wir zuerst bei Galilei[2]) finden, ist durch die Erfahrung nur in dem Fall klar zu erkennen, wo die translatorische Bewegung geradlinig und gleichförmig ist, wie z. B. bei der Bewegung eines Schiffes, welches einen Fluss hinabfährt. Wir werden indessen das Princip in ganz allgemeiner Form aufstellen, mit der einzigen Beschränkung, dass die Bewegung des Systems eine *translatorische* sein soll.

Wir haben jetzt alle Hülfsmittel beisammen, um die Dynamik eines materiellen Punktes in Angriff zu nehmen.

---

[1]) Kepler, Astronomia nova *ἀπολογητός*; Prag 1609.
[2]) Galilei, Dialogues sur deux sciences nouvelles; Leyden 1638.

A. Dynamik eines materiellen Punktes.

42. Fundamentale Sätze.[1]) — Satz I. *Eine nach Grösse und Richtung constante Kraft verleiht einem freien, materiellen Punkte eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung.*

Es ist augenscheinlich, dass die Bewegung geradlinig sein muss, und es bleibt nur zu zeigen, dass sie gleichförmig beschleunigt ist. Wir ordnen dem gegebenen materiellen Punkte m, der sich in Ruhe befinden soll, ein System identischer, ruhender Punkte m_1, m_2 .... zu. Auf jeden Punkt des Systems, den Punkt m einbegriffen, lassen wir eine der gegebenen gleiche Kraft F während einer und derselben Zeit Θ wirken; am Ende dieser Zeit, wenn alle Punkte die nach Grösse und Richtung gleiche Geschwindigkeit a angenommen haben, unterdrücken wir sämmtliche Kräfte F. Nach unserem ersten Princip wird sich das System mit einer geradlinig gleichförmigen Geschwindigkeit a fortbewegen. Wir lassen nun allein auf den Punkt m während der Zeit Θ die Kraft F wirken. Nach unserem zweiten Princip verleiht die Kraft F dann dem Punkte m eine relative Bewegung, welche dieselbe ist, als ob das System in Ruhe wäre, das heisst, als ob der Punkt m mit der Geschwindigkeit Null anfinge, sich zu bewegen; am Ende dieser neuen Zeit Θ wird also der bewegliche Punkt eine relative Geschwindigkeit a haben. Die absolute Geschwindigkeit ist aber die geometrische Summe der relativen und translatorischen Geschwindigkeit; folglich wird nach dieser neuen Zeit Θ die absolute Geschwindigkeit $2a$ betragen u. s. f. Da die Geschwindigkeit der Zeit proportional wächst, ist also die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte.

Wenn der Punkt, anstatt vom Ruhezustand aus seine Bewegung zu beginnen, schon eine Geschwindigkeit besass, als die Kraft anfing, auf ihn zu wirken, so ist offenbar der Satz auch noch richtig.

Umgekehrt wird *jede geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorgebracht durch eine nach Grösse und Richtung constante Kraft.*

Aus dem Vorhergehenden folgt nämlich, dass man sich diese Bewegung durch eine constante Kraft F_1 hervorgebracht denken kann, die dem beweglichen Punkt in jedem Augenblick die Geschwindigkeit verleiht, welche er in Wirklichkeit zu dieser Zeit hat; die thatsächlich vorhandene Kraft F ist nothwendigerweise mit dieser Kraft F_1 identisch. Denn wenn z. B. während des Zeitabschnitts t bis $t + \Delta t$ die Kraft F fortwährend grösser wäre als F_1,

---

[1]) Siehe Briot, a. a. O. p. 74.

so würde man $F = F_1 + F_2$ setzen können. Nun nimmt aber der Punkt unter Einwirkung der Kraft F_1 zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ genau die beobachteten Geschwindigkeiten v und $v + \Delta v$ an. Wenn man also während dieser Zeit Δt ausserdem noch die Kraft F_2 wirken lassen würde, so müsste sie eine relative Geschwindigkeit erzeugen, welche sich zu $v + \Delta v$ addirt; diese Kraft F_2 darf also nicht vorhanden sein.

Durch eine ganz ähnliche Überlegung kann man aus demselben Princip der relativen Bewegungen die folgenden Sätze ableiten:

Satz II. *Wenn zwei constante Kräfte gleichzeitig und in derselben Richtung auf denselben materiellen, vorher ruhenden Punkt wirken, so ist die durch sie erzeugte Beschleunigung der Bewegung die algebraische Summe der Beschleunigungen, welche jede von ihnen gesondert hervorgerufen haben würde.*

Satz III. *Zwei nach einander auf denselben materiellen Punkt wirkende Kräfte ertheilen ihm Beschleunigungen, welche ihrer Grösse proportional sind; mit anderen Worten, zwei Kräfte sind den Beschleunigungen proportional, welche sie demselben materiellen Punkt ertheilen.*

Dieser letzte Satz, welcher sich unmittelbar aus dem vorhergehenden ableiten lässt, wenn man für jede der beiden Kräfte ein Vielfaches ihres gemeinsamen Grundmaasses setzt, giebt das Mittel an die Hand, die Grösse einer Kraft zu *messen*, das heisst, dieselbe mit der gewählten Einheit zu vergleichen; in der Mechanik wird, wie wir schon erwähnt haben, als Einheit das Gewicht eines Kilogramm gewählt.

Derselbe Lehrsatz führt auch zur Definition der *Masse*.

43. Masse. — Lässt man auf denselben Körper nach einander verschiedene Kräfte F, F', F'' ... wirken, welche dem Körper die Beschleunigungen γ, γ', γ'' ... ertheilen, so hat man nach dem Obigen

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} \cdots = m.$$

Dieses constante Verhältniss nennt man die Masse des Körpers.

Die Beziehung $\frac{F}{\gamma} = m$ lässt sich schreiben

$$F = m\gamma.$$

War der Körper vorher in Ruhe, so ist $v = \gamma t$, also

$$F = \frac{mv}{t}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass *die wirkenden Kräfte den Massen proportional sein müssen, wenn verschiedene Körper in derselben Zeit t die gleiche Geschwindigkeit v erlangen sollen.* Diese Folgerung, welche sich vollkommen mit der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes Masse deckt, rechtfertigt den Namen, welche wir der Grösse *m* gegeben haben. Die Masse ist nach einem glücklich gewählten Ausdruck von Lamé *der Widerstandscoefficient der Materie gegen die Bewegung* (oder gegen die Änderung der Bewegung).

Die Beschleunigungen, welche durch dieselbe Kraft verschiedenen Massen ertheilt werden, sind ferner diesen Massen umgekehrt proportional.

Durch Anwendung des Lehrsatzes auf die Schwere erhält man

$$\frac{P}{g} = m,$$

eine Beziehung, welche ein einfaches Mittel zur Messung der Masse *m* liefert. Die Zahl, welche wir durch die Messung erhalten, hängt von den gewählten Einheiten ab. Gewöhnlich geht man vom Kilogramm als Gewichtseinheit aus und leitet die Einheit der Masse von der Gewichtseinheit ab; die Masseneinheit ist also die Masse von *g* Kilogramm. Nun ist aber das Gewicht eines Körpers eine ganz unbestimmte Eigenschaft der Materie, welche sich von Ort zu Ort ändert; die Masse dagegen bleibt unter allen Umständen dieselbe.[1]) Die Masse liefert also ein besseres Maass für die *Menge der Materie eines Körpers* als das Gewicht, und es ist logisch, die Einheit der Masse und nicht die des Gewichts zur Grundeinheit zu wählen, wie wir es nach dem Vorgang von Gauss auch fernerhin thun werden.

44. $\mathbf{F = m\gamma}$. — Die fundamentale Beziehung

$$F = m\gamma$$

lässt sich leicht auf den Fall einer variabelen Kraft und mit Hülfe der Projectionen auf eine beliebige Bahn ausdehnen.

Es ist also *bei einer beliebigen Bewegung die Kraft in jedem Augenblick gleich dem Product der Masse in die Beschleunigung.*

Dieser Satz gestattet die beiden grossen Probleme der Dynamik zu lösen: Bei bekannter Bewegung die Kraft und bei gegebener Kraft die Bewegung zu ermitteln.

---

[1]) *g* ändert sich gleichzeitig mit *P* und in demselben Verhältniss, so dass der Bruch $\frac{P}{g}$ constant bleibt.

In dem ersten Fall ist die Beschleunigung nach Grösse und Richtung bekannt; man kennt also die Kraft $F = m\gamma$ der Grösse und auch der Richtung nach, welche nothwendigerweise mit der Richtung der Beschleunigung zusammenfällt.

Im Allgemeinen ist die Bewegung durch ihre Projectionen gegeben

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \chi(t),$$
$$z = \psi(t).$$

Die Componenten der Geschwindigkeit sind also

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt} = v\cos\beta,$$
$$\frac{dz}{dt} = v\cos\gamma,$$

und es ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

die Componenten der Beschleunigung lauten

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma\cos a,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \gamma\cos b,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma\cos c,$$

wo

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}\cos a,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F}{m}\cos b,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F}{m}\cos c,$$

und

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1,$$

bestimmen also vollständig die Kraft nach Grösse und Richtung.

Ist umgekehrt die Kraft gegeben, so liefern die nämlichen Gleichungen direct die Beschleunigung. Kennt man ausserdem die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit, so kann man durch doppelte Integration die Bewegungsgleichungen des Punktes aufstellen.

45. Allgemeine Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes. — Die Dynamik eines materiellen Punktes ist also vollständig in den drei Gleichungen enthalten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F\cos a}{m},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F\cos b}{m},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F\cos c}{m},$$

oder

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

wo X, Y, Z die Componenten der Kraft oder besser der Resultante der Kräfte parallel zu den drei Coordinatenachsen bedeuten.

In manchen Fällen ist es vortheilhafter, die Bewegung auf

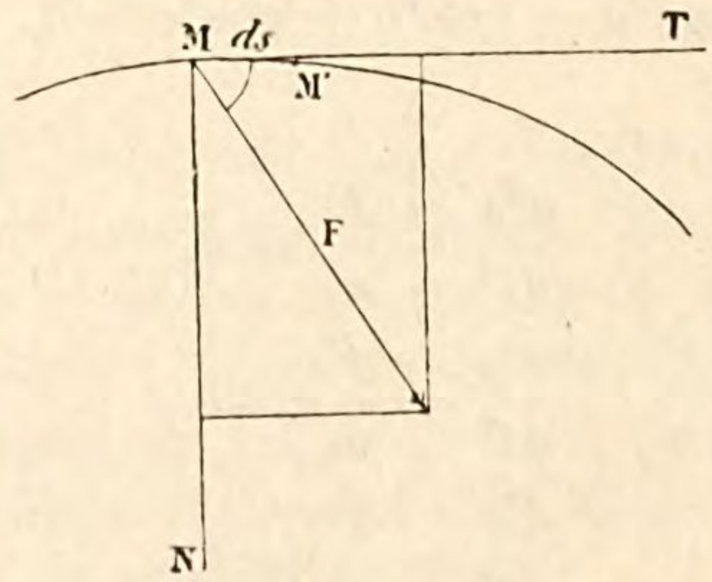


Fig. 61.

die Tangente und Hauptnormale zu projiciren; bezeichnet man mit ds das während der Zeit dt durchlaufene Bahnelement und

mit $(F,\ ds)$ den Winkel der Kraft mit dem letzteren, so ergiebt sich

$$F\cos(F,\ ds) = m\frac{dv}{dt},$$

$$F\sin(F,\ ds) = m\frac{v^2}{r}.$$

46. Lehrsatz von den Momenten der Bewegungsgrössen. — Wir wollen nun auf die allgemeinen Gleichungen zurückgehen. Multiplicirt man die erste derselben mit y, die zweite mit x und zieht dann die erste von der zweiten ab, so folgt

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = xY - yX.$$

Ebenso ist

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = yZ - zY,$$

und

$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = zX - xZ.$$

Diese Gleichungen lassen sich aber schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] = xY - yX,$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right] = yZ - zY,$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right] = zX - xZ,$$

und in dieser Form lassen sie sich leicht interpretiren.

Man nennt das Product mv der Masse eines Körpers in seine Geschwindigkeit gewöhnlich *Bewegungsgrösse*.[1]) Ferner kann man, da $xY - yX$ das Moment der Resultanten in Bezug auf die Achse Oz ist, $xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}$ als das Moment der Bewegungsgrösse mv in Bezug auf dieselbe Achse betrachten. Der in den obigen Formeln enthaltene Lehrsatz kann also folgendermaassen ausgesprochen werden:

---

[1]) Der Ausdruck Bewegungsgrösse ist nicht sehr glücklich gewählt; da jedoch andere dafür vorgeschlagene Bezeichnungen auch nicht viel besser sind, so ist der allgemein gebräuchliche Ausdruck beibehalten worden.

Lehrsatz. — *Bei der Bewegung eines materiellen Punktes ist die nach der Zeit genommene Derivirte des Momentes der Bewegungsgrösse in Bezug auf eine beliebige Achse gleich dem Momente der Resultante der Kräfte in Bezug auf dieselbe Achse.*

Folgerung. — Wenn die Resultante durch die Achse geht oder derselben parallel ist, mit einem Wort, wenn ihr Moment Null ist, so ist das Moment der Bewegungsgrösse constant. In diesem Fall projiciren wir die Bewegung des Punktes auf eine zur Achse senkrechte Ebene. Es sei die Projection $MM' = ds$ der während der

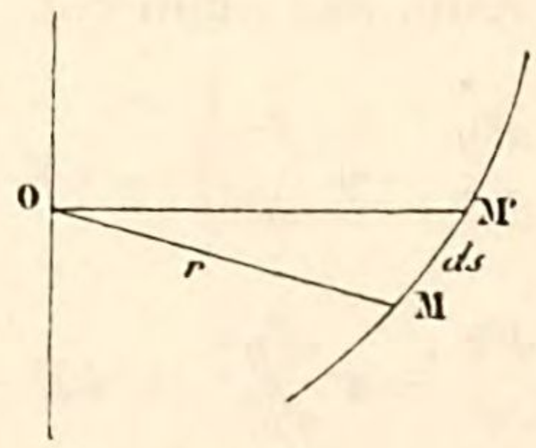


Fig. 62.

Zeit dt durchlaufene Bogen und $MO = r$ der Abstand desselben von der Achse; man hat dann

$$m \frac{ds}{dt} \times r = \text{const.},$$

oder durch Integration, wenn man $s_0 = 0$ setzt,

$$s = At,$$

wo A eine Constante bedeutet; *die von dem Radius vector OM beschriebenen Flächenräume sind* in diesem Falle *den Zeiten proportional, welche zur Beschreibung derselben nöthig sind;* dieser Lehrsatz ist unter dem Namen *Flächensatz* bekannt.

47. Satz von der Arbeit oder den lebendigen Kräften. — Unter den Wirkungen der Kräfte ist die *Arbeit*, welche sie verrichten, eine der wichtigsten. Die Kenntniss dieser Arbeit führt direct auf die Geschwindigkeit, während die Kenntniss von der Grösse der Kraft nur die Beschleunigung liefert. Bei gegebener Arbeit ist also nur noch eine Integration auszuführen. Ehe wir diese wichtige Behauptung beweisen, ist es nothwendig, genau zu definiren, was man unter der Arbeit einer Kraft versteht, und wir wollen zu diesem Zwecke zuerst einige sehr einfache Fälle betrachten.

Die gewöhnlichste Arbeit ist das Heben von Gewichten; handelt es sich um das Heben verschiedener Gewichte auf dieselbe Höhe, so werden die nach einander zu leistenden Arbeiten offenbar den Gewichten proportional sein. Hätte man andererseits dasselbe Gewicht nach einander auf verschiedene Höhen zu heben, so würden die einzelnen Arbeitsleistungen augenscheinlich den Höhen proportional sein. Hiernach verhalten sich die Arbeiten T und T', welche zum Heben der beiden verschiedenen Gewichte P und P' auf verschiedene Höhen H und H' aufgewandt werden müssen, wie die Producte aus Höhe und Gewicht:

$$\frac{T}{T'} = \frac{PH}{P'H'}.$$

Setzen wir für $P' = 1$ und $H' = 1$ auch $T' = 1$, mit anderen Worten, nehmen wir als Arbeitseinheit *das Kilogrammeter*, das heisst, diejenige Arbeit, welche nöthig ist, um 1 Kilogramm 1 Meter hoch zu heben, so haben wir

$$T = PH;$$

die zum Heben eines Gewichts P auf eine Höhe H nöthige Arbeit ist also durch das Product dieses Gewichts P in diese Höhe H dargestellt.

Was wir soeben für den Fall einer der Schwere entgegenwirkenden Kraft ausgeführt haben, können wir auf die Schwere selbst anwenden und im Allgemeinen auf jede constante Kraft, welche in der Richtung der Bewegung wirkt; wir werden als Arbeit einer Kraft für eine gegebene Verschiebung stets das Product aus der Kraft in die Verschiebung bezeichnen.

Wenn die Kraft im Sinne der Verschiebung wirkt, wenn sie die bewegende Ursache ist, so heisst die Arbeit *bewegende Arbeit* und wird positiv gezählt; wirkt die Kraft im entgegengesetzten Sinne und leistet Widerstand, so nennt man die Arbeit *widerstehende Arbeit* und rechnet sie negativ.

Wenn die als constant vorausgesetzte Kraft nicht im Sinne

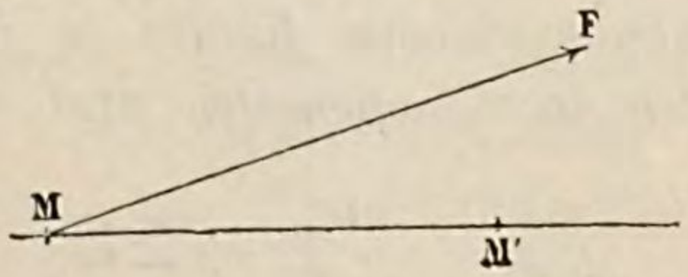


Fig. 63.

der Bewegung, die wir als geradlinig annehmen, wirkt, so leistet offenbar allein diejenige Componente der Kraft F Arbeit, welche

in die Bewegungsrichtung MM' fällt; als Maass der Arbeit nimmt man also in diesem Falle nach Coriolis und Poncelet

$$T = F \times MM' \times \cos(F, MM').$$

Ist die Kraft variabel und die Bahn krummlinig, so hat man immer noch während einer sehr kurzen Zeit als Ausdruck für die Elementararbeit der Kraft F

$$T_e = F \times ds \times \cos(F, ds),$$

und die einer endlichen Verschiebung entsprechende Arbeit wird das Integral dieses Ausdrucks sein, in welchem F als Function von s zu betrachten ist.

Nun ist (**45**)

$$F\cos(F, ds) = m\frac{dv}{dt}.$$

Wir können also schreiben

$$T_e = m\frac{dv}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}dv = mvdv = d\frac{mv^2}{2}.$$

Die Elementararbeit der an einem in Bewegung befindlichen materiellen Punkte wirkenden Kraft F ist also gleich dem Differential von $\frac{1}{2}mv^2$. Die Grösse $\frac{1}{2}mv^2$ nennt man die *lebendige Kraft* oder die *kinetische Energie* und wir können also sagen: *Die Elementararbeit ist gleich dem Differential der lebendigen Kraft.*[1])

Integriren wir längs des Weges s, so haben wir für die der Verschiebung s entsprechende Arbeit

$$T = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2),$$

wo v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet.

Offenbar ist *die Arbeit der Resultante der auf einen beweglichen materiellen Punkt wirkenden Kräfte in jedem Augenblick gleich der Summe der Arbeiten der Componenten* und wir können schreiben

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma T,$$

---

[1]) Bisweilen wird mv^2 als lebendige Kraft und $\frac{1}{2}mv^2$ als lebendige Potenz bezeichnet. — L.

wobei sich das Summenzeichen auf alle an dem betrachteten Punkt wirkende Kräfte bezieht; dieses *Princip der Äquivalenz zwischen Arbeit und lebendiger Kraft* lässt sich folgendermaassen aussprechen:

Die Änderung der lebendigen Kraft eines beweglichen Punktes während einer gewissen Zeit ist gleich der Summe der Arbeiten aller Kräfte, welche während dieser Zeit auf ihn wirken.

Von diesem Lehrsatz macht man in der Mechanik fortwährend Gebrauch.

Wir betrachten z. B. einen beweglichen Punkt, welcher unter der Wirkung der Schwere von A nach B längs einer beliebigen

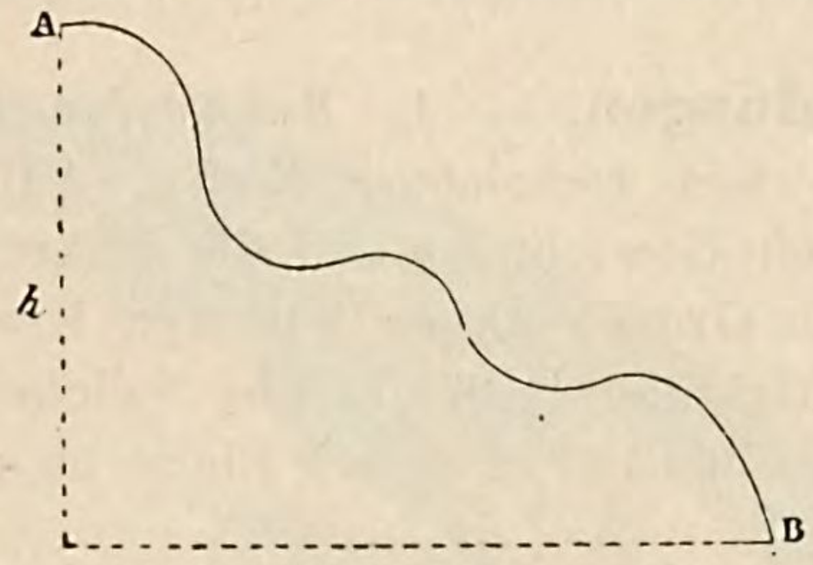


Fig. 64.

Curve AB herabfällt. Es sei h der senkrechte Abstand der beiden Punkte; die Arbeit der Schwere auf dem Wege von A nach B ist mgh, welches auch die Form der Curve sein möge; man hat also

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = mgh$$

oder

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Die Geschwindigkeit v in B ist vollständig unabhängig von dem Wege zwischen A und B; sie hängt nur von der Anfangsgeschwindigkeit in A und dem Höhenunterschiede zwischen A und B ab.

48. Anwendung der vorhergehenden Sätze auf Körper. — Wir wollen diese Lehrsätze auf einige einfache Fälle anwenden und namentlich solche auswählen, welche mit der Physik in möglichst nahem Zusammenhang stehen. Wir werden bald beweisen, dass in jedem Körper ein Punkt, der Schwerpunkt, existirt, welcher sich so verhält, als ob die ganze Masse des Körpers in ihm concentrirt wäre, und als ob alle äusseren Kräfte parallel zu sich selbst dorthin verlegt wären; die abstracte Betrachtung eines materiellen Punktes führt also in der That zu praktisch ver-

werthbaren Ergebnissen. Man muss sich aber bei dieser Art der Auffassung eine Vorstellung über die Constitution der Körper bilden und ferner ist ein neues Axiom nothwendig. Dieses dritte von Newton herrührende Axiom ist das Princip von Wirkung und Gegenwirkung und kann folgendermaassen formulirt werden:

49. Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. — *Sind zwei materielle Punkte m und m' vorhanden, so übt jeder der Punkte auf den anderen eine nach der Verbindungslinie gerichtete Kraft aus; die Gegenwirkung von m' auf m ist der Wirkung von m auf m' gleich und entgegengesetzt.*

50. Anwendungen. — 1. *Reibungslose Bewegung eines materiellen Punktes auf einem horizontalen Kreise.* Auf den Punkt wirken nur zwei Kräfte, sein Gewicht mg und die senkrechte Gegenwirkung der Curve N. Die Grösse dieser letzteren Kraft ist eben so unbekannt als ihre Richtung in der Ebene, welche im Punkte M senkrecht zur Curve errichtet ist; in dieser Ebene möge sie mit der in der

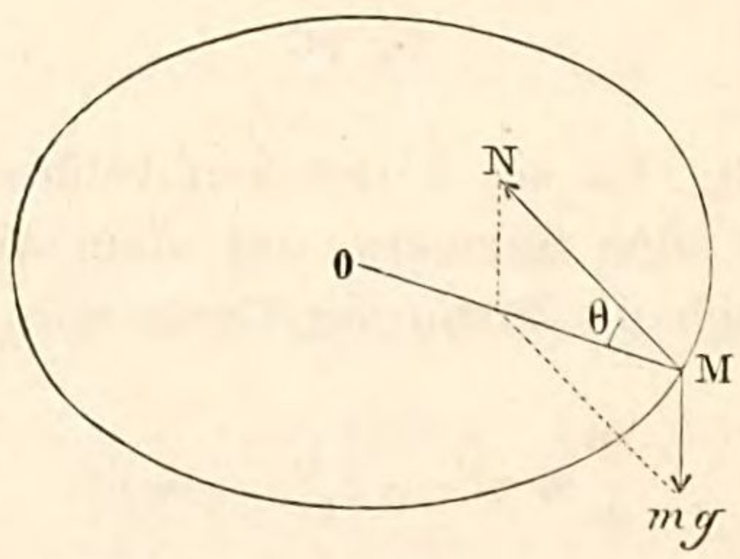


Fig. 65.

Horizontalebene gelegenen Hauptnormalen MO einen gewissen Winkel Θ bilden. Da die beiden wirksamen Kräfte senkrecht zur Bahn stehen, so folgt (**23**), dass die Bewegung gleichförmig sein muss, und dass die Resultante der beiden Kräfte nach der Hauptnormale MO gerichtet und gleich $\frac{mv^2}{r}$ ist; mit Hülfe dieser Überlegung lassen sich N und Θ bestimmen; es ist nämlich

$$mg = \frac{mv^2}{r} \operatorname{tg} \Theta,$$

also

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{gr}{v^2}$$

und

$$N = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

Je grösser die Geschwindigkeit ist, desto grösser ist auch die Reaction; das Material des Kreises muss diese Gegenwirkung ohne zu brechen ausüben können, und muss kräftig genug sein, um die gleiche und entgegengesetzt gerichtete Wirkung des materiellen Punktes auszuhalten, welcher mit einer Kraft $-N$ auf den Kreis drückt.

Man sieht auch, dass Θ desto kleiner ist, die Richtung der Reaction sich also mehr und mehr der Ebene des Kreises nähert,

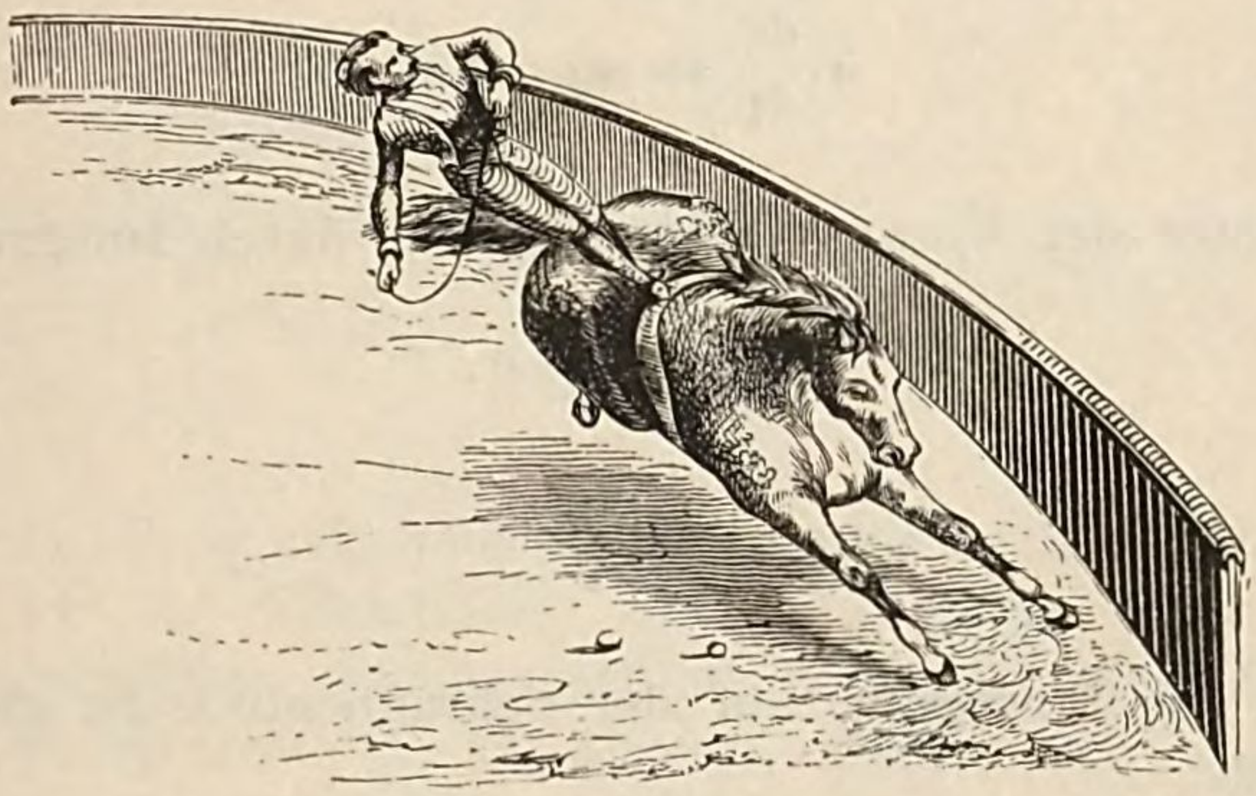


Fig. 66.

je grösser die Geschwindigkeit wird. In einem Cirkus neigen sich Pferd und Reiter um so stärker nach der Horizontalen hin, je rascher die Gangart ist.

2. *Bewegung eines materiellen Punktes in einer auf einem vertikalen*

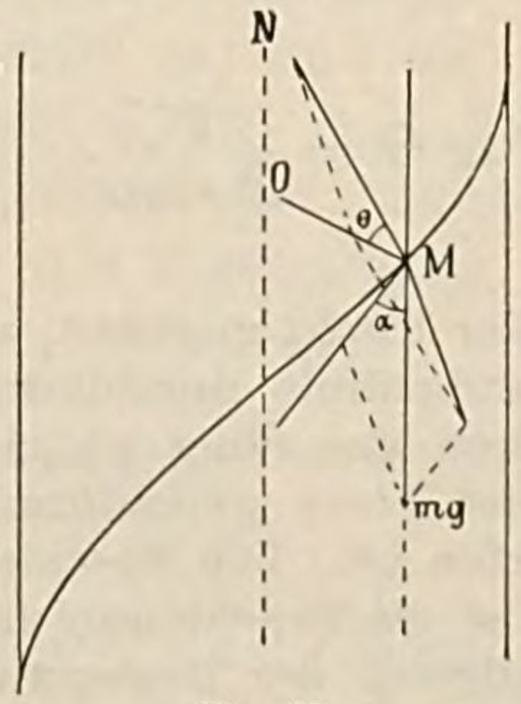


Fig. 67.

Cylinder gezeichneten Schraubenlinie. — Der Punkt M ist wieder zwei Kräften unterworfen, seinem Gewicht mg und der von der Curve

ausgeübten senkrechten Gegenwirkung N, welche mit der Hauptnormale MO einen Winkel Θ bildet. In diesem Fall wirkt jedoch das Gewicht nicht mehr senkrecht zur Curve, sondern bildet mit der Tangente in M einen Winkel α; derselbe ist dem constanten Winkel gleich, welchen die Schraubenlinie mit jeder Erzeugenden des Cylinders einschliesst. Zerlegt man also diese Kraft mg in zwei andere, deren eine $mg\cos\alpha$ nach der Tangente in M gerichtet ist, während die andere $mg\sin\alpha$ in der Normalebene liegt, so hat man drei Kräfte, eine tangentielle, $mg\cos\alpha$, und zwei andere normale, N und $mg\sin\alpha$.

Die Betrachtung der ersten Kraft ergiebt

$$m\frac{dv}{dt} = mg\cos\alpha,$$

woraus, unter der Voraussetzung $v_0 = 0$, durch Integration folgt

$$v = gt\cos\alpha;$$

also

$$s = \frac{gt^2\cos\alpha}{2},$$

das heisst, die Bewegung auf der Schraubenlinie ist gleichförmig beschleunigt.

Die senkrechte Gegenwirkung ergiebt sich sofort, wenn man sich erinnert, dass der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie $\frac{r}{\sin^2\alpha}$ [1]) ist; wir finden

$$N = m\sin\alpha\sqrt{g^2 + \frac{v^4\sin^2\alpha}{r^2}}$$

und

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{gr}{v^2\sin\alpha};$$

---

[1]) Es sei ein materieller Punkt gegeben, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Schraubenlinie durchläuft. Diese Bewegung kann man sich entstanden denken aus einer gleichförmigen Bewegung auf einem Kreise, welcher selbst einer gleichförmigen, geradlinigen Translationsbewegung unterworfen ist. Die Beschleunigung der zweiten Bewegung ist Null, folglich ist die Beschleunigung auf der Schraubenlinie dieselbe wie die Beschleunigung der Bewegung auf dem Kreise; sie ist also nach MO gerichtet und gleich $\frac{v_1^2}{r} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{r}$. Man hat somit $\frac{v^2\sin^2\alpha}{r} = \frac{v^2}{\varrho}$, folglich $\varrho = \frac{r}{\sin^2\alpha}$.

je länger also der Körper auf der Schraubenlinie herabfällt, desto grösser wird N, während Θ immer mehr abnimmt.

3. *Reibungslose Bewegung eines materiellen Punktes auf einem vertikalen Kreis O.* Der Punkt, welcher sich zu Beginn ohne Anfangsgeschwindigkeit in A befindet, fällt bis B, steigt dann bis nach

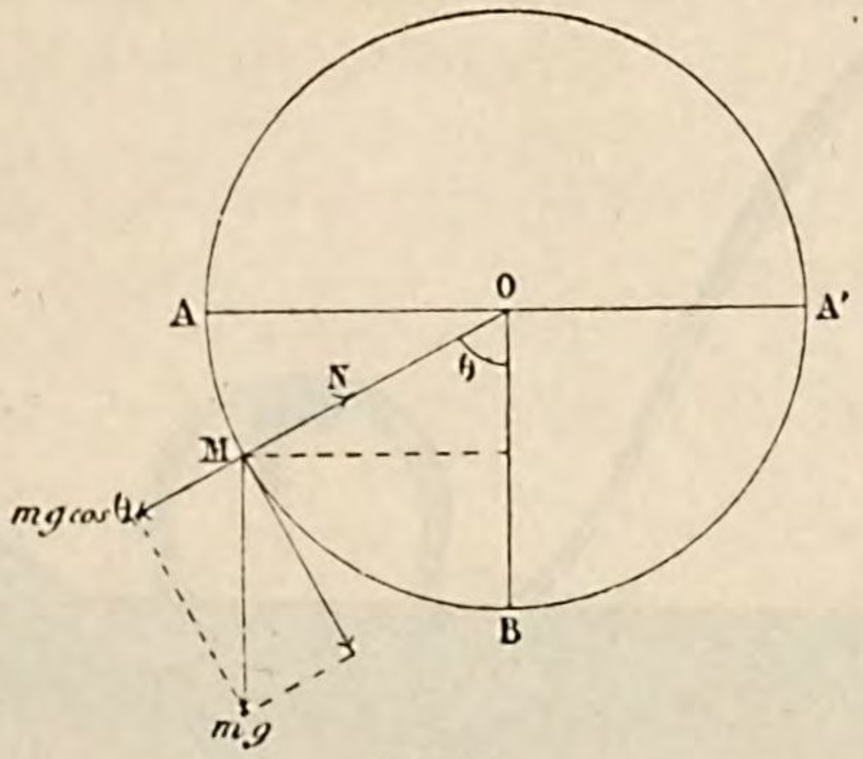


Fig. 68.

A', fällt nach B zurück und kommt wieder nach A; dies wiederholt sich bis ins Unendliche. Der bewegliche Punkt ist zwei Kräften unterworfen, seinem vertikal wirkenden Gewicht mg und der normalen Reaction N des Kreises, welche nach dem Radius gerichtet ist. Da die Bewegung auf einem Kreise stattfindet, muss immer die Beziehung bestehen

$$N - mg\cos\Theta = \frac{mv^2}{r}.$$

Beachten wir, dass die Arbeit der Kraft N, welche immer senkrecht zur Bahn wirkt, Null ist, und die Arbeit der nach Grösse und Richtung constanten Kraft mg gleich dem Product aus dieser Kraft in die Projection des durchlaufenen Weges AM auf die Richtung der Kraft, die Vertikale, ist, so ergiebt der Satz von der Arbeit (**47**)

$$mgr\cos\Theta = \frac{mv^2}{2}.$$

Man findet also

$$N = 3\,mg\cos\Theta:$$

Die Gegenwirkung der Curve ist dreimal so gross als die senkrechte Componente des Gewichts. Wenn man also anstatt der kreisförmigen Rinne AA' einen in O befestigten Faden nähme, um

den materiellen Punkt zu halten, so würde N die Spannung dieses Fadens sein.

Wir wollen bei diesem Beispiel bleiben und annehmen, dass der bewegliche Punkt in B mit einer Anfangsgeschwindigkeit

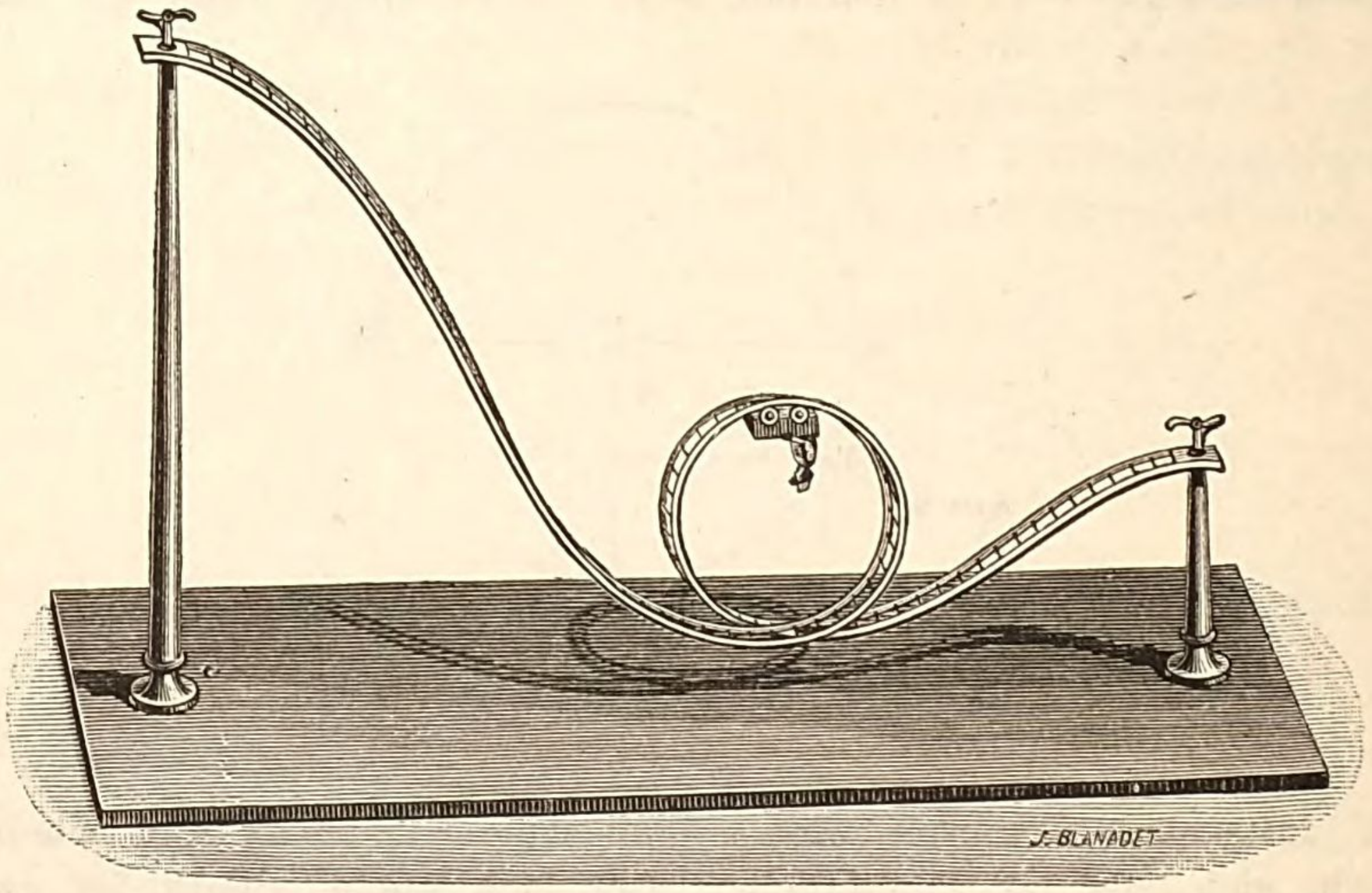


Fig. 69.

$v_0 = \sqrt{2gh}$ ankomme, welche er vorher durch einen Fall von der Höhe h erlangt haben möge; bei der in Fig. 69 abgebildeten Vorrichtung, welche man Centrifugaleisenbahn nennen kann, findet dies wirklich statt. Damit der bewegliche Punkt bis B' ansteigen

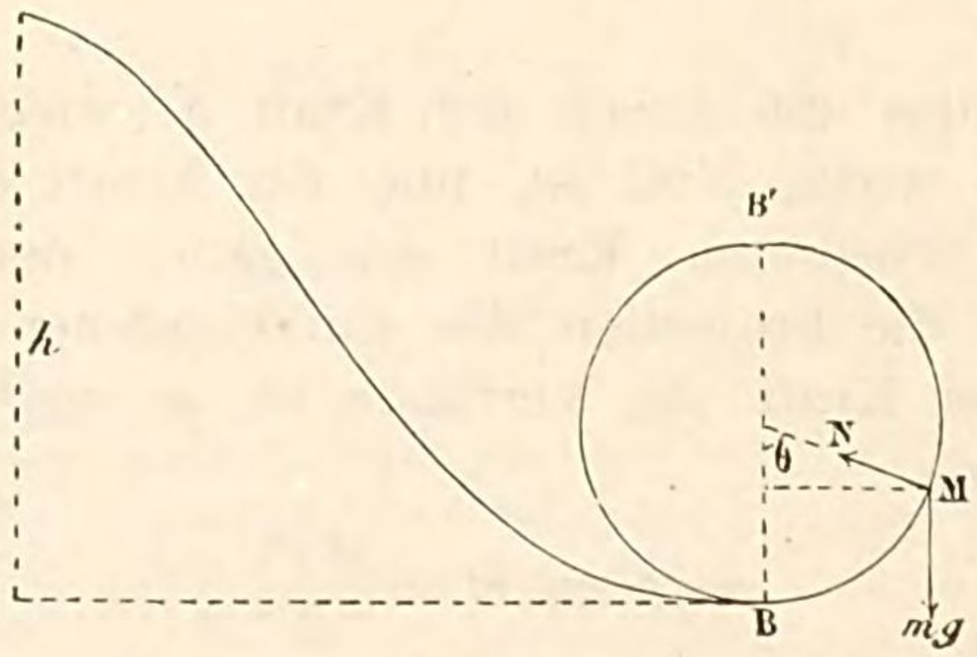


Fig. 70.

kann, muss offenbar $h > 2r$ sein; doch diese Bedingung genügt noch nicht dafür, dass er auch den ganzen Kreis durchläuft. Der bewegliche Punkt wird nur dann auf der Curve bleiben, wenn er fortwährend gegen dieselbe gepresst wird, wenn also die senkrechte

Gegenwirkung des Kreises immer nach dem Mittelpunkt gerichtet ist. Ist N diese Gegenwirkung, so hat man

$$N - mg\cos\Theta = \frac{mv^2}{r}.$$

Nach dem Lehrsatz von der Arbeit ist aber, wenn sich der Punkt in M, in der Höhe z über B, befindet,

$$v^2 - v_0^2 = -2gz,$$

oder

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$
$$= 2g(h - z).$$

Man hat also, da $\cos\Theta = \frac{r-z}{r}$ ist,

$$N = \frac{mg}{r}(r + 2h - 3z).$$

Wenn der Körper ansteigt, nimmt z zu, also N ab; N muss aber positiv bleiben, wenn der Körper nicht fallen soll. Es ergiebt sich somit die Bedingung

$$r + 2h - 3(2r) > 0,$$

das heisst,

$$h > \frac{5}{2}r.$$

Wenn die Höhe h zwischen $2r$ und $\frac{5}{2}r$ liegt, wird N an irgend einer Stelle Null werden, und da der bewegliche Punkt dort eine gewisse Geschwindigkeit haben wird, so bewegt sich der Körper in einer Parabel weiter; die letztere hat an dieser Stelle denselben Krümmungshalbmesser wie der Kreis, da für diesen Moment die nämliche Gleichung $mg\cos\Theta = -\frac{mv^2}{r}$ die Bewegung auf beiden Curven darstellen würde.

51. Kraft der Trägheit. — Alle diese Aufgaben über Bewegung können durch Einführung einer fingirten Kraft, *der Kraft der Trägheit*, $-m\gamma$, welche der Resultanten der thatsächlich auf den Punkt wirkenden Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, auf

Gleichgewichtsprobleme zurückgeführt werden. Man kann also die Bewegungsgleichungen

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

so auffassen, dass sie das Gleichgewicht der Kraft der Trägheit mit den wirkenden Kräften ausdrücken.[1])

Die Kraft der Trägheit kann in zwei andere Kräfte zerlegt werden, deren eine in der Richtung der Tangente der tangentiellen Beschleunigung entgegenwirkt, während die andere längs der Hauptnormale nach der dem Krümmungsmittelpunkt abgewandten Seite gerichtet ist und in Folge dessen *Centrifugalkraft* genannt wird.

52. Centrifugalkraft. — Bei der gleichförmigen Kreisbewegung reducirt sich die Kraft der Trägheit auf die zweite Componente. Folglich muss bei dieser Bewegung zwischen der Resultante der thatsächlich wirkenden Kräfte und einer der Centripetalkraft entgegengesetzt gleichen Kraft, der Centrifugalkraft, Gleichgewicht bestehen; die letztere ist folglich gleich $\frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ und im Sinne des Halbmessers nach dem Umfang hin gerichtet. Wenn es auch vollkommen erlaubt ist, sich die Verhältnisse derart vorzustellen, so darf man doch nicht vergessen, dass die *Centri-*

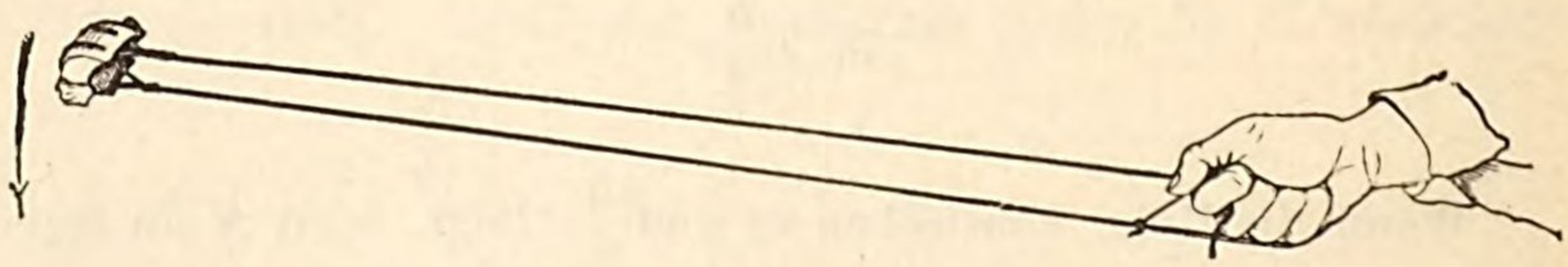


Fig. 71.

fugalkraft eine fingirte Kraft ist, welcher keine wirkliche Existenz zukommt. Die thatsächlich und nothwendig wirkende Kraft ist

---

[1]) Diese Kraft der Trägheit äussert sich bald als Widerstand, bald als Kraft. Wenn z. B. jemand auf Schienen einen Wagen fortschiebt, so hat er zur Unterhaltung einer gleichförmigen Bewegung nur die zur Überwindung der passiven Widerstände erforderliche geringe Arbeit zu leisten; will er aber die Bewegung beschleunigen, so muss er seine Kräfte mehr anstrengen und die Gegenwirkung wächst ebenfalls; dieselbe wirkt also wie ein Widerstand. Soll im Gegentheil die Bewegung verlangsamt werden, z. B. durch Ziehen an einem Strick, so ist die Wirkung negativ, die Gegenwirkung ist also positiv und spielt die Rolle einer Kraft.

die Centripetalkraft, welche den beweglichen Punkt, der sich in der Richtung der Tangente wegzubewegen sucht, fortwährend nach dem Mittelpunkt hinzieht; hört diese Kraft auf zu wirken (lässt man z. B. die Schnur einer *Schleuder* los), so bewegt sich der Körper wirklich in der Tangente und keineswegs in der Richtung des Radius weiter, wie es der Fall sein müsste, wenn die Centrifugalkraft thatsächlich vorhanden wäre. Mit dieser Einschränkung ist es nicht nur erlaubt, sondern oft sogar sehr bequem, von der Centrifugalkraft Gebrauch zu machen. Das erste Beispiel in **50** lässt sich in dieser Weise auf das Gleichgewicht von drei Kräften zurückführen, nämlich das Gewicht mg des Punktes, die senkrechte Gegenwirkung N der Curve und die nach MK gerichtete Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{r}$; die senkrechte Gegenwirkung N muss folglich der Resultante

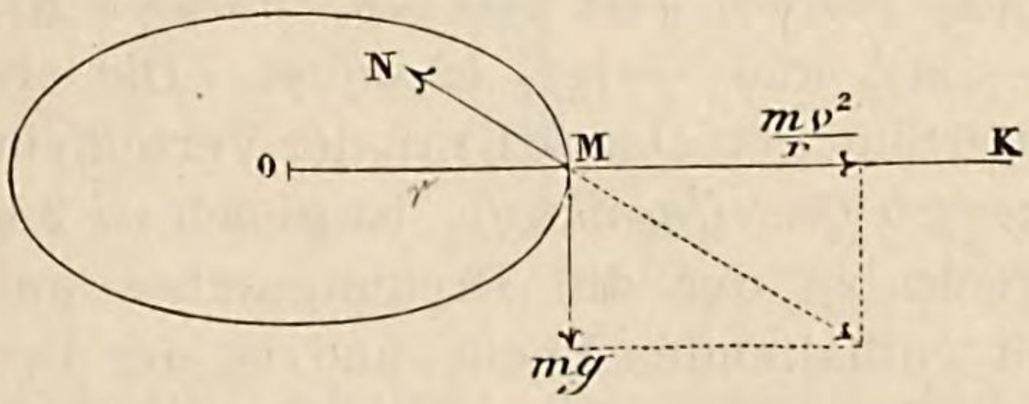


Fig. 72.

der Kräfte mg und $\frac{mv^2}{r}$ entgegengesetzt gleich sein; wir kommen so zu denselben Ergebnissen, welche wir oben auf andere Weise gefunden haben. Auch bei den folgenden Betrachtungen wird die Einführung der Centrifugalkraft von Nutzen sein.

53. Relatives Gleichgewicht und relative Bewegung. — Der allgemeine Lehrsatz $F = m\gamma$, wo F die Resultante der auf den materiellen Punkt mit der Masse m wirkenden Kräfte und γ die Beschleunigung der Bewegung bedeutet, setzt voraus, dass die Bewegung auf feste Achsen bezogen sei. Für bewegliche Achsen gilt der Satz nicht mehr; die Lösung wird sich indessen unmittelbar aus den in der Kinematik über relative Bewegungen bewiesenen Sätzen ergeben. Die Aufgabe lautet jetzt folgendermaassen: Ein materieller Punkt bewegt sich in einem System A, welches selbst wieder eine beliebige Bewegung in einem festen System B ausführt; welches ist für die relative Bewegung von m in A die Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung?

Für die absolute Bewegung von m in B ist stets

$$F = m\gamma.$$

Nun haben wir aber nach dem Lehrsatz von Coriolis (**29**)

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_r} + \overline{\gamma_e} + \overline{\gamma_c},$$

folglich

$$\overline{m\gamma} = \overline{m\gamma_r} + \overline{m\gamma_e} + \overline{m\gamma_c},$$

und

$$\overline{m\gamma_r} = \overline{m\gamma} - \overline{m\gamma_e} - \overline{m\gamma_c},$$

das heisst: Fügt man zu der Resultante der thatsächlich wirkenden Kräfte $m\gamma$ zwei fingirte Kräfte $-m\gamma_e$ und $-m\gamma_c$ hinzu, so stellt die Resultante dieser drei Kräfte genau die Kraft $m\gamma_r$ dar, welche in einem festen System dem Punkte dieselbe (in Wirklichkeit auf das bewegliche System A bezogene) Beschleunigung γ_r geben würde. Mit anderen Worten, *man kann von der Beweglichkeit der Achsen unter der Bedingung absehen, dass man den wirkenden Kräften, $m\gamma$, zwei fingirte Kräfte $-m\gamma_e$ und $-m\gamma_c$ hinzufügt.* Die erstere ist die im entgegengesetzten Sinn gerechnete Kraft der Verschiebung, die zweite, oder *zusammengesetzte Centrifugalkraft,* ist gleich $-2m\omega v_r \sin(\omega, v_r)$; sie steht senkrecht zu der die Drehungsachse und die relative Geschwindigkeit enthaltenden Ebene und ist der Drehungsrichtung entgegengesetzt oder so gerichtet, dass sie die Drehungsachse zur Rechten und die relative Geschwindigkeit zur Linken hat.

54. Aufgaben über relatives Gleichgewicht. — Bei den Aufgaben über relatives Gleichgewicht ist diese zweite Kraft gleich Null, da $v = 0$ ist. Man hat also den physischen Kräften nur die erste fingirte Kraft hinzuzufügen und die gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden.

Es sei z. B. das relative Gleichgewicht eines materiellen Punktes in einem System zu suchen, welches sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine Achse dreht. Die Beschleunigung der Verschiebung γ_e ist dann $\omega^2 r$ und nach dem Centrum hin gerichtet; die fingirte Kraft $-m\gamma_e$ wird also gleich $-m\omega^2 r$, wobei das Minuszeichen anzeigt, dass sie nach der Peripherie hingerichtet ist. Die fingirte Kraft ist in diesem Fall also einfach die Centrifugalkraft, und die Bedingung für das relative Gleichgewicht besteht darin, dass die Resultante F der physischen Kräfte der Centrifugalkraft gleich und entgegengesetzt ist.

Man wird in dieser Weise Fragen über das relative Gleichgewicht auf der Erdoberfläche lösen. In dem über die Schwere handelnden Abschnitte wird sich Gelegenheit bieten, darauf zurück zu kommen.

Wir wollen hier nur noch einige Versuche behandeln, durch

welche man bisweilen die Existenz der Centrifugalkraft beweisen zu können glaubt.

1. *Centrifugalregulator.* — Diese Vorrichtung besteht im Wesentlichen aus zwei Metallkugeln, welche sich an den Enden zweier

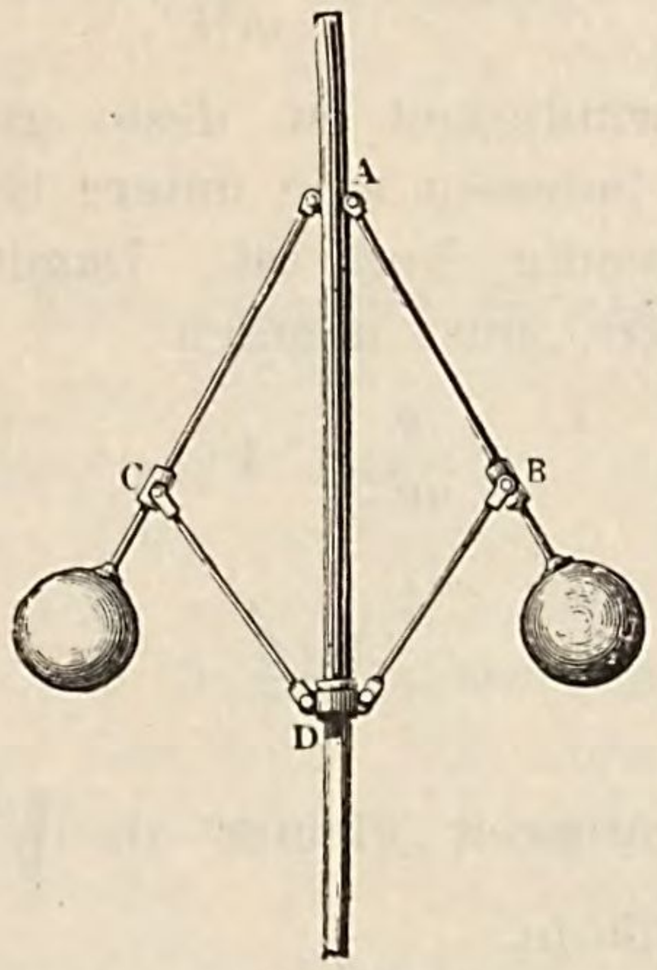


Fig. 73.

Stangen AC und AB befinden; die Stangen sind in A an einer gleichförmig rotirenden Achse in Gelenken befestigt und ausserdem durch zwei andere Stangen CD und BD in Scharnieren mit einem auf der Achse beweglichen Ringe D verbunden. Bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit heben sich die Kugeln, und dieser Hub wächst bei zunehmender Geschwindigkeit. Nehmen

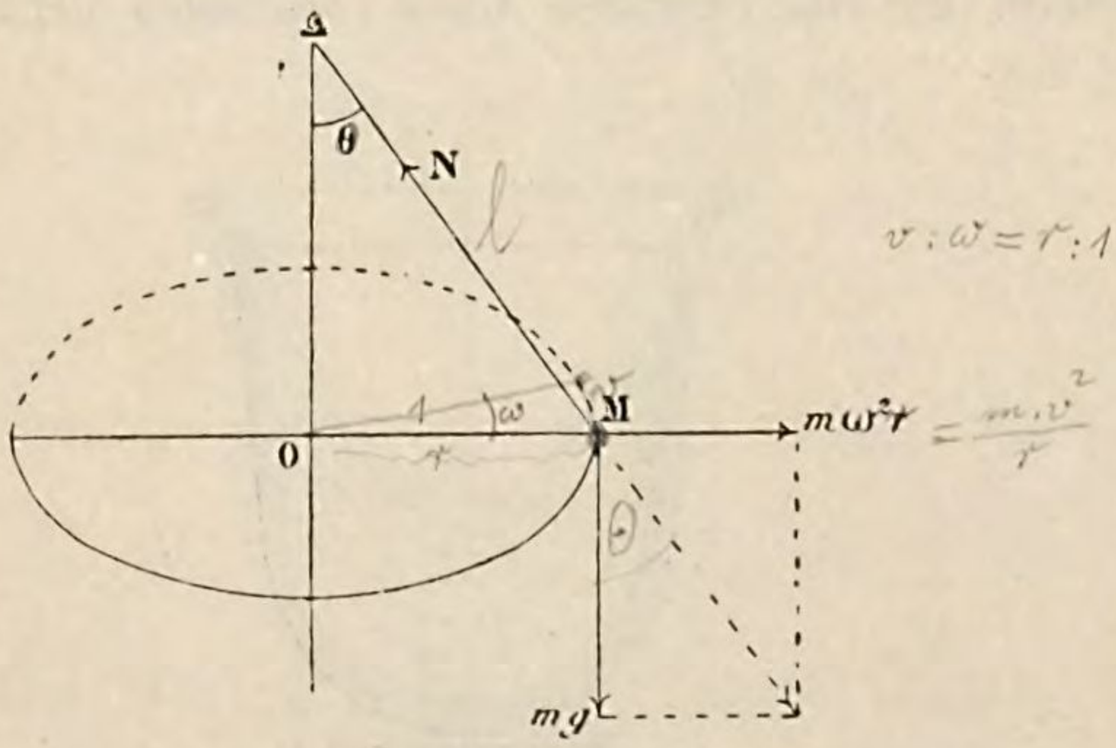


Fig. 74.

wir an, das System sei bei einem gewissen Ausschlag Θ im Gleichgewicht. Auf jeder Seite müssen sich dann die Spannung N der Stange, das Gewicht mg der Kugel und die Centrifugalkraft $m\omega^2 r$ das Gleichgewicht halten. Wir haben also

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 l \sin\Theta}{g},$$

wo l die Länge der Stange AM bedeutet; folglich

$$\cos\Theta = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Je grösser die Geschwindigkeit ist, desto grösser wird auch der Ausschlag. Es giebt indessen eine untere Grenze, unter welcher der Ausschlag nothwendig Null ist. Damit die Formel einen reellen Ausschlag liefert, muss nämlich

$$\frac{g}{\omega^2 l} < 1$$

sein, das heisst,

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Solange die Geschwindigkeit kleiner als $\sqrt{\frac{g}{l}}$ ist, verlässt das Pendel nicht die Vertikale.

Man kann leicht für jede Stellung der Stange ihre Spannung N bestimmen.

Es ist klar, dass dieselbe Frage auch durch alleinige Betrachtung der thatsächlich wirkenden Kräfte mg und N erledigt werden kann; man hat nur abzuleiten, dass die Resultante der Kräfte die zu einer gleichförmigen Kreisbewegung nothwendige Centripetalkraft liefert.

2. *Oberflächenform einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit, welche in einem um eine vertikale Achse rotirenden Gefäss enthalten ist.* —

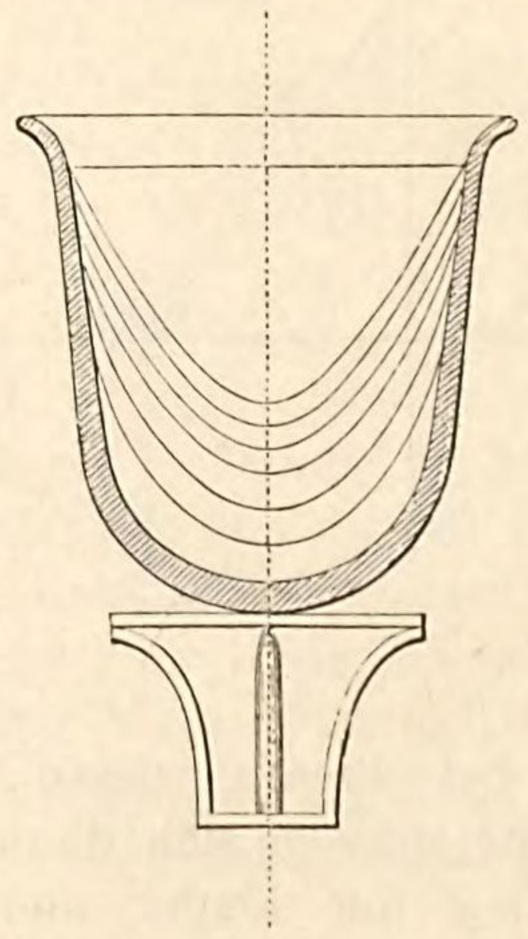


Fig. 75.

Wir werden in der Hydrostatik sehen, dass sich die Oberfläche zu einem Paraboloid krümmt, dessen Scheitel in der Richtung der Achse um so tiefer liegt, je beträchtlicher die Drehungsgeschwindigkeit ist. Die Leichtigkeit, mit welcher man mit Hülfe der Centrifugalkraft die mathematischen Bedingungen für die Erscheinung aufstellt, darf indessen nicht über die wahre Natur dieser Kraft täuschen.

55. Aufgaben über relative Bewegung. — Wir wollen jetzt einige Aufgaben über relative Bewegung behandeln.

1. *Relative Bewegung eines materiellen Punktes, der längs einer horizontalen Geraden zu gleiten gezwungen ist; die letztere rotirt ihrerseits um eine vertikale Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit.* — Es sei M der Punkt, Ox die Gerade, auf welcher er gleitet, und Oz die Drehungsachse der Geraden. Wir nehmen an, die Drehung gehe im positiven Sinn (von Ox nach Oy) mit der Winkelgeschwindigkeit ω vor sich. Die thatsächlich wirkenden Kräfte sind das Gewicht $P = mg$ des beweglichen Punktes und die senkrechte Gegenwirkung N der Geraden, welche mit der Vertikalen

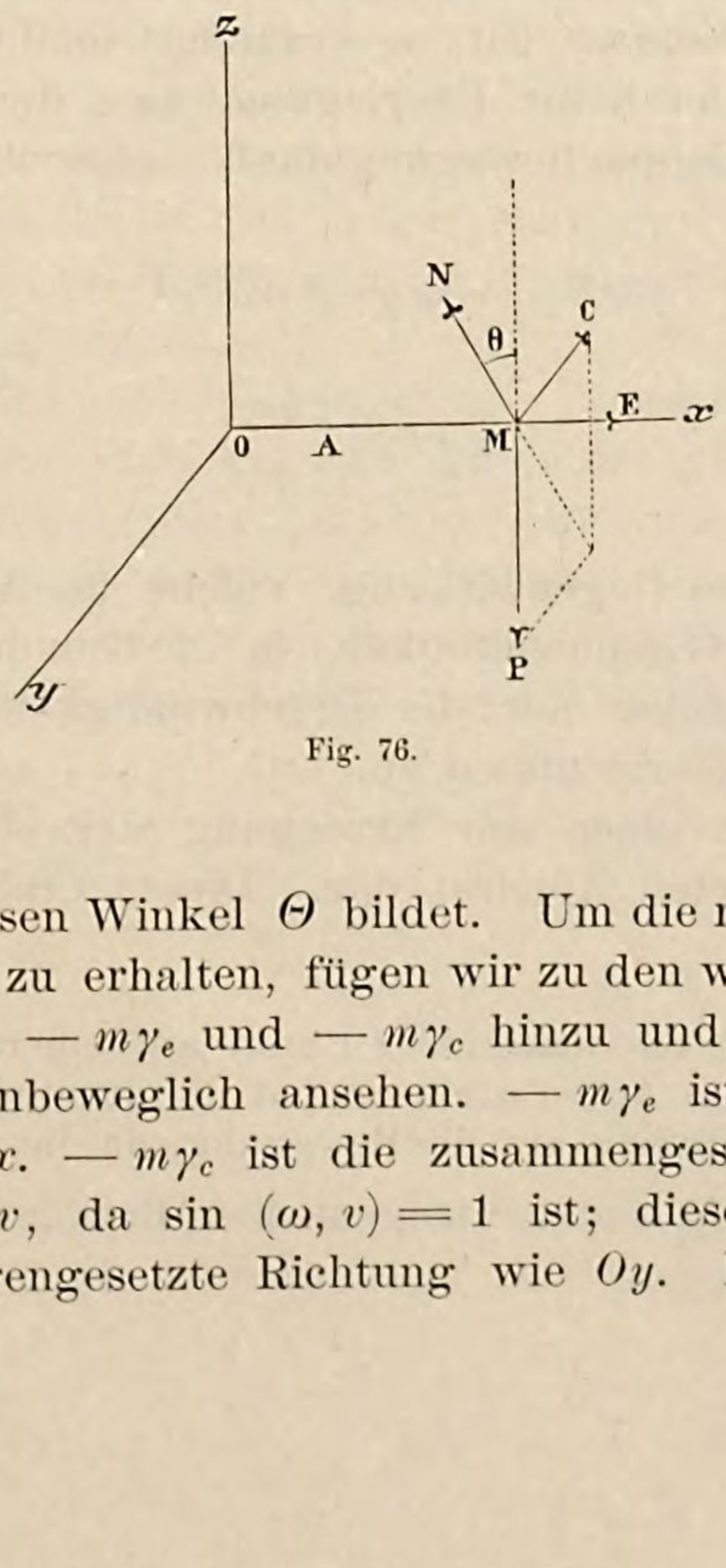


Fig. 76.

in M einen gewissen Winkel Θ bildet. Um die relative Bewegung von M längs Ox zu erhalten, fügen wir zu den wirksamen Kräften die zwei fingirten $-m\gamma_e$ und $-m\gamma_c$ hinzu und können dann die Gerade Ox als unbeweglich ansehen. $-m\gamma_e$ ist die Centrifugalkraft $ME = m\omega^2 x$. $-m\gamma_c$ ist die zusammengesetzte Centrifugalkraft $MC = 2m\omega v$, da $\sin(\omega, v) = 1$ ist; dieselbe hat (wenn v positiv ist) entgegengesetzte Richtung wie Oy. Es sind also drei

normale Kräfte: P, N, und MC und eine nach Ox gerichtete Kraft ME vorhanden; von dieser letzteren allein hängt die resultirende Bewegung ab.[1])

Wir haben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 x,$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x;$$

denken wir uns den Punkt anfänglich in A (x_0) ohne Anfangsgeschwindigkeit $(v_0 = 0)$, so ergiebt sich durch Integration:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_0\omega}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

$$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right).$$

Der Punkt bewegt sich also mit wachsender Geschwindigkeit in positivem Sinn.

Wenn auch die zusammengesetzte Centrifugalkraft auf die Bewegung keinen Einfluss hat, so verändert sie doch die senkrechte Gegenwirkung. Durch die Überlegung, dass die normalen Kräfte sich bei der geradlinigen Bewegung das Gleichgewicht halten müssen, findet man

$$N = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2 v^2}$$

und

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{2\omega v}{g}.$$

Die senkrechte Gegenwirkung, welche im Anfang, wenn der Punkt sich ohne Geschwindigkeit in A befindet, vertikal und gleich mg ist, wächst mit der Geschwindigkeit und neigt sich immer mehr der Horizontalen zu.

Fig. 77 stellt einen zur Erzeugung der eben besprochenen Bewegung geeigneten Apparat dar. Dieser *Centrifugalapparat* be-

---

[1]) Bewegt sich ein materieller Punkt auf einer beliebigen Curve, welche sich um eine Achse dreht, so hat die zusammengesetzte Centrifugalkraft keinen Einfluss auf die Bewegung, da dieselbe stets senkrecht zu v wirkt und folglich zur tangentiellen Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ keinen Beitrag liefern kann.

steht im Wesentlichen aus einer Art von Kreisel A, welcher auf einem festen Gestell in rasche Drehung versetzt werden kann.

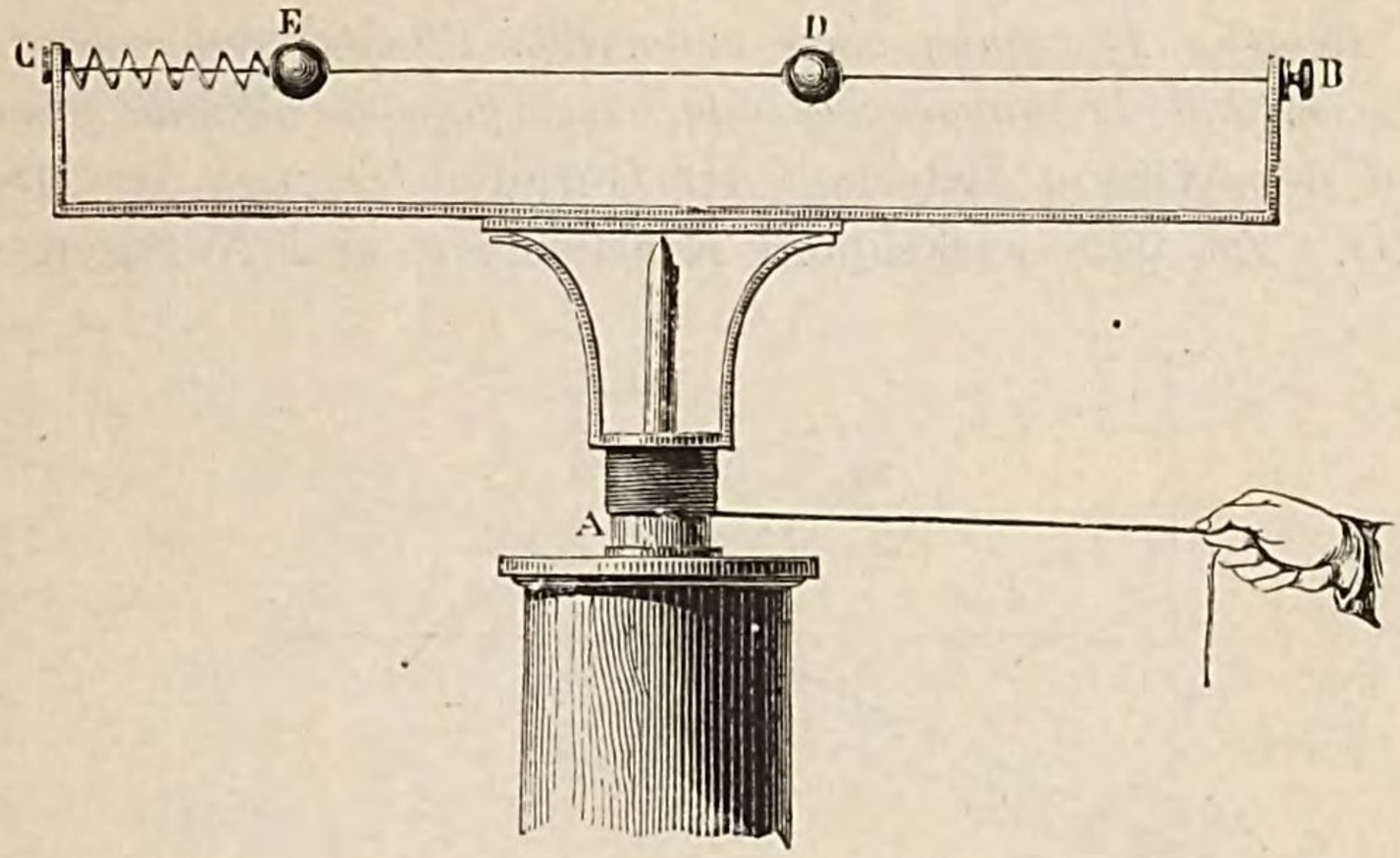


Fig. 77.

Auf diesen Kreisel lassen sich verschiedene Theile aufsetzen. Im vorliegenden Fall befestigt man auf demselben ein Rechteck, dessen obere horizontale Seite aus einem straff gespannten Eisendraht CB gebildet wird; längs dieses Drahtes kann eine durchbohrte Elfenbeinkugel D gleiten. Bringt man den Apparat in lebhafte Rotation, so gleitet die Kugel sehr rasch nach B hin. In E befindet sich eine ähnliche Kugel, welche nach C zu gelangen sucht, aber daran durch eine Feder verhindert wird; sie drückt die Feder so weit zusammen, bis die Spannkraft derselben der Centrifugalkraft entgegengesetzt gleich ist.

Hält man sich an die thatsächlich wirkenden Kräfte, so zeigt dieser Versuch nur, dass zur Erzeugung der gleichförmigen Kreisbewegung nothwendig eine nach dem Mittelpunkt gerichtete Kraft vorhanden sein muss, welche den Körper, der sich vom Centrum zu entfernen sucht, immer wieder nach diesem Punkt hin zurückführt. Geht nämlich die Gerade von Ox in eine benachbarte Lage

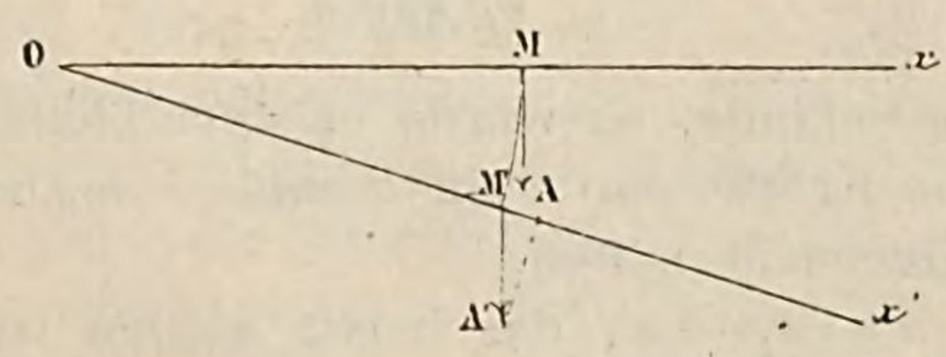


Fig. 78.

Ox' über, so behält der durch die Gerade von M nach M' mitgenommene materielle Punkt in M' seine zu Ox senkrechte Ge-

schwindigkeit MA bei: In M' bildet folglich seine Geschwindigkeit $M'A'$ mit Ox' nicht mehr einen rechten Winkel und hat also eine Componente in der Richtung von Ox'.

2. *Relative Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Geraden, welche die vertikale Drehungsachse unter einem gegebenen Winkel schneidet.* — Es sei α der Winkel zwischen der Geraden Ox und der Drehungsachse Oz. Zu den wirksamen Kräften mg und N fügen wir die

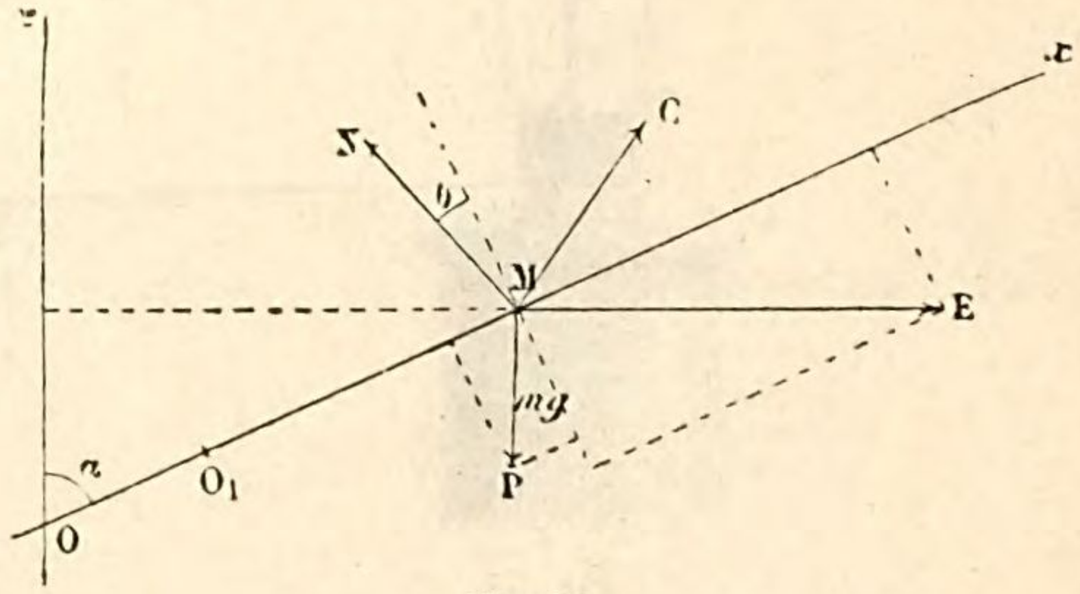


Fig. 79.

beiden fingirten Kräfte hinzu, die Centrifugalkraft $ME = m\omega^2 x \sin\alpha$ und die zusammengesetzte Centrifugalkraft $MC = 2m\omega v \sin\alpha$. Wir zerlegen das Gewicht in zwei Componenten, deren eine $mg\cos\alpha$ nach Ox, die andere $mg\sin\alpha$ zu dieser Geraden senkrecht gerichtet ist. Ebenso zerlegen wir die Centrifugalkraft nach denselben Richtungen in zwei Kräfte $m\omega^2 x\sin^2\alpha$ und $m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$. Die senkrecht wirkenden Kräfte $mg\sin\alpha$, N, $m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$ und $2m\omega v\sin\alpha$ halten sich das Gleichgewicht. Die beiden Kräfte $m\omega^2 x\sin^2\alpha$ und $-mg\cos\alpha$ erzeugen die relative Beschleunigung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x\sin^2\alpha - g\cos\alpha.$$

Wenn der bewegliche Körper sich ohne Anfangsgeschwindigkeit in dem durch die Gleichung

$$x_1 = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha},$$

definirten Punkte befände, so würde er dort bleiben, da in diesem Falle die beiden Kräfte $m\omega^2 x\sin^2\alpha$ und $-mg\cos\alpha$ sich gegenseitig das Gleichgewicht halten.

Setzen wir $x = x_1 + x'$, das heisst, zählen wir die Abscissen x' von O_1 aus, so haben wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x'\sin^2\alpha,$$

d. h. die im vorhergehenden Beispiel abgeleitete Gleichung, in welcher nur ω durch $\omega \sin \alpha$ ersetzt ist. Die resultirende Bewegung wird also ähnlich verlaufen.

Aus dem Gleichgewicht der normalen Kräfte lässt sich ebenfalls in einfacher Weise N und Θ bestimmen.

Von den beiden in einem stumpfen Winkel gegen einander stossenden Glasröhren DB und DC der Fig. 80 enthält die erstere eine kleine Kugel E, die andere etwas Wasser. Bei genügender Geschwindigkeit des Kreisels werden Kugel und Wasser nach dem oberen Ende der Röhren geschleudert.

Man kann auch in die eine der Röhren mehrere Körper von verschiedenem specifischem Gewicht bringen, z. B. Quecksilber, Wasser und ein Stück Kork. Im Zustand der Ruhe ordnen sich diese Körper nach abnehmender Dichtigkeit über einander. Versetzt man dagegen den Apparat in schnelle Drehung, so werden die Substanzen nach dem oberen Ende der Röhre geschleudert, wo sie sich in umgekehrter Reihenfolge anordnen, das Quecksilber am weitesten von der Achse entfernt, dann Wasser und zuletzt das Stück

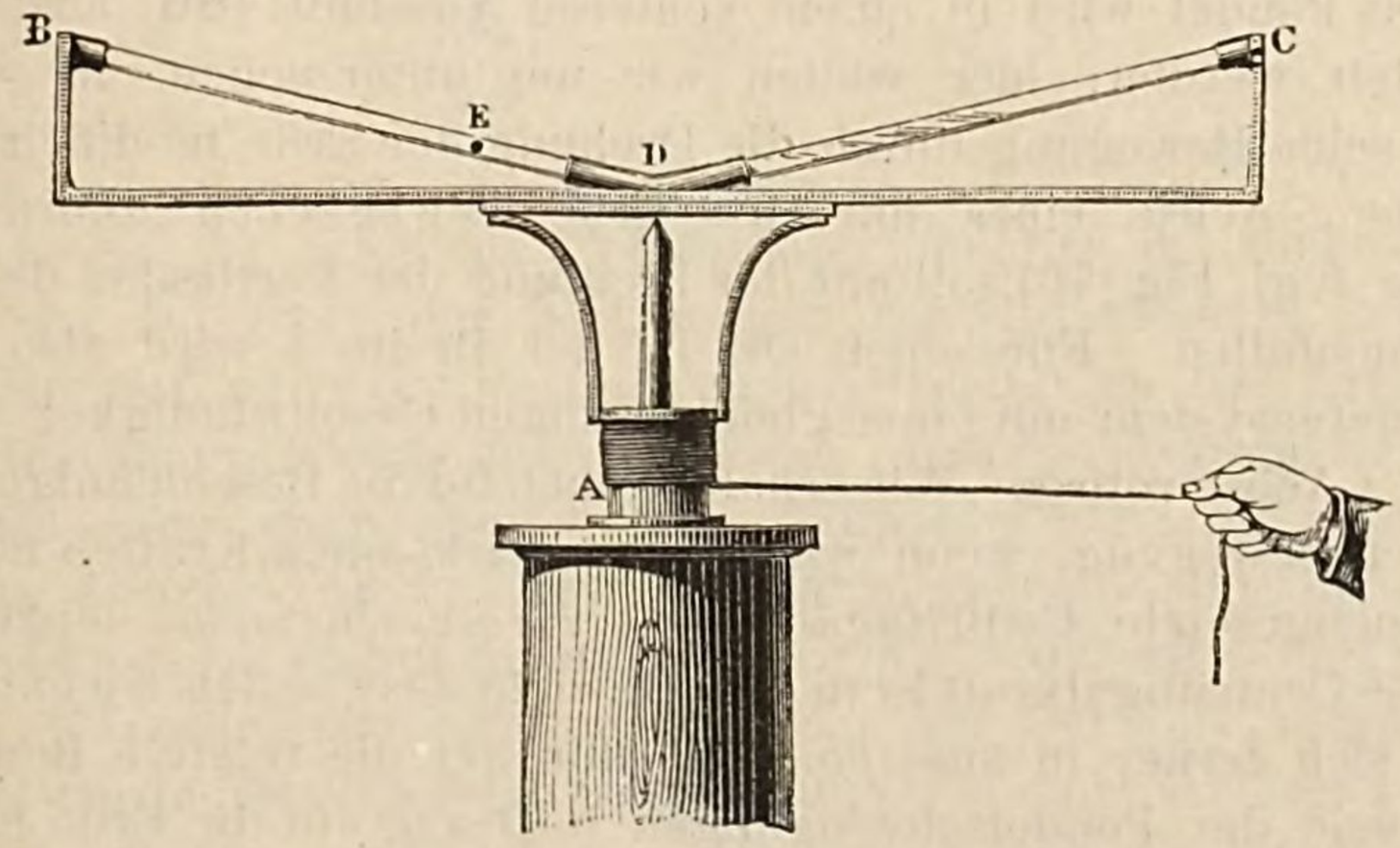


Fig. 80.

Kork. In beiden Fällen nämlich wird die Reihenfolge der Anordnung für stabiles Gleichgewicht durch das Archimedische Princip bestimmt; während gewöhnlich nur die Schwere vorhanden ist, überwiegt im obigen Falle die Centrifugalkraft und da diese gerade der Schwere entgegenwirkt, muss die Reihenfolge die umgekehrte sein.

3. *Foucault'sches Pendel.* — Die Drehung der Erde, welche um die Verbindungslinie der beiden Pole mit der Winkelgeschwindigkeit $OA = \omega$ erfolgt, lässt sich für einen bestimmten Ort in zwei andere Rotationen zerlegen: Die eine nach der Vertikalen des Ortes

gerichtete Componente OB ist gleich $\omega \sin \lambda$, wo λ die geographische Breite bedeutet; die andere OC liegt in dem Meridian des Ortes (in der Horizontalebene HH') und ist ohne Einfluss auf die weiter

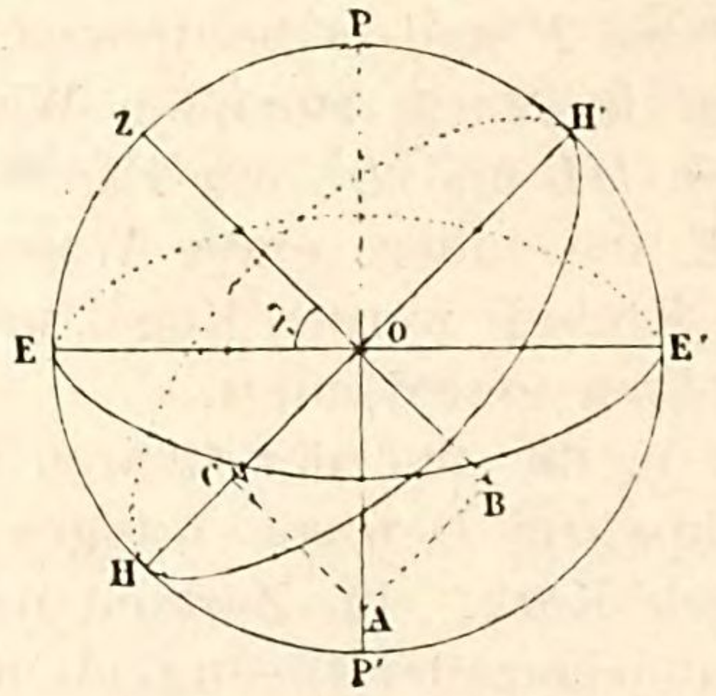


Fig. 81.

unten beschriebene Erscheinung; die Componente OB erzeugt die durch den schönen Versuch von Foucault demonstrirte relative Bewegung der Schwingungsebene des Pendels.

Das Pendel wird in einem späteren Abschnitt (**86**) ausführlich behandelt werden; hier wollen wir nur untersuchen, in welcher Weise seine Bewegung durch die Drehung der Erde modificirt wird.

Die z-Achse eines mit der Erde beweglichen Coordinatensystems (vgl. Fig. 76) soll mit der Richtung der Vertikalen des Ortes zusammenfallen. Für einen Ort in der Breite λ wird also dieses Coordinatensystem mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit $\omega \sin \lambda$ um die z-Achse rotiren. Wir erhalten nach **53** die Beschleunigung der relativen Bewegung, wenn wir zu den wirksamen Kräften noch die zusammengesetzte Centrifugalraft $-2 m \omega v_r \sin(\omega, v_r)$ hinzufügen, denn die Centrifugalkraft ist in dem Gewicht des Pendels mg enthalten. Da es sich ferner in unserem Falle nur um die relative Bewegung der Ebene der Pendelschwingungen in Bezug auf die Erde handelt, so können wir hier von der translatorischen Bewegung der letzteren vollkommen absehen. Wir wollen annehmen das Pendel mache nur Schwingungen von sehr kleiner Amplitude; wir können dann die z-Coordinate vernachlässigen, mit anderen Worten, wir dürfen uns vorstellen, dass die Bewegung des Pendels anfänglich durch eine in der Ebene xOy gelegene Gerade dargestellt wird. Die wirksame Componente der Schwerkraft ist mgx oder $mg\frac{r}{l}$, wenn l die Länge des Pendels und r den Abstand des schwingenden Punktes von seiner Gleichgewichtslage bedeutet; denn für kleine Winkel darf der Bogen statt des Sinus eingeführt werden. Da

wir $\frac{dz}{dt}$ vernachlässigen und $\sin(\omega, v_r) = 1$ ist, so reduciren sich die beiden in der Ebene xOy gelegenen Componenten der zusammengesetzten Centrifugalkraft, deren Vorzeichen sich aus **53** ergiebt, auf

$$X_c = -2m\frac{dy}{dt}\omega\sin\lambda,$$

$$Y_c = \quad 2m\frac{dx}{dt}\omega\sin\lambda.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{gx}{l} - 2\frac{dy}{dt}\omega\sin\lambda,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{l} + 2\frac{dx}{dt}\omega\sin\lambda.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Am Nordpol vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{gx}{l} - 2\omega\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{l} + 2\omega\frac{dx}{dt}.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Am Pol ist aber die Erscheinung offenbar die folgende: Mit Hülfe der Integrale der Gleichungen für die absolute Bewegung (bezogen auf ein Coordinatensystem, welches an der Erdrotation nicht theilnimmt) kann man beweisen, dass die absolute Bewegung in Form einer stark abgeplatteten Ellipse erfolgt; die relative Bewegung besteht nun in einer gleichförmigen Drehung der Achsen dieser Ellipse im umgekehrten Sinn wie die Erdrotation und mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω. Ein am Pol fest aufgehängtes Pendel würde nämlich seine Schwingungen in einer unveränderlichen Curve ausführen, während sich die Erde unter ihm dreht, so dass ein sich mit ihr drehender Beobachter das Pendel im entgegengesetzten Sinn mit der Geschwindigkeit ω rotiren sieht.

Da sich hiernach die Gleichungen (1) von den Gleichungen (2) nur dadurch unterscheiden, dass in den letzteren ω durch $\omega\sin\lambda$ ersetzt ist, so muss offenbar in der Breite λ die Erscheinung dieselbe sein, als ob sich die Erde um die Vertikale Oz mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\sin\lambda$ drehte. Die von dem Pendel beschriebene Ellipse wird also in ihrer Ebene um die durch den Aufhängungspunkt gehende Vertikale im positiven Sinn mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\sin\lambda$ rotiren (von Nord über Ost, Süd nach West).

Bei dem Versuch von Foucault bestand das Pendel aus einem Stahldraht von 67 m Länge, dessen eines Ende in der Kuppel des Pantheons befestigt und dessen anderes Ende mit einer Kupferkugel von 28 kg beschwert war; die Schwingungsdauer desselben betrug 16,42 Secunden. Zu Beginn des Versuches wurde das vorher aus der lothrechten Richtung abgelenkte

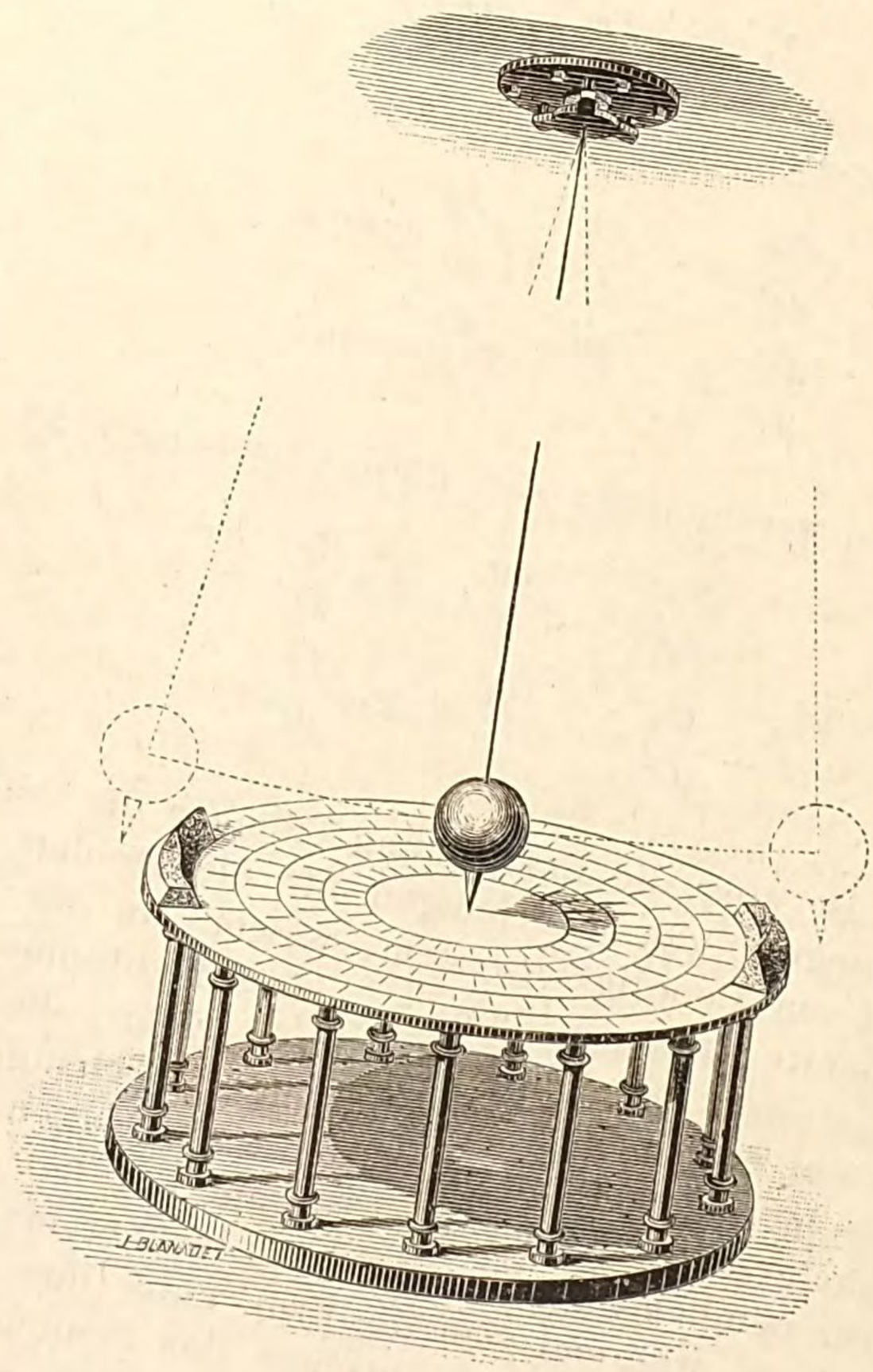


Fig. 82.

und mit einem Bindfaden festgehaltene Pendel durch Verbrennen des Fadens ohne Anfangsgeschwindigkeit in Bewegung gesetzt. Eine an der Kugel befestigte Spitze machte Einschnitte in zwei Haufen von feuchtem Sand, welche sich an den Enden der grossen Achse der Schwingungsellipse befanden. Die scheinbare Verschiebung dieser Achse wurde auf diese Weise sehr deutlich sichtbar; sie betrug nämlich bei einer Entfernung der beiden Sandhaufen

von 6 m für jede ganze Schwingung ungefähr 2,3 mm. Die Verschiebung fand im Uhrzeigersinn mit der Geschwindigkeit $\omega \sin \lambda$ statt, so dass eine ganze Umdrehung ungefähr 32 h gedauert haben würde.[1]) Foucault gelang es also, den experimentellen Beweis für die Drehung der Erde durch einen Versuch auf ihr selbst zu erbringen.

Der Versuch kann in einem gewöhnlichen Saal angestellt werden. Foucault machte ihn zuerst in seinem Keller und dann im Meridiansaal der Sternwarte.[2]) Überall wo man über eine vertikale Höhe von 10 bis 12 m verfügt, kann man das Experiment wiederholen, besonders wenn man die Abweichung mit optischen Hülfsmitteln beobachtet.

Foucault wurde auf diese Versuche dadurch geführt, dass er die Stabilität der Schwingungsebene eines Stabes beobachtete,

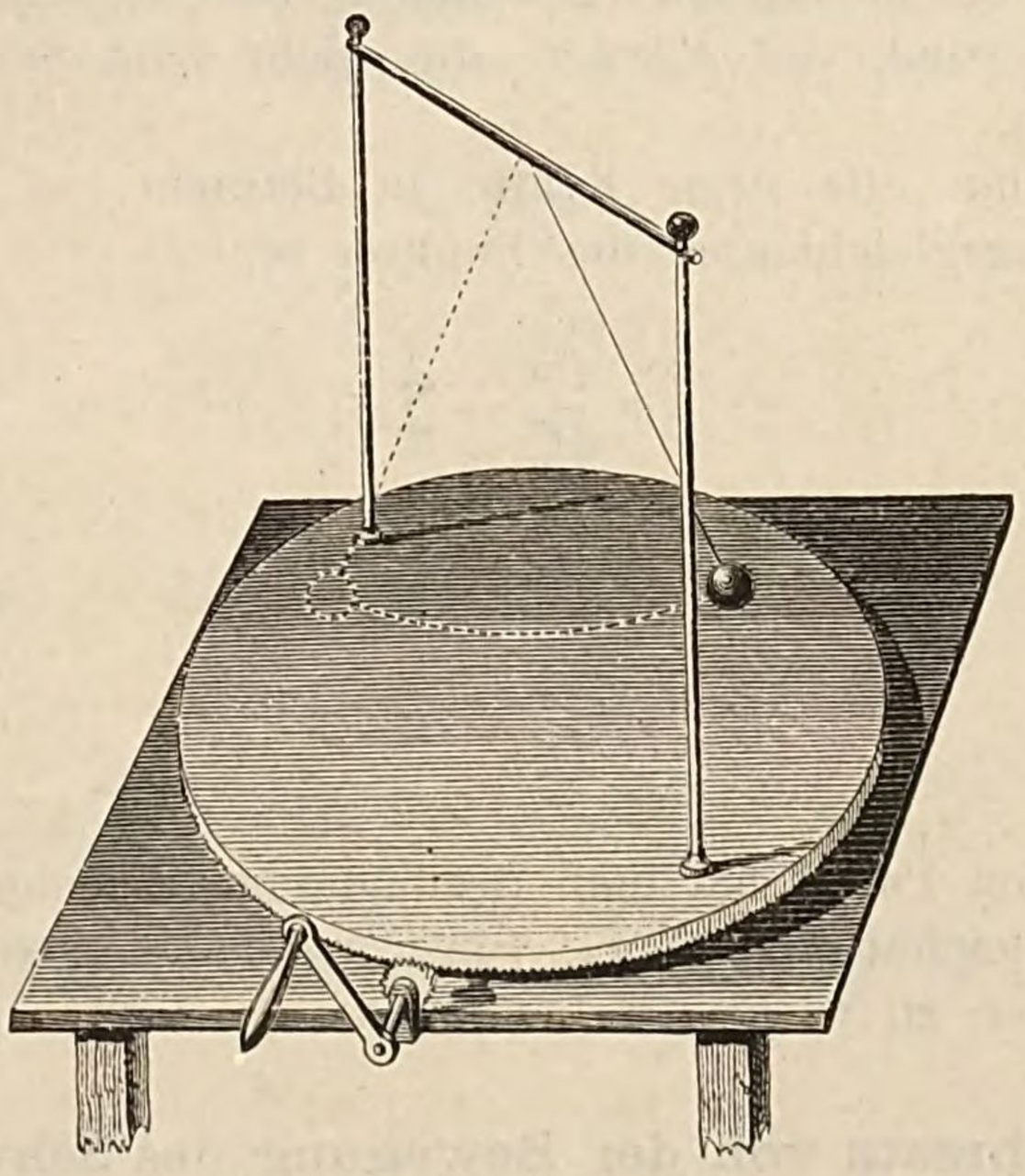


Fig. 83.

welcher, in einer Drehbank eingespannt, in Schwingungen versetzt wurde. Diese Stabilität ist eine Folge der Trägheit der Materie;

---

[1]) Obwohl die Amplitude der Schwingungen ziemlich rasch abnahm, war die Bewegung des Pendels doch nach Verlauf von 5 bis 6 Stunden noch sehr deutlich; die Abweichung der Schwingungsebene von der ursprünglichen Richtung betrug dann 60 bis 70 Grad.

[2]) Foucault, C. R. XXXII, 135, 1851; und Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault; Paris, Gauthiers-Villars, 1878, p. 378, 519 und 570.

wir werden in der Akustik Gelegenheit haben, auf dieses merkwürdige Verhalten zurückzukommen. Es ist übrigens leicht, direct nachzuweisen, dass die Schwingungsebene des Pendels trotz der Rotation der Aufhängung ihre Richtung im Raume beibehält; man hat zu diesem Zweck nur die Aufhängungsvorrichtung in der durch die Figur angedeuteten Weise beweglich zu machen.

B. Dynamik von Systemen.

56. Innere Kräfte, äussere Kräfte. — In einem System materieller Punkte wirken auf jeden Punkt zwei Arten von Kräften, *innere* und *äussere*; die inneren Kräfte rühren von der wechselseitigen Einwirkung der Punkte auf einander her, während wir die äusseren Kräfte, welche im Grunde genommen von derselben Natur wie die ersteren sind, auf Körper, die nicht zum System gehören, zurückführen.

Zieht man alle diese Kräfte in Betracht, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Punktes m:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Für jeden Punkt hat man drei analoge Beziehungen.

Diese Gleichungen führen, von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet, zu wichtigen Lehrsätzen.

57. Lehrsatz von der Bewegung des Schwerpunktes. 1. Bilden wir die Summe aller auf die x Achse bezüglichen Gleichungen, so erhalten wir

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X,$$

wo sich Σ auf alle Systempunkte und $\sum$ auf alle wirkenden Kräfte bezieht. Summiren wir ebenso die auf die anderen Achsen bezüglichen Kräfte, so erhalten wir noch zwei ähnliche Gleichungen, und somit ergeben sich die drei allgemeinen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} &= \sum X, \\ \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} &= \sum Y, \\ \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} &= \sum Z. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die inneren Kräfte, welche paarweise entgegengesetzt gleich sind (**49**), heben sich auf der rechten Seite der Gleichungen heraus. Man kann also, ohne sich um die inneren Kräfte zu kümmern, diese Gleichungen direct auf die äusseren Kräfte anwenden.

Mit Hülfe des Schwerpunktes lässt sich dieser Lehrsatz sehr einfach aussprechen.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes, und ist M die Gesammtmasse des Systems, so hat man nach der Definition (**38**)

$$P = \Sigma p,$$

oder

$$Mg = \Sigma mg,$$

also auch

$$M = \Sigma m;$$

ferner

$$Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz;$$

folglich

$$M\frac{dx_1}{dt} = \Sigma m\frac{dx}{dt}, \qquad M\frac{dy_1}{dt} = \Sigma m\frac{dy}{dt}, \qquad M\frac{dz_1}{dt} = \Sigma m\frac{dz}{dt};$$

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Es ist somit

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \sum X, \\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} &= \sum Y, \\ M\frac{d^2z_1}{dt^2} &= \sum Z; \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

mit anderen Worten, *die Bewegung des Schwerpunktes des Systems ist dieselbe, als wenn alle Massen in ihm vereinigt und alle äusseren Kräfte parallel zu sich selbst dorthin verlegt wären.*

Sind also keine äusseren Kräfte vorhanden, so hat der Schwerpunkt, wenn er in Bewegung ist, eine geradlinig gleichförmige Bewegung; ist er in Ruhe, so bleibt er in Ruhe.

Der Rücklauf einer Kanone ist auf diese Weise zu erklären; denn Geschoss und Kanone bilden ein einziges System, dessen Schwerpunkt auch nach dem Schuss in Ruhe bleibt, da nur innere Kräfte gewirkt haben; die Geschwindigkeiten beider Theile des Systems müssen sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten [$\Sigma mv = 0$]; ebenso verhält es sich mit dem Rückstoss des Herzens (dem Schlag des Herzens) in dem Augenblicke, in welchem das Blut in die Aorta getrieben wird. Man sieht ferner ein, dass ein auf einer horizontalen, vollkommen glatten Fläche befindlicher Mensch nicht im Stande sein würde, seinen Schwerpunkt vorwärts zu bewegen; Reibung (das heisst eine äussere Kraft) wird dagegen ein Fortschreiten in horizontaler Richtung ermöglichen.

Wenn ein Schrapnell, während es eine parabolische Bahn durchfliegt, in der Luft crepirt, so beschreibt der Schwerpunkt des Systems nichts desto weniger dieselbe Parabel weiter, während sich jedes der Sprengstücke in einer besonderen parabolischen Bahn bewegt.

58. Lehrsatz von den Momenten der Bewegungsgrössen. — 2. Wir wollen für jeden materiellen Punkt die allgemeinen Bewegungsgleichungen in derselben Form, wie wir es in **46** gethan haben, aufstellen und alle Gleichungen addiren; es folgt dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right) &= \sum(xY-yX),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right) &= \sum(yZ-zY),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right) &= \sum(zX-xZ); \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

die rechten Seiten sind auch hier unabhängig von den inneren Kräften. Wir haben also den Lehrsatz:

Die nach der Zeit genommene Derivirte der Summe der Momente aller Bewegungsgrössen in Bezug auf eine beliebige Achse ist gleich der Summe der Momente der äusseren Kräfte in Bezug auf dieselbe Achse.

Ist die letztere Summe gleich Null, so hat man wie in dem Falle eines materiellen Punktes den *Flächensatz*.

59. Drehung eines starren Körpers um eine Achse. — Wenn sich ein starrer Körper um eine feste Achse dreht, so beschreibt jeder Punkt einen zur Achse senkrechten Kreis; ist r der Abstand dieses Punktes von der Achse, so ist die Bewegungsgrösse

$$mv = m\omega r,$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Das Moment dieser Bewegungsgrösse ist $m\omega r^2$ und die Summe der Momente der Bewegungsgrössen beträgt

$$\omega \times \Sigma m r^2;$$

$\Sigma m r^2$ ist eine Constante des Körpers für die betreffende Achse und heisst das *Trägheitsmoment* des Körpers in Bezug auf diese Achse.

Wir nehmen die Rotationsachse zur z-Achse; die erste der Gleichungen (2) lässt sich schreiben

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma m r^2 = \sum (xY - yX),$$

folglich

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum (xY - yX)}{\Sigma m r^2}.$$

Bei der Bewegung eines starren Körpers um eine feste Achse ist also die Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ *in jedem Augenblick gleich dem Quotient aus der Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf diese Achse und dem Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf dieselbe Achse.*[1])

Eine unmittelbare Folge des Satzes ist die, dass *die Rotation eines starren Körpers um eine Achse unbedingt mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen muss, wenn die auf den Körper wirkenden äusseren Kräfte im Gleichgewicht sind.*

Würde der Körper, bei Gleichgewicht der äusseren Kräfte, sich in Folge innerer Einwirkungen zusammenziehen, so würde $\Sigma m r^2$ abnehmen; ω müsste also in dem Maasse wachsen, dass $\omega \Sigma m r^2$ constant bliebe. Wenn sich z. B. die Erde in Folge innerer Abkühlung zusammenzöge, so müsste die Rotationsgeschwindigkeit wachsen und der Tag (die Dauer einer ganzen Umdrehung) würde abnehmen.

---

[1]) Bemerkenswerth ist die Ähnlichkeit zwischen dieser Gleichung und der fundamentalen Beziehung $\gamma = \frac{F}{m}$, nach welcher die Beschleunigung γ gleich dem Quotient aus Kraft und Masse ist.

Der Satz ist, ebenso wie der von der Bewegung des Schwerpunktes, vollständig auf lebende Wesen anwendbar. Ein Mensch, welcher sich isolirt im Weltraum befände, könnte sich nicht um sich selbst drehen; denn wenn er einen Theil seines Körpers um eine Achse in einem gewissen Sinn drehen könnte, so würde ein anderer Theil zu derselben Zeit im entgegengesetzten Sinn rotiren, so dass die Summe der Momente der Bewegungsgrössen Null bliebe. Denn die einzige äussere Kraft wäre dann die Kraft der Schwere; die Summe der Momente der äusseren Kräfte ist folglich Null für jede durch den Schwerpunkt gehende Achse.

60. Trägheitsmomente. — Als *Trägheitsmoment* eines Körpers in Bezug auf eine Achse haben wir die Grösse $\Sigma m r^2$ definirt, nämlich die Summe aller Producte aus der Masse eines jeden Punktes in das Quadrat seines Abstandes von der Achse.

Bei einem homogenen Körper von geometrisch definirter Form ist die Ermittlung des Trägheitsmomentes für eine gegebene Achse eine Aufgabe der Integralrechnung.

In allen Fällen läuft dieses Problem auf die Ermittlung des Trägheitsmomentes für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse hinaus. Es seien nämlich zwei parallele Achsen gegeben, deren eine, GZ, durch den Schwerpunkt G gehen soll und zur z-Achse gewählt wird; die andere, HZ', befinde sich in einem Abstand a

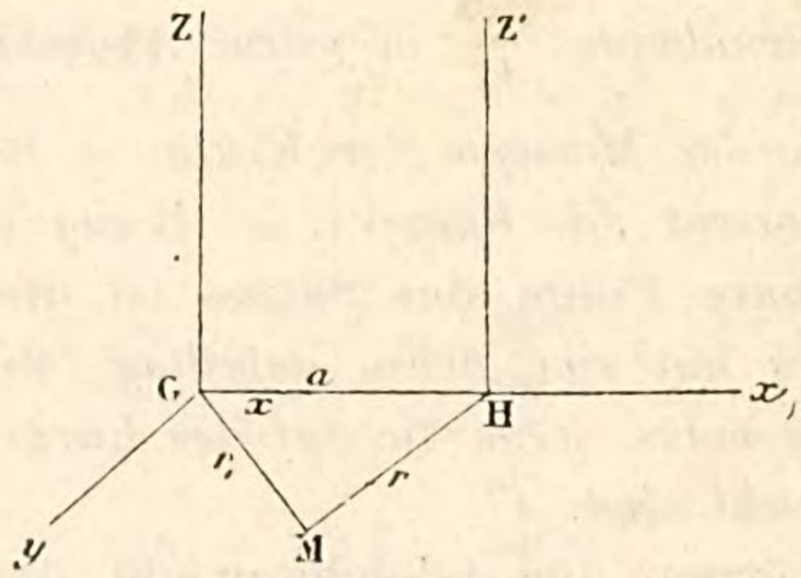


Fig. 84.

von der ersten. Nehmen wir die Ebene beider Achsen zur zx-Ebene, so steht die yz-Ebene senkrecht auf den Achsen, und wir haben, wenn r und r' die Abstände eines beliebigen Punktes M von den Achsen HZ' und GZ bedeuten,

$$m r^2 = m r_1^{\,2} + m a^2 - 2 m a x;$$

bilden wir die Summe für alle Punkte des Körpers, so folgt

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r_1^{\,2} + M a^2,$$

da $2 a \Sigma m x = 0$ ist.

Es folgt nämlich aus der oben (**57**) erwähnten Definition, wenn man den Schwerpunkt als Coordinatenanfang wählt ($x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$),

$$\Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m z = 0.$$

Bezeichnet man also mit MK^2 das Trägheitsmoment um die Achse GZ, wo K der sogenannte *Gyrationsradius* ist, so hat man

$$\Sigma m r^2 = M(K^2 + a^2).$$

Das Trägheitsmoment eines Körpers für eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment für eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Achse, vermehrt um das Product aus der Gesammtmasse M des Körpers in das Quadrat des Abstandes der Achse vom Schwerpunkt.

Hiernach wollen wir einige Trägheitsmomente, welche wir in der Folge verwerthen können, berechnen.

1. *Rechtwinkliges Parallelepiped.* — Es sei I_z das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse OZ, welche parallel zu den

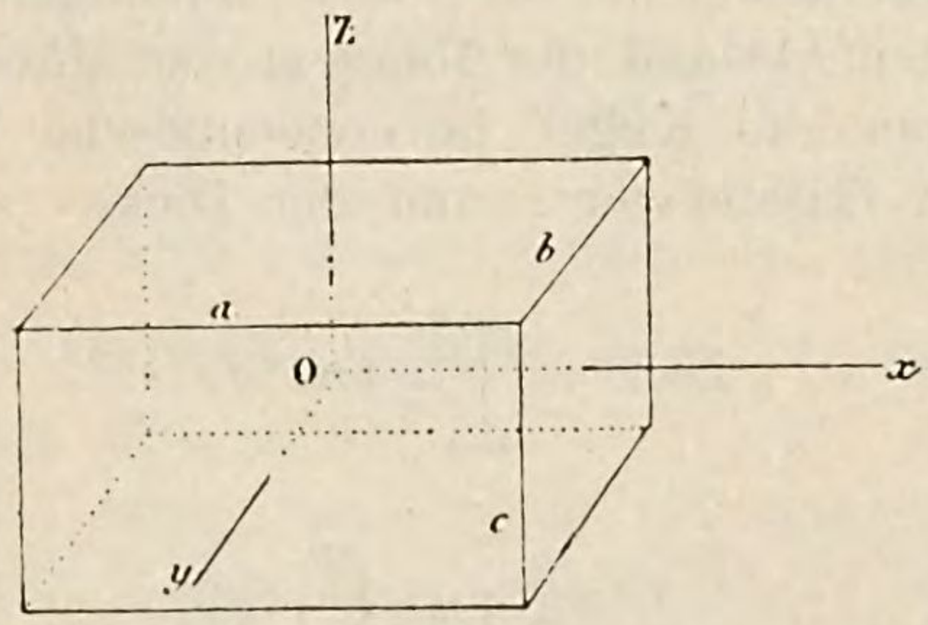


Fig. 85.

Kanten c durch den Schwerpunkt gelegt ist; sind a und b die zu Ox und Oy parallelen Kanten und bedeutet ϱ die Dichtigkeit des homogenen Körpers, so hat man

$$I_z = \varrho \iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \varrho \iint (x^2 + y^2)\, dx\, dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz,$$

$$= \varrho c \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \right),$$

$$= \varrho c \left[\frac{a^3 b}{12} + \frac{b^3 a}{12} \right], \qquad = \varrho \frac{a b c}{12} [a^2 + b^2],$$

$$= \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

In diesem Fall ist also

$$K^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2).$$

2. *Kugel.* — Es sei I_z das Trägheitsmoment einer Vollkugel in Bezug auf ihren Durchmesser OZ, dann ist:

$$I_z = \Sigma m (x^2 + y^2).$$

Ebenso würde man haben

$$I_x = \Sigma m (y^2 + z^2),$$

und

$$I_y = \Sigma m (z^2 + x^2);$$

folglich

$$I_x + I_y + I_z = 2 \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2),$$

oder

$$3 I = 2 \Sigma m r^2,$$

wo I das Trägheitsmoment für einen beliebigen Durchmesser bedeutet und r den Abstand der Masse m vom Mittelpunkt der Kugel.

Zerlegt man die Kugel in concentrische Kugelschalen von dem variabelen Halbmesser r und der Dicke dr, so ist

$$\Sigma m r^2 = \int_0^R \varrho \, 4\pi r^2 dr . r^2$$

und folglich

$$I = \frac{2}{3} 4\pi\varrho \int_0^R r^4 dr,$$

$$= \frac{8}{15} \varrho \pi R^5,$$

$$= \frac{2}{5} M R^2.$$

Hier ist also

$$K^2 = \frac{2}{5} R^2.$$

Man wird auch für die folgenden Fälle leicht die Berechnung durchführen:

3. *Gerader Kreis-Cylinder, vom Halbmesser R und der Höhe h in Bezug auf seine Achse:*

$$K^2 = \frac{1}{2} R^2.$$

4. *Derselbe Cylinder, in Bezug auf eine den Endflächen parallele und durch den Schwerpunkt gehende Achse:*

$$K^2 = \frac{1}{12}(3R^2 + h^2).$$

61. Lehrsatz von der Arbeit. — 3. Wir wollen jetzt sehen, wie sich bei einem System materieller Punkte der Satz von der Arbeit und der lebendigen Kraft gestaltet. Für jeden Punkt hat man

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma T, \qquad (3)$$

wobei sich das Zeichen Σ auf alle Kräfte bezieht, die auf den betrachteten Punkt wirken.

Addirt man die auf die verschiedenen Punkte des Systems bezüglichen Gleichungen Glied für Glied, so ergiebt sich

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_0^2}{2} = \sum T;$$

das Zeichen Σ bezieht sich auf alle Punkte des Systems und das Zeichen $\sum$ umfasst *alle* Kräfte, äussere wie innere, welche auf die verschiedenen Punkte wirken.

In einem Falle, wenn das System ein starres ist, braucht man auf die inneren Kräfte keine Rücksicht zu nehmen; denn dieselben greifen dann paarweise an den Enden unveränderlicher Geraden an und sind entgegengesetzt gleich, so dass sich ihre Arbeit gegenseitig aufhebt.

Bei einer Maschine hat man zu unterscheiden zwischen der bewegenden Arbeit T_m, der Summe aller derjenigen positiven Arbeiten, welche während einer bestimmten Zeit von der Maschine aufgenommen werden, und zwischen der widerstehenden Arbeit T_r, der positiv genommenen Summe der negativen Arbeiten, welche während dieser Zeit geleistet werden. Schreiben wir diese beiden Theile für sich hin, so haben wir

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_0^2}{2} = T_m - T_r.$$

Wenn die Maschine auf *ihrer normalen Geschwindigkeit* angelangt ist, welche entweder gleichförmig sein wird (hydraulische Räder)

oder periodisch gleichförmig (Pumpen, Dampfmaschinen u. s. w.), so ist am Ende einer ganzen Anzahl von Perioden die linke Seite der Gleichung Null, also:

$$T_m = T_r.$$

Bei einer in regelmässigem Gang befindlichen Maschine ist die aufgenommene Arbeit gleich der verzehrten. Dieses Resultat ist als Satz von der *Übertragung der Arbeit* bekannt.

Vom wirthschaftlichen Standpunkte aus muss man die Widerstände in zwei Klassen theilen: *Die Nutzwiderstände*, welche der von der Maschine zu leistenden Arbeit entsprechen, und die *passiven Widerstände* (Reibung etc.), welche in der Maschine in Folge ihrer Bewegung entstehen und für die Nutzarbeit verloren sind. Es sei T_u die Arbeit der nützlichen Widerstände, T_p die der passiven, so ist

$$T_r = T_u + T_p,$$

und die Gleichung der aufgenommenen und geleisteten Arbeit lautet

$$T_m = T_u + T_p,$$

also

$$T_u = T_m - T_p.$$

Folglich ist die *Nutzarbeit immer kleiner als die aufgewandte Arbeit;* das *Perpetuum mobile ist somit unmöglich.*

Der *Nutzeffect* oder *Wirkungsgrad* oder auch der *ökonomische Coefficient* der Maschine wird durch das Verhältniss der nützlichen zur aufgewandten Arbeit gemessen:

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{T_m - T_p}{T_m} = 1 - \frac{T_p}{T_m}.$$

Man pflegt ihn in Procenten auszudrücken.

Wir werden in dem Capitel über Reibung die Apparate beschreiben, welche zur Arbeitsmessung an Maschinen benutzt werden.

62. Untersuchung der Bewegung eines Systems. — Bei der Untersuchung der Bewegung eines Systems *ist es vortheilhaft, zuerst die Bewegung des Schwerpunktes unter der Wirkung der äusseren Kräfte zu betrachten* (**57**); *nachher verlegt man die Coordinatenachsen parallel zu sich selbst nach dem Schwerpunkt und untersucht die Bewegung des Systems in Bezug auf diese durch den Schwerpunkt gehenden beweglichen Achsen.*

Ist m (x, y, z) ein Punkt des Systems, so hat man für die festen Achsen

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(xY-yX).$$

Wir verlegen die Achsen nach dem Schwerpunkt $(x_1, y_1, z_1,)$;

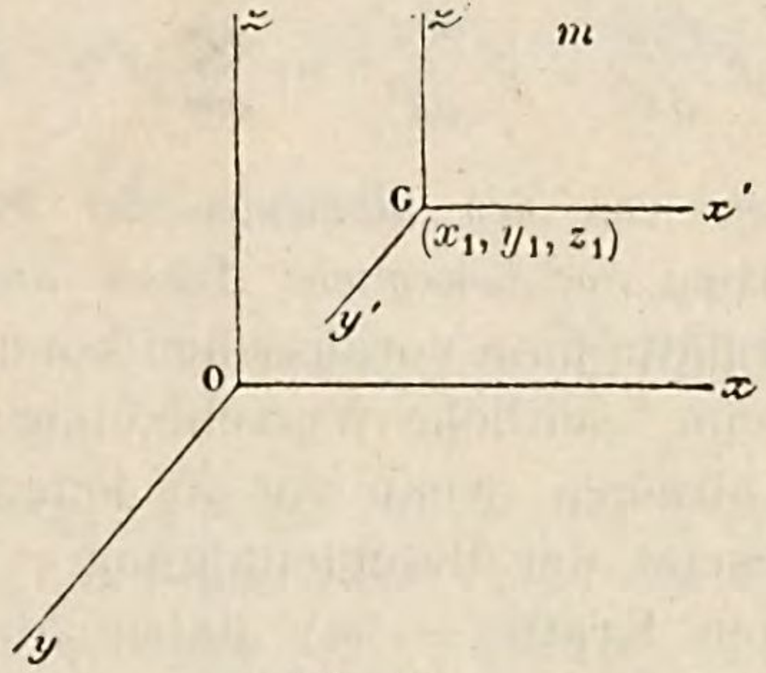


Fig. 86.

es seien x', y', z' die Coordinaten des Punktes m für die neuen Achsen, so ergiebt sich

$$\Sigma m\left[(x_1+x')\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}+\frac{d^2y'}{dt^2}\right)-(y_1+y')\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\right]$$
$$=\sum\Big((x_1+x')\,Y-(y_1+y')\,X\Big).$$

Nun ist

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\sum X,$$

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\sum Y;$$

und folglich

$$M\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)=x_1\sum X-y_1\sum Y.$$

Andrerseits ist, da der Coordinaten-Anfangspunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt,

$$\Sigma m x'=0;$$

folglich

$$\Sigma m\frac{dx'}{dt}=0$$

und

$$\Sigma m\frac{d^2x'}{dt^2}=0:$$

Somit ergiebt sich

$$x_1 \Sigma m \frac{d^2y'}{dt^2} = 0, \qquad y_1 \Sigma m \frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} \Sigma m x' = 0, \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} \Sigma m y' = 0.$$

Nach allen diesen Vereinfachungen erhalten wir also

$$\Sigma m \left(x' \frac{d^2y'}{dt^2} - y' \frac{d^2x'}{dt^2} \right) = \sum (x'Y - y'X),$$

das heisst, der *Satz von den Momenten der Bewegungsgrössen lässt sich ohne jede Änderung auf bewegliche Achsen anwenden.*

Dieses Resultat hätte man voraussehen können. Die beweglichen Achsen erleiden eine seitliche Verschiebung; wir können von der Verschiebung absehen, wenn wir in jedem Punkt eine Kraft $-m\gamma$, entgegengesetzt der Beschleunigung γ des Systems, hinzufügen. Die fingirten Kräfte $-m\gamma$ haben aber in ihrer Gesamtheit das Moment Null; da sie nämlich parallel, gleich gerichtet und den Massen proportional sind, so haben sie eine einzige, im Schwerpunkt angreifende Resultante; sie fallen also schliesslich heraus, und dies findet, wie man sieht, nur dann statt, wenn der neue Coordinaten-Anfangspunkt im Schwerpunkt liegt.

Es ist übrigens zu bemerken, dass die Unbekannten in den die Bewegung des Schwerpunktes ausdrückenden Gleichungen und in den neuen Gleichungen, welche den Satz von den Momenten der Bewegungsgrössen auf bewegliche, durch den Schwerpunkt gehende Achsen ausdehnen, im Allgemeinen vermischt vorkommen werden, so dass die ersteren für sich allein die Bewegung des Schwerpunktes nicht ergeben.

Wir wollen ferner untersuchen, wie sich die Gleichung für die lebendigen Kräfte bei Einführung der neuen Achsen gestaltet. Mit Bezug auf die alten Achsen hatte man

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \sum T.$$

Betrachten wir zuerst die lebendige Kraft. Es sei v_1 die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und v' die relative Geschwindigkeit des Punktes m; aus den Gleichungen $x = x_1 + x'$, $y = y_1 + y'$, $z = z_1 + z'$ folgt

$$v^2 = v_1^2 + v'^2 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dz'}{dt} \right),$$

also

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \Sigma \frac{mv'^2}{2},$$

denn $\frac{dx_1}{dt}\Sigma m\frac{dx'}{dt}=0$, weil der neue Coordinaten-Anfangspunkt im Schwerpunkt liegt, und somit $\Sigma mx'=0$ ist.

Die gesammte (absolute) lebendige Kraft des Systems in Bezug auf die festen Achsen ist folglich gleich der (relativen) lebendigen Kraft für die beweglichen Achsen, vermehrt um die lebendige Kraft eines Körpers von der Masse M, die im Schwerpunkt concentrirt gedacht ist.

Wir wollen jetzt zu der Arbeit der Kräfte übergehen.

$$\Sigma T=\Sigma\int(Xdx+Ydy+Zdz)$$
$$=\Sigma\int(Xdx_1+Ydy_1+Zdz_1)+\Sigma\int(Xdx'+Ydy'+Zdz');$$

die Summe der absoluten Arbeiten der Kräfte ist gleich der Summe der Arbeiten der parallel zu sich selbst nach dem Schwerpunkt verlegten Kräfte, vermehrt um die Summe der relativen Arbeiten der Kräfte.

Die Gleichung der lebendigen Kräfte lautet also

$$\frac{Mv_1^2}{2}-\frac{M(v_1)_0^2}{2}+\Sigma\frac{mv'^2}{2}-\Sigma\frac{mv'^2_0}{2}=\Sigma\int(Xdx_1+Ydy_1+Zdz_1)$$
$$+\Sigma\int(Xdx'+Ydy'+Zdz');$$

beachtet man, dass die Summe der Arbeiten der nach dem Schwerpunkt verlegten Kräfte genau gleich der Änderung der lebendigen Kraft dieses Punktes ist, so ergiebt sich

$$\Sigma\frac{mv'^2}{2}-\Sigma\frac{mv'^0_2}{2}=\Sigma\int(Xdx'+Ydy'+Zdz').$$

Die Änderung der lebendigen Kraft mit Bezug auf die beweglichen Achsen ist gleich der Summe der relativen Arbeiten der Kräfte.

Der Satz von der Arbeit bleibt also auch für die relativen Verschiebungen in Bezug auf den Schwerpunkt und zwar ohne Einführung einer neuen Kraft bestehen.

63. Kräftefunction; Potential. — In der Gleichung (3)

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=\Sigma T,$$

oder

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=\int\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)$$

ist $\sum(Xdx + Ydy + Zdz)$ nicht nothwendigerweise ein vollständiges Differential. Für die Naturkräfte ist dies allerdings der Fall; dieselben bestehen nämlich sämmtlich in wechselseitigen Einwirkungen, deren jede nach der Verbindungslinie der Mittelpunkte gerichtet und allein eine Function der Entfernung ist. Wir setzen voraus, dass dies der Fall sei, oder mit anderen Worten, dass die Kräfte *Centralkräfte* seien. Es bedeute r den Abstand der beiden Punkte m und m' und $mm'f(r)$ ihre gegenseitige Wirkung, positiv oder negativ, je nachdem dieselbe eine abstossende oder anziehende ist; die Componenten der Wirkung von m' auf m sind dann

$$X = mm'f(r)\frac{x' - x}{r},$$

$$Y = mm'f(r)\frac{y' - y}{r},$$

$$Z = mm'f(r)\frac{z' - z}{r}.$$

Nun sind diese drei Ausdrücke Derivirten einer und derselben Function. Es möge nämlich $F(r)$ eine solche Function von r darstellen, dass

$$F(r) = \int mm'f(r)\,dr$$

ist; da ferner

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial F(r)}{\partial x} = \frac{dF(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = mm'f(r)\cdot\left(-\frac{x' - x}{r}\right) = -X$$

und ebenso

$$\frac{\partial F(r)}{\partial y} = -Y$$

$$\frac{\partial F(r)}{\partial z} = -Z.$$

X, Y, Z sind also die drei nach x, y, z genommenen Derivirten der *Kräftefunction* $F(r)$ mit umgekehrtem Zeichen. Da für alle anderen wirksamen Kräfte dasselbe gilt, so ist $\sum(Xdx + Ydy + Zdz)$ die Derivirte einer Function V von x, y, z, mit umgekehrtem Vor-

zeichen; man nennt dieselbe *das Potential*, indem man einen Ausdruck verallgemeinert, welcher ursprünglich allein für den Fall gebraucht wurde, wo das gemeinsame Kraftgesetz das der Schwere war.[1])

Man hat also durch Definition

$$V = -\int \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = (T)_1^0 ,$$

das heisst, das *Potential ist die Arbeit, welche die Kräfte leisten könnten, wenn das System aus seiner augenblicklichen Lage* 1 *in die Anfangslage* 0 *zurückversetzt würde.*

64. Energie; kinetische Energie; potentielle Energie. Princip von der Erhaltung der Energie. — Sobald sich ein System unter dem alleinigen Einfluss von (äusseren oder inneren) Centralkräften bewegt, hat man die Beziehung

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_0^2}{2} = -(V - V_0)$$

oder

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} + V = \Sigma \frac{m v_0^2}{2} + V_0 = \text{const.} \qquad (4)$$

Wir betrachten z. B. einen fallenden Stein:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg,$$
$$V = mgz.$$

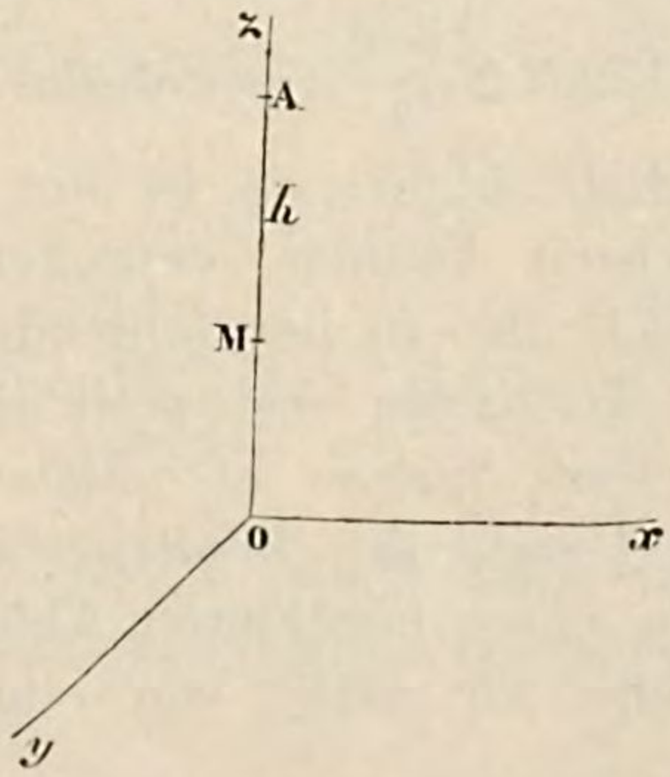


Fig. 87.

[1]) Clausius nennt das Potential im allgemeinen Fall Ergal und behält den Namen Potential für die Kräfte vor, die im umgekehrten Verhältniss des Quadrates des Abstandes wirken. Siehe Clausius, Mechanische Wärmetheorie.

Zu Beginn des Falles, wenn der Stein sich in A befindet, ist $v_0 = 0$, $z = h$,

$$\frac{mv_0^2}{2} = 0, \qquad V_0 = mgh.$$

Wenn der Stein den Boden erreicht, haben wir $v = \sqrt{2gh}$, $z = 0$,

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh, \qquad V_1 = 0.$$

Für eine beliebige Zwischenzeit, zu welcher sich der Stein in M auf der Höhe z befindet, ist

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - z), \qquad V = mgz.$$

In jedem Augenblick besteht folglich die Beziehung

$$\frac{mv^2}{2} + V = mgh,$$

wo $\frac{mv^2}{2}$ die augenblickliche lebendige Kraft des Steines darstellt und $V = mgz$ diejenige lebendige Kraft bezeichnet, welche er in Folge seiner gegenwärtigen Lage entwickeln könnte, wenn er zu Boden fiele.

Nach Rankine nennen wir *totale Energie* eines Systems den Gesammtbetrag der lebendigen Kraft, welchen dieses System besitzt oder entwickeln kann. *Kinetische Energie* ist seine augenblickliche lebendige Kraft $\Sigma\frac{mv^2}{2}$, *potentielle Energie* die lebendige Kraft, die es entwickeln kann; sie ist der Arbeit V, welche die wirksamen Kräfte leisten können, entgegengesetzt gleich. Die Gleichung (4) lässt sich also in der folgenden Form aussprechen:

Die Summe der kinetischen und potentiellen Energie eines nur Centralkräften unterworfenen Systems ist constant.

Es ist dies das *Princip der Erhaltung der Kraft*, dessen Bedeutung Helmholtz in einer berühmten Abhandlung[1]) zuerst klar gelegt hat, auf welche wir mehr wie einmal zurückzukommen haben.

Der Endzustand des Systems wird der des stabilen (70), durch ein Minimum der Function V charakterisirten Gleichgewichts sein.

---

[1]) Helmholtz, die Erhaltung der Kraft; Berlin 1847. Ostwalds Classiker der exacten Wissenschaften No. 1, Leipzig, Engelmann.

65. Lehrsatz von Villarceau. — Der Satz von der lebendigen Kraft behandelt nur die Änderungen der lebendigen Kraft; Villarceau[1]) hat einen Ausdruck für die lebendige Kraft selbst gegeben.

Wir gehen auf die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes zurück.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

Multipliciren wir dieselben der Reihe nach mit x, y, z und addiren sie, so folgt

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) = Xx + Yy + Zz.$$

Es ist aber

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2},$$

oder, wenn man mit v die Geschwindigkeit des Punktes und r seinen Abstand vom Coordinatenursprung bezeichnet,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}\right) = v^2 + x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Wir haben folglich

$$mv^2 = \frac{m}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2} - (Xx + Yy + Zz);$$

für ein materielles System erhält man durch Addition der den verschiedenen Punkten entsprechenden analogen Gleichungen

$$\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma m\frac{d^2r^2}{dt^2} - \sum(Xx + Yy + Zz). \qquad (5)$$

Dies ist der Satz von Villarceau.

---

[1]) Villarceau, C. R. LXXV, 232; 1872.

66. Satz von Clausius über das Virial. — Wenn jeder Punkt des Systems sich in einem begrenzten Raum bewegt, oder mit anderen Worten, wenn nach der Ausdrucksweise von Clausius das System eine stationäre Bewegung hat, so wird die mittlere kinetische Energie des Systems einfach

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = -\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz) \qquad (6)$$

sein, da das erste Glied der rechten Seite von (5) den mittleren Werth Null hat; bezeichnet man die Grösse $-\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz)$ mit dem Namen *Virial*, so können wir sagen, *die mittlere lebendige Kraft eines in stationärer Bewegung befindlichen Systems ist gleich seinem Virial,* ein Satz, welcher von Clausius[1]) gefunden war, ehe Villarceau die allgemeine Gleichung (5) aufgestellt hatte.

Bei der Anwendung dieses Satzes müssen, ebenso wie bei dem Princip von der lebendigen Kraft, äussere und innere Kräfte unterschieden werden.

Betrachten wir zuerst den Theil des Virials, welcher von den gegenseitigen Einwirkungen herrührt. Die gegenseitige Wirkung der beiden Molecüle m und m' liefert für diese beiden Punkte

$$Xx = mm'f(r)\frac{x' - x}{r}x, \qquad X'x' = mm'f(r)\frac{x - x'}{r}x',$$

folglich

$$Xx + X'x' = -mm'f(r)\frac{(x - x')^2}{r};$$

bildet man die analogen Ausdrücke auch für die beiden anderen Achsen, so hat man für den von der gegenseitigen Einwirkung von m auf m' herrührenden Theil des Virials

$$\frac{1}{2}mm'\frac{f(r)}{r}[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] = \frac{1}{2}mm'rf(r).$$

Das Virial der inneren Kräfte ist also gleich $\frac{1}{2}\Sigma mm'rf(r)$, wo sich die Summation Σ auf die Combination der verschiedenen Systempunkte zu je zweien erstreckt.

---

[1]) Clausius, Pogg. Ann. 106; C. R. LXX, 1314; 1870.

Die äusseren Kräfte sollen sich auf einen über die ganze Oberfläche des Systems gleichmässig vertheilten Druck p reduciren. Der Druck auf ein Flächenelement ω ist dann $p\omega$, und die Componenten nach den drei Achsen betragen

$$-p\omega\cos\alpha, \qquad -p\omega\cos\beta, \qquad -p\omega\cos\gamma,$$

wo α, β, γ die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die äussere Normale N mit den Achsen bildet. Der entsprechende Term des Virials ist

$$\frac{1}{2}p\omega(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = \frac{1}{2}p\omega r\cos(N,r).$$

Nun ist $\frac{\omega r\cos(N,r)}{3}$ nichts anderes als das Volumen desjenigen Kegels, dessen Scheitel sich im Ursprung O, (der im Innern der Masse liegen soll), befindet und welcher ω zur Grundfläche hat. Bildet man alle analogen Ausdrücke und nennt v das Volumen des Systems, so haben wir als äusseres Virial $\frac{3}{2}pv$, einen Ausdruck, den wir bei der kinetischen Gastheorie wieder finden werden.

67. Princip von D'Alembert. — Aus der Betrachtung der Arbeit lassen sich noch weitere, sehr wichtige Sätze ableiten.

Die verschiedenen Punkte eines materiellen Systems seien der Wirkung beliebiger Kräfte unterworfen. Jeder der Punkte des Systems werde von seiner augenblicklichen Lage in eine mit den Bedingungen verträgliche, unendlich benachbarte Lage übergeführt. Man nennt *virtuelle Geschwindigkeit*[1]) oder besser *virtuelle Verschiebung* die Gerade, welche die erste Lage mit der zweiten verbindet.

Virtuelle Arbeit einer in einem Punkt angreifenden Kraft heisst die der virtuellen Verschiebung entsprechende Arbeit. Bezeichnet man mit δs diese Verschiebung, so ist die virtuelle Arbeit der Kraft F

$$T_v = F\delta s\cos(F,\delta s).$$

Man kann sich nun die Bewegungsbedingungen, wie sie auch lauten mögen, durch Kräfte ersetzt denken, welche jeden Punkt

---

[1]) Der Ausdruck *Geschwindigkeit* rührt daher, dass man sich die Verschiebung in einer sehr kurzen Zeit gleichförmig erfolgend denken kann, und dann sind die durchlaufenen Wege den Geschwindigkeiten proportional; das Wort *virtuell* bedeutet, dass diese Verschiebung nur möglich ist und nicht wirklich ausgeführt wird.

zwingen, genau die den Bedingungen entsprechende Bewegung auszuführen. So lässt sich die Bedingung, dass sich ein Punkt auf einer gegebenen Fläche oder Curve bewegen soll, durch Einführung der senkrechten Gegenwirkung der Oberfläche oder Curve ersetzen. Man darf also jeden Punkt als frei und als der Einwirkung eines Kräftesystems unterworfen ansehen, welches sich aus äusseren, inneren und den die Bewegungsbedingungen ersetzenden Kräften combinirt.

Aus den in **51** über die Kräfte der Trägheit gemachten Bemerkungen ist ersichtlich, dass *in jedem Augenblick zwischen den auf jeden Punkt wirkenden Kräften* (mit Einschluss der für die Bewegungsbedingungen des Systems eingeführten Kräften) *und den Kräften der Trägheit* Gleichgewicht herrschen muss. Dies ist das berühmte *Princip von D'Alembert*, welches die Dynamik auf die Statik zurückführt.

Es seien X, Y, Z die drei Componenten der Resultante aller Kräfte für einen Punkt m (x, y, z); man hat dann:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

folglich ist

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

oder

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

für jede Verschiebung $(\delta x, \delta y, \delta z)$.

Jeder andere Punkt liefert eine ähnliche Gleichung, und durch Addition aller dieser Gleichungen ergiebt sich

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \quad (7)$$

In dieser Gleichung sind $3n$ Variationen enthalten, da die Zahl der Punkte n beträgt. Man hat aber k Bedingungsgleichungen, welche nach der Differentiation k Variationen zu eliminiren gestatten; es bleiben dann noch $3n - k$ Variationen vollkommen willkürlich. Setzt man jeden ihrer Coefficienten gleich Null, so bekommt man $3n - k$ Gleichungen, mit Hülfe deren die $3n - k$ wirklich unab-

hängigen Coordinaten berechnet werden können. Die Bewegung des Systems ist auf diese Weise in grosser Allgemeinheit vollkommen bestimmt.[1])

68. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. — Damit alle Punkte in Ruhe bleiben, ist es nothwendig und hinreichend, dass für eine beliebige virtuelle Verschiebung die linke Seite von Gleichung (7) Null ist. Die hinreichende und nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht eines Systems ist also die, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte, mit Einschluss der die Bewegungsbedingungen ersetzenden, Null sei:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0, \qquad (8)$$

welches auch die virtuellen Verschiebungen der verschiedenen Punkte sein mögen.

Bei allen mit den Bedingungen verträglichen Verschiebungen stehen die Zwangskräfte nothwendig auf den durchlaufenen Wegen senkrecht und folglich sind ihre virtuellen Arbeiten Null; die Gleichung

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

reducirt sich also auf

$$\sum (X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z) + \sum mm' f(r)\delta r = 0,$$

wo $\sum (X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z)$ die Summe der virtuellen Arbeiten der äusseren Kräfte und $\sum mm' f(r)\delta r$ die Summe der virtuellen Arbeiten der Molecularkräfte bezeichnet; die Summirung $\sum$ erstreckt sich auf alle Gruppen (m, m').

Ist also ein System materieller Punkte, welche beliebig mit einander verbunden sind, im Gleichgewicht, so ist die Summe der virtuellen Arbeiten aller direct an dem System angreifenden Kräfte gleich Null für alle virtuelle Verschiebungsarten, welche mit den Bedingungsgleichungen verträglich sind.

Dies ist das *Princip der virtuellen Geschwindigkeiten*, das für die theoretische Mechanik eine sehr grosse Bedeutung besitzt, denn es führt jede Frage über das Gleichgewicht von Kräften auf eine Bestimmung des Verhältnisses von Geschwindigkeiten (bez. Wegen) zurück und reiht somit die Statik in die Kinematik ein;

---

[1]) Vergl. Schell, Theoretische Mechanik, II, p. 499. — L.

die praktische Wichtigkeit desselben ist nicht minder gross, denn es bedeutet einfach eine Übersetzung des bekannten Ausspruches in die mathematische Sprache:

Was man an Kraft gewinnt, verliert man an Geschwindigkeit, und umgekehrt.

Galilei[1]) hatte schon dieses Gesetz als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts erkannt, aber Descartes[2]) gab zuerst die wahre Erklärung des Gleichgewichts. Bernoulli[3]) sprach es dann in seiner allgemeinen Form aus und Lagrange[4]) leitete daraus eine Formel ab, welche die Lösung aller Aufgaben über Gleichgewichtsprobleme einschliesst.

69. Allgemeine Gleichgewichtsbedingung. — In der letzten Gleichung ist $\sum m m' f(r)\,\delta r$ immer ein vollständiges Differential der Coordinaten der Punkte m, m', m'' ... Wenn für die Summe $\sum (X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z)$ dasselbe gilt, und in dem Falle von Naturkräften wird diese Bedingung immer erfüllt sein, so haben die äusseren und inneren Kräfte[5]) ein Potential $V = F(x\ y\ z,\ x'\ y'\ z', \ldots)$, in welchem wir uns die Werthe von k Coordinaten durch die $3n - k$ übrigen unabhängigen Coordinaten ersetzt denken. Die obige Beziehung lässt sich dann ausdrücken durch

$$\delta V = 0;$$

das heisst, *im Falle des Gleichgewichts muss das Potential ein Maximum oder ein Minimum sein in Bezug auf alle unabhängigen Variabelen.*

70. Für stabiles Gleichgewicht ist das Potential ein Minimum. — Es seien a, b, c, a' ... die Werthe von x, y, z, x' ... in der Gleichgewichtslage, für welche V ein Minimum ist.

---

[1]) *Les Méchaniques de Galilée, mathématicien et ingénieur du duc de Florence, avec plusieurs additions,* traduites de l'italien par le P. Mersenne, minime. Paris 1634; besonders der Widmungsbrief von Mersenne, in welchem der Commentator von Galilei sagt, „dass man nichts an Kraft gewinnen kann, was man nicht an Zeit verliert".

[2]) Descartes, Méchanique, traduite par Nicolas Poisson, de l'Oratoire, 1668: Erklärung von Maschinen und Vorrichtungen, um mit einer geringen Kraft schwere Lasten heben zu können.

[3]) Bernoulli, Brief an Varignon. Basel 1717.

[4]) Lagrange, Mécanique analytique; Paris 1788.

[5]) Im Falle eines freien starren Körpers oder mehrerer starrer Körper, die sich gegenseitig beeinflussen, sind die molecularen Arbeiten Null, und das Potential bezieht sich einfach auf die äusseren Wirkungen.

Wir verschieben jeden Punkt um eine sehr kleine Grösse, so dass die Coordinaten die Werthe

$$a + h_0,\ b + k_0,\ c + l_0,\ a' + h'_0,\ b' + k'_0,\ c' + l'_0 \ldots$$

annehmen und theilen den Punkten sehr kleine Geschwindigkeiten v_0, $v'_0 \ldots$ mit; wir wollen zeigen, dass die Verschiebung des Systems immer sehr klein bleiben wird und folglich das Gleichgewicht stabil ist.

Sind $x = a + h$, $y = b + k$, $z = c + l$, $x' = a' + h' \ldots$ die Coordinaten und v, v' die Geschwindigkeiten zu einer beliebigen Zeit t, so hat man:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = -F(a + h,\ b + k,\ c + l,\ a' + h' \ldots) + F(a + h_0,\ b + k_0,\ c + l_0,\ a' + h'_0 \ldots).$$

Wir setzen

$$F(a + h,\ b + k,\ c + l,\ a' + h' \ldots) = F(a, b, c, a' \ldots) + \psi(h, k, l\, h' \ldots),$$

wo die Function ψ für $h = 0$, $k = 0$, $l = 0$, $h' = 0 \ldots$ verschwindet; ferner ist sie positiv und wächst, so lange h, k, l, h' kleiner sind, als gewisse Grenzwerthe H, K, L, H'; es folgt

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma \frac{mv_0^2}{2} - \psi(h,\ k,\ l,\ h' \ldots) + \psi(h_0,\ k_0,\ l_0,\ h'_0 \ldots).$$

Ist A die sehr kleine Grösse $\frac{1}{2}\ \Sigma m v_0^2 + \psi(h_0,\ k_0,\ l_0,\ h'_0 \ldots)$, so muss $\psi(h,\ k,\ l,\ h' \ldots)$ immer kleiner als diese Grösse bleiben, da $\Sigma \frac{mv^2}{2}$ nicht < 0 werden kann; folglich bleiben die Verschiebungen $h, k, l, h' \ldots$ selbst sehr klein und das Gleichgewicht wird stabil sein.

Betrachten wir z. B. ein starres System oder allgemeiner ein System, in welchem die Arbeit der Molecularkräfte Null ist, und welches allein der Wirkung der Schwere unterworfen ist. Bedeutet P das Gewicht des Systems und z_1 die senkrechte Coordinate des Schwerpunktes, so ist

$$V = Pz_1.$$

Damit das Gleichgewicht stabil sei, muss z_1 ein Minimum sein, das heisst, der Schwerpunkt muss so tief wie möglich liegen.

Wenn das Potential ein Maximum ist, wird das Gleichgewicht labil.[1])

IV. Absolute Einheiten; C.-G.-S.-System.

71. Fundamentale Einheiten; abgeleitete Einheiten. — In jeder mechanischen Wissenschaft, und darunter muss jede Wissenschaft verstanden werden, welche einen materiellen Zweck hat, lassen sich alle der Untersuchung unterworfenen Grössen, so verschiedenartig sie auch sein mögen, mit Hülfe der drei Einheiten der *Länge, Masse* und *Zeit* ausdrücken.

Auf diese drei *fundamentalen* Einheiten können alle secundären Einheiten zurückgeführt werden. Die Einheit der Oberfläche z. B. wird das über der Längeneinheit errichtete Quadrat sein; die Einheit der Geschwindigkeit hat derjenige bewegliche Körper, welcher die Längeneinheit in der Zeiteinheit gleichförmig durchläuft etc. Man muss nur darauf achten, die *abgeleiteten Einheiten* mit den Grundeinheiten durch einfache Beziehungen zu verbinden und in allen Fällen diese Beziehungen kenntlich zu machen, so dass man die in einem System erhaltenen numerischen Werthe leicht in ein anderes System übertragen kann. Ein sicheres Mittel zur Ermöglichung dieser Forderung besteht darin, für jede abgeleitete Einheit die *Dimensionen* in Bezug auf die drei Fundamentaleinheiten anzugeben.

72. Dimensionen. — Wenn b sich wie die n^{te} Potenz von a ändert, so sagt man, b habe die $n$fache Dimension von a. So hat die Einheit der Oberfläche L^2 die Dimension 2 in Bezug auf die Längeneinheit L; die Einheit der Geschwindigkeit ist von den Dimensionen 1 in Bezug auf die Längeneinheit L und -1 in Bezug auf die Zeiteinheit T, und die Gleichung $V = LT^{-1}$, welche die Dimensionen der betrachteten Grösse angiebt, heisst die *Dimensionsgleichung* dieser Grösse. Wenn die Längeneinheit 100 mal kleiner wird, so muss offenbar die Zahl, welche eine Länge ausdrückt, 100 mal grösser ausfallen; die Zahl, welche eine Oberfläche darstellt, wird 100^2 oder 10 000 mal und der numerische Coefficient einer Geschwindigkeit 100 mal grösser werden etc.

---

[1]) Siehe Resal, Traité de Mécanique générale; Paris, Gauther-Villars 1873 I, 261. — Schell, Theoretische Mechanik II, S. 540.

Wenn man ausserdem die Einheit der Zeit 60mal grösser wählt, so wäre der Ausdruck für die Geschwindigkeit noch mit $\left(\frac{1}{60}\right)^{-1}$ zu multipliciren, so dass er $100 \times \left(\frac{1}{60}\right)^{-1}$ oder 6000 mal grösser würde. Mit Hülfe der Dimensionsgleichung einer Grösse kann man also von einem Maasssystem zu einem anderen übergehen, und die Regel zur Ermittlung des numerischen Coefficienten einer Grösse lautet: *Man hat die Fundamentaleinheiten des alten Systems im neuen System auszudrücken und diese Zahlen in die Dimensionalgleichung der betrachteten Grösse einzusetzen.*

73. Fundamentaleinheiten im C.-G.-S.-System. — Die bisher allgemein benutzte Zeiteinheit ist *die Secunde* mittlerer Zeit. Da sie von der genauen Dauer einer Umdrehung der Erde um ihre Achse und gleichzeitig von dem Zeitraum abhängt, welchen unser Planet gebraucht, um seine Bahn um die Sonne zu durchlaufen, z. B. die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen durch den Frühlingspunkt, mit anderen Worten, da unsere Zeiteinheit gleichzeitig von der Länge des Sterntages und von der Länge des tropischen Jahres abhängt, so beruht dieselbe nicht auf unveränderlichen Grundlagen. Es würde sicher vortheilhaft sein, sie durch eine vollständig unveränderliche Einheit zu ersetzen, z. B. die Schwingungsdauer von homogenem Licht, welches sich, wie das einer Natriumflamme, leicht herstellen lässt. Verschiedene Physiker haben schon diesen Vorschlag gemacht. Wir bleiben indess bei der gebräuchlichen Einheit und nehmen als Zeiteinheit die mittlere Sonnensecunde.

Die wissenschaftliche Einheit der Länge ist das Meter, das heisst, eine Länge, die derjenigen des *Étalon des Archives* gleich ist; man kann auch ein Vielfaches des Meter als Einheit wählen: Die englischen Physiker haben das *Centimeter* angenommen. Vielleicht würde es logischer sein, als Längeneinheit die Wellenlänge zu nehmen, welche diejenige Lichtart im Vacuum besitzt, von der man schon die Zeiteinheit entlehnt hat; doch das metrische System ist jetzt überall eingeführt, und unsere Längeneinheit soll das Centimeter sein.

Die Einheit der Masse ist die *Masse des Gramm*; dasselbe ist theoretisch die Masse eines Cubikcentimeter destillirtes Wasser bei 4^0 C. und praktisch $\frac{1}{1000}$ der Masse des Kilogramm *des Archives.*[1])

[1]) Im Jahre 1889 wurden die neuen internationalen Prototype des Meter und des Kilogramm von der Conférence générale des poids et mesures den einzelnen betheiligten Staaten ausgehändigt, und von diesem

Die fundamentale Einheit war zuerst die des Gewichts (**43**); bei dieser Wahl ist aber sowohl die Masseneinheit wie die Krafteinheit von der Intensität g der Schwere abhängig, welche sich auf der Erde von Punkt zu Punkt ändert. Dieser Übelstand fiel Gauss auf, als er ein allgemeines System für magnetische Beobachtungen in Ländern aufstellen wollte, in welchen die Intensität der Schwere sehr verschieden ist. Er nahm deshalb als Fundamentaleinheit die Masse des Gramm; die Krafteinheit wird in Folge dessen $\frac{1 \text{ gr.}}{g}$[1]$= \frac{1 \text{ gr.}}{981}$, und die numerischen Ergebnisse aller Messungen waren nun streng vergleichbar. In der Anwendung ist übrigens dieses System sehr bequem, da die Masse in demselben durch die nämliche Zahl dargestellt wird, welche im gewöhnlichen Sprachgebrauch das Gewicht ausdrückt.

Wenn wir unsere Masseneinheit dem metrischen System anschliessen, so unterwerfen wir sie der Beziehung, welche in diesem System das Gewicht mit dem Volumen verbindet, sie muss sich wie L^3 zu ändern. Die Wahl eines bestimmten Stoffes wie Wasser als Maass für die Dichtigkeit hat also eine Beziehung im Gefolge, welche mit der Natur der Sache nichts zu thun hat. In der Astronomie leitet man die Masseneinheit aus den Einheiten von Zeit und Länge ab, indem man von der Erscheinung der allgemeinen Gravitation ausgeht: Die Masseneinheit hat diejenige Masse, welche einem beliebigen Körper die Einheit der Beschleunigung aus der Einheit der Entfernung ertheilt. Es würde keine Schwierigkeit haben, diese wirklich natürliche Einheit in die Physik einzuführen, da man sie genügend genau in Gramm auszuwerthen vermag.[2]) Wenn es möglich wäre, ein isolirtes Natrium-Molecül zu wiegen,

---

Zeitpunkt an sind im Princip nicht mehr das Meter und das Kilogramm *des Archives*, sondern die Urnormale des Bureau international des Poids et Mesures, welche allerdings nur um schwer nachweisbare Grössen von jenen abweichen, die Einheiten für Länge und Masse. Von denselben ist nur das Kilogramm direct mit dem Kilogramm *des Archives* verglichen; der Anschluss des Meter wird durch einen zweiten Stab vermittelt und ist mit etwas grösserer Unsicherheit behaftet, da bei dem neuen Urnormal die Länge durch die Entfernung zweier Striche, beim alten durch den Abstand zweier Endflächen definirt wird. — L.

[1]) Es muss nämlich immer $P = mg$ oder die Masseneinheit das g-fache der Gewichtseinheit sein.

[2]) Sei m die in der Astronomie angenommene Masseneinheit; einer beliebigen Masse μ theilt sie aus der Entfernung 1 die Beschleunigung 1 mit. An der Oberfläche der Erde nimmt die Masse μ unter Wirkung der Erde mit der Masse M eine Beschleunigung g an, wobei die Erde so wirkt, als ob ihre Masse in ihrem Centrum in der Entfernung R von

so wäre es rathsam, dessen Masse als Einheit zu nehmen, wenn die Vibration der Linie *D* die Einheit der Länge und Zeit geliefert hätte.

Das auf diesen fundamentalen Einheiten, Centimeter, Gramm, Secunde aufgebaute System oder das C.-G.-S.-System[1]) verbreitet sich immer mehr. Schon dieser Grund empfiehlt es ganz besonders; denn ein von allen Völkern angenommenes Maasssystem würde unbestreitbare Vortheile haben.

Es ist klar, dass im Allgemeinen eine einzige Einheit für jede Grössenordnung nicht ausreichend ist. Der Abstand der Sonne von der Erde kann vernünftigerweise nicht in Centimeter ausgedrückt werden, ebenso wenig wie sich eine Wellenlänge bequem in dieser Einheit ausdrücken lässt. Man umgeht diese Schwierigkeit zum Theil durch Anwendung von Multipla und Submultipla: Grosse Längen werden in Kilometer oder Erdhalbmessern angegeben; für kleine Längen verwendet man den millionsten Theil des Meter (den tausendsten Theil des Millimeter) und bezeichnet ihn mit dem Buchstaben μ. Im C.-G.-S.-System benutzt man ausser den gewöhnlichen Multipla und Submultipla des metrischen Systems auch das millionenfache (Mega-) und den millionsten Theil (Mikro-) der Grundeinheit. In der folgenden Tafel[2]) sind die für die metrischen Einheiten von Comité international des Poids et Mesures angenommenen Abkürzungen zusammengestellt:

Länge	Fläche	Volumen	Hohlmaass	Masse
Kilometer . . *km*	Quadratkilometer . . *km²*	Cubikmeter . *m³*	Hektoliter . . *hl*	Tonne . . . . *t*
Meter . . . . . *m*	Hektar . . . . *ha*	Cubikdecimeter . *dm³*	Liter . . . . . *l*	Kilogramm . . *kg*
Decimeter . . *dm*	Ar . . . . . *a*	Cubikcentimeter . *cm³*	Deciliter . . . *dl*	Gramm . . . . *g*
Centimeter . . *cm*	Quadratmeter . . *m²*	Cubikmillimeter. . *mm³*	Centiliter . . . *cl*	Decigramm . . *dg*
Millimeter . . *mm*	Quadratdecimeter . *dm²*		Milliliter . . . *ml*	Centigramm . *cg*
Mikromillimeter . *μ*	Quadratcentimeter . *cm²*		Mikroliter . . . *λ*	Milligramm . *mg*
	Quadratmillimeter . *mm²*			Mikrogramm . *γ*

μ concentrirt sei. Man hat also $\frac{1}{g} = \frac{m}{M} \cdot \frac{R^2}{1}$; also, wenn D die Dichtigkeit der Erde bedeutet, $m = \frac{4}{3} \frac{\pi R D}{g}$. Es ist $R = 637\,100\,000$, $D = 5{,}56$, $g = 981$; also $m = 15\,000\,000$ Gramm.

[1]) Everett, Physikalische Einheiten und Constanten. Deutsche Bearbeitung von Dr. P. Chappuis und Dr. D. Kreichgauer; Leipzig 1888, Barth.

[2]) In der deutschen Ausgabe eingefügt. — L.

74. Häufig angewandte mechanische Einheiten. — Es wird vortheilhaft sein, für die hauptsächlichen Einheiten der Mechanik die Definitionen als Function der Fundamentaleinheiten zusammenzustellen; der analytische Ausdruck dieser Definitionen ist die Dimensionsgleichung.

1. *Einheit der Geschwindigkeit.* — Geschwindigkeit eines Punktes, der in der Zeiteinheit die Längeneinheit durchläuft.

Dimension: $V = LT^{-1}$.

2. *Einheit der Beschleunigung.* — Beschleunigung eines Punktes, dessen Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um eine Einheit wächst.

Dimension: $G = VT^{-1} = LT^{-2}$.

3. *Einheit der Kraft oder Dyne.* — Die Kraft, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt.

Dimension: $F = MG = MLT^{-2}$.

Die Dyne $= \frac{1\text{ g}}{981}$ unterscheidet sich wenig von dem Milligramm.

1 Milligramm ist gleich 0,981 Dyne.
1 Gramm „ „ 0,981 Kilodyne.
1 Kilogramm „ „ 0,981 Megadyne.

4. *Einheit der Arbeit oder Erg.* — Die Arbeit, welche von der Krafteinheit geleistet wird, wenn sich dieselbe in ihrer eigenen Richtung um die Längeneinheit verschiebt.

Dimension: $W = FL = ML^2T^{-2}$.

1 Gramm-Centimeter ist gleich g Erg.
1 Kilogrammmeter „ „ 100 000 Erg oder 98,1 Megerg.

5. *Einheit der Leistung (Effect).* — Leistung eines Motors, der in der Zeiteinheit die Arbeitseinheit liefert.

Dimension: $P = \frac{W}{T} = ML^2T^{-3}$.

1 Pferdekraft ist gleich $75 \times 100\,000 \times$ g oder $7{,}36 \times 10^9$ Einheiten.[1])

[1]) Für sehr grosse Zahlen verwendet man mit Vortheil die Bezeichnung K. 10^n, da man auf diese Weise die vielen Nullen vermeidet; wählt man K zwischen 0 und 10, so ist n die Charakteristik des Logarithmus von K. 10^n; so ist z. B. von $7{,}36 \cdot 10^9$ der Logarithmus 9,86683.

Zweites Capitel.

Schwere.

I. Vom Fall der Körper.

75. Richtung der Schwere. Loth. — Die Schwere ist die Kraft, welche alle Körper nach dem Mittelpunkt der Erde hin zieht. Man unterscheidet bei ihr, wie bei jeder anderen Kraft, Richtung, Angriffspunkt und Grösse.

Die Richtung der Schwere ist die Lothrechte, und sie wird

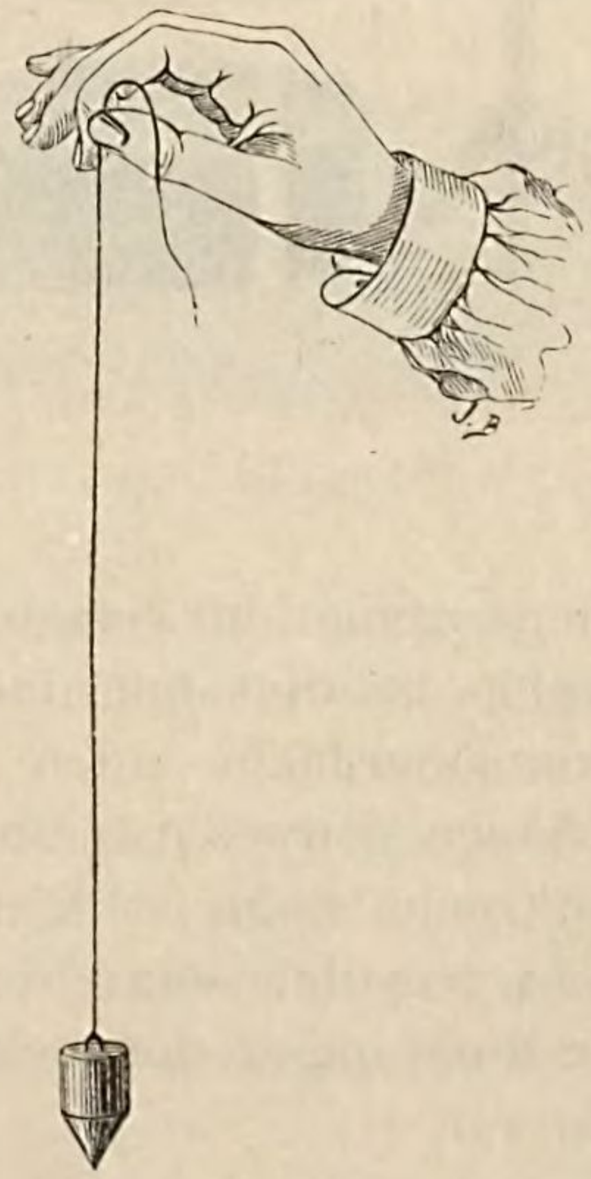


Fig. 88.

mit Hülfe des Bleilothes bestimmt. Da nämlich die Schwere die einzige Kraft sein soll, welche auf den an einem vollkommen

biegsamen Faden aufgehängten Körper wirkt, so kann nur dann Gleichgewicht bestehen, wenn die Richtungen des Fadens und der Kraft zusammen fallen.

Das Loth ist überall senkrecht zur Oberfläche ruhender Flüssigkeiten. Zur Bestätigung dieser Thatsache hängt man ein kleines Platingewicht mit Hülfe eines sehr feinen Seidenfadens an einem horizontalen Arme eines Stativs auf und lässt es in eine undurchsichtige Flüssigkeit, schwarzgefärbtes Wasser oder Quecksilber, tauchen; man sieht dann das in der Flüssigkeit

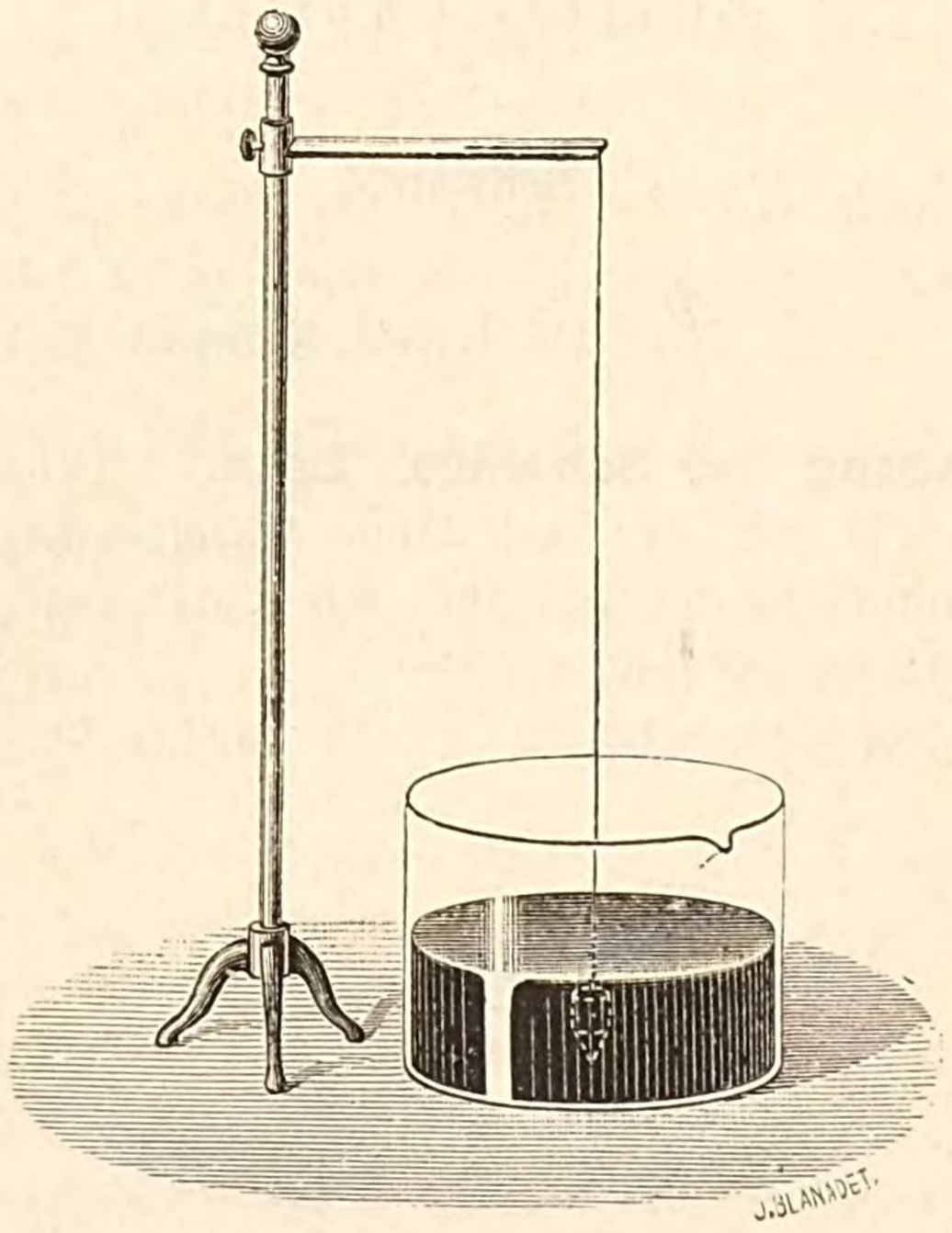


Fig. 89.

reflectirte Bild des Fadens genau in dessen Verlängerung. Nach den Gesetzen der Reflexion ist dies nur dann der Fall, wenn der Faden mit der Flüssigkeitsoberfläche einen rechten Winkel bildet.

Da die Meeresoberfläche convex ist, und das Bleiloth an jeder Stelle auf derselben senkrecht steht, so können die Lothe an zwei entfernten Punkten nicht parallel sein; für benachbarte Punkte dürfen wir indessen die Richtungen der beiden Lothe als parallel ansehen.

76. Schwerpunkt. — *Definition des Schwerpunktes.* Wenn man einen Körper in beliebig kleine Stücke theilt, so wird jedes dieser Stücke durch die Schwere beeinflusst; da alle diese Wir-

kungen parallel sind, so hat die Resultante dieselbe Richtung wie die Componenten und ist numerisch gleich ihrer Summe; die Resultante heisst das *Gewicht* des Körpers und ihr Angriffspunkt der *Schwerpunkt* desselben (**38**). Wenn man diesen Punkt unterstützt, so ist der Körper in allen Lagen unter dem Einfluss der Schwere im Gleichgewicht.

Bestimmung des Schwerpunktes eines homogenen Körpers. — Da der Mittelpunkt paralleler Kräfte seine Lage nicht ändert, 1) wenn man die gemeinsame Richtung der Kräfte, aber nicht ihre Grösse verändert, 2) wenn die Grösse aller Kräfte in gleichem Verhältniss geändert wird, so bleibt auch der Schwerpunkt eines Körpers immer derselbe, wenn man den Körper dreht oder nach Orten bringt, an welchen die Grösse der Schwerkraft verschieden ist. Da bei einem homogenen Körper das Gewicht irgend eines Theilchens seinem Volumen proportional ist, kann man in diesem Falle den Schwerpunkt auf geometrischem Wege bestimmen. Ist der homogene Körper flüssig oder gasförmig, so darf man, ohne dadurch das Gleichgewicht zu stören, feste Verbindungen zwischen seinen Theilen voraussetzen, dann die einzelnen Kräfte zu einer Resultante vereinigen, und deren Angriffspunkt genau so bestimmen, als ob der Körper nicht in seinem wirklichen Zustande, sondern als ob er ein fester Körper wäre.

Lässt man die Höhe eines homogenen Prismas mit beliebiger Basis unendlich abnehmen, so wird sein Schwerpunkt sich mehr und mehr dem Mittelpunkt eines Systemes von parallelen Kräften nähern, deren Grössen dem Flächeninhalt der einzelnen Theile jener Basis proportional sind. Man nennt diesen Punkt den Schwerpunkt der Fläche.

Verringert man den Querschnitt eines sehr dünnen Drahtes immer mehr, so erhält man eine schwere Linie, deren Schwerpunkt man bestimmen kann.

Der Schwerpunkt eines jeden Körpers, welcher eine Symmetrieachse oder eine Symmetrieebene hat, liegt in dieser Achse oder Ebene.

Der Schwerpunkt eines jeden Körpers, der einen Mittelpunkt besitzt, liegt in diesem Mittelpunkt.

Durch Anwendung dieser selbstverständlichen Grundsätze lässt sich der Schwerpunkt jedes gegebenen geometrischen Gebildes finden; man wird z. B. leicht einsehen, dass der Schwerpunkt eines dreiseitigen Prismas in der Mitte der Geraden liegt, welche die beiden Schnittpunkte der drei Ecktransversalen nach den Mitten der Seiten einer jeden Grundfläche (Schwerpunktstransversalen) mit einander verbindet; der Schwerpunkt eines Tetraeders liegt auf der Ver-

bindungslinie der einen Ecke mit dem Schnittpunkt der Schwerpunktstransversalen des gegenüberliegenden Dreieckes, und zwar in einem Viertel der Länge von der Fläche aus gerechnet etc.

Analytisch bestimmt man die Lage des Schwerpunktes eines beliebigen Körpers durch Anwendung des Satzes von den Momenten paralleler Kräfte (**38**) auf jede der drei Coordinaten-Ebenen. Theilen wir den Körper durch zur x-Achse senkrechte Ebenen in eine sehr grosse Anzahl von Scheiben, zerschneiden wir ihn dann ebenso durch Ebenen senkrecht zur y-Achse und z-Achse, so wird er in sehr viele parallelepipedische Elemente zerfallen; jedes einzelne derselben besitzt das Gewicht $p.dxdydz$, wenn p das Gewicht der Volumeneinheit oder das specifische Gewicht des Körpers ist. Bezeichnen wir mit P das Gewicht des ganzen Körpers und mit X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunktes, so bestehen die Gleichungen:

$$PX = \iiint px\,dx\,dy\,dz,$$

$$PY = \iiint py\,dx\,dy\,dz,$$

$$PZ = \iiint pz\,dx\,dy\,dz.$$

Jede Integration hat zwischen Grenzen statt zu finden, welche durch die äussere Oberfläche des Körpers gegeben sind.

Gleichgewicht eines Körpers unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft. — Die Betrachtung des Schwerpunktes erlaubt in einfacher Weise die Gleichgewichtsbedingungen eines schweren Körpers aufzustellen.

Wenn der Körper an einem Punkte aufgehängt ist, so wird die auf ihn wirkende Schwerkraft nur dann durch den Widerstand des Befestigungspunktes aufgehoben, wenn die Richtung der Resultirenden durch jenen Punkt hindurch geht; die durch den Schwerpunkt gezogene Vertikale muss demnach den Aufhängungspunkt enthalten. Diese Bemerkung bietet ein bequemes Mittel, den Schwerpunkt eines beliebig geformten Körpers von nicht zu beträchtlicher Masse zu bestimmen. Man hängt den Körper an einem Punkte (A) seiner Oberfläche mittelst eines biegsamen Fadens auf und lässt ihn zur Ruhe kommen; dann geht die Richtung des Fadens (BA) durch den Schwerpunkt. Wiederholt man darauf denselben Versuch, indem man den Körper an einem andern Punkte

(C) aufhängt, so liegt der Schwerpunkt im Schnittpunkt der beiden Richtungen (AB und DC).

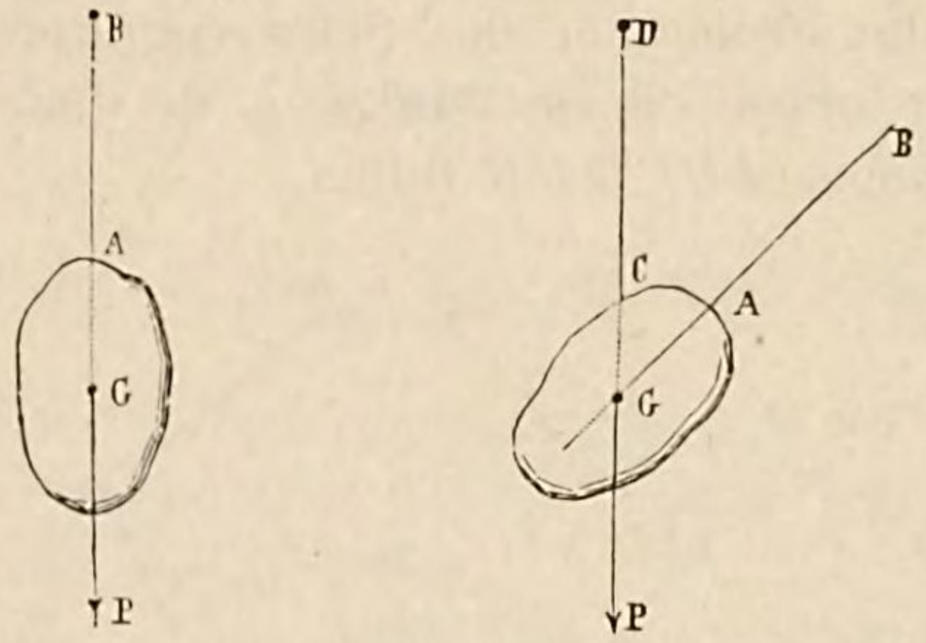


Fig. 90.

Wenn ein schwerer Körper um eine Achse drehbar ist, so ist es zur Herstellung des Gleichgewichtes nothwendig und hinreichend, dass der Schwerpunkt in der durch die Achse gehenden vertikalen Ebene liegt. Man benutzt dies zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers von grosser Masse; stellt man einen solchen auf einer starken Stahlschneide ins Gleichgewicht, so geht die durch die Schneide gelegte vertikale Ebene durch den Schwerpunkt. Wiederholt man denselben Versuch noch in zwei anderen Lagen, so ist der Schnittpunkt der drei Ebenen der gesuchte Schwerpunkt.

Wenn der Körper auf einer Unterlage, z. B. auf einer horizontalen Ebene ruht und dieselbe nur mit einem oder mit zwei Punkten seiner Oberfläche berührt, so fallen die Gleichgewichtsbedingungen mit den eben untersuchten zusammen. Das Gleichgewicht kann stabil, labil oder indifferent sein. Sucht der Körper nach einer kleinen Ablenkung aus der Ruhelage in dieselbe zurück zu kehren, so ist das Gleichgewicht stabil; als Beispiel kann ein Ellipsoid dienen, das mit dem Ende seiner kleinen Achse auf einer horizontalen Ebene ruht. Das Gleichgewicht ist labil, wenn der Körper nach einer kleinen Ablenkung aus der ursprünglichen Lage sich in Folge der Einwirkung der Schwerkraft aus dieser zu entfernen strebt; dieses Gleichgewicht ist in Wirklichkeit nicht zu erreichen, da der geringste äussere Einfluss eine Störung des theoretischen Gleichgewichtes bewirkt; als Beispiele seien ein an dem Ende der grossen Achse unterstütztes Ellipsoid oder ein auf die Spitze gestellter Kegel angeführt. Eine homogene Kugel ist auf einer horizontalen Fläche in indifferentem Gleichgewicht.

Berührt der Körper die Fläche an mehreren Punkten, so muss, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die durch den Schwerpunkt

gehende Vertikale dasjenige Flächenstück treffen, welches durch Verbindung der äussersten Unterstützungspunkte gebildet wird. Diese Figur nennt man das *Unterstützungspolygon.*

Wenn g die Projection des Schwerpunktes auf die stützende Fläche ist, so muss dieser Punkt g in das Innere des Unterstützungspolygones $ABCDEF$ fallen.

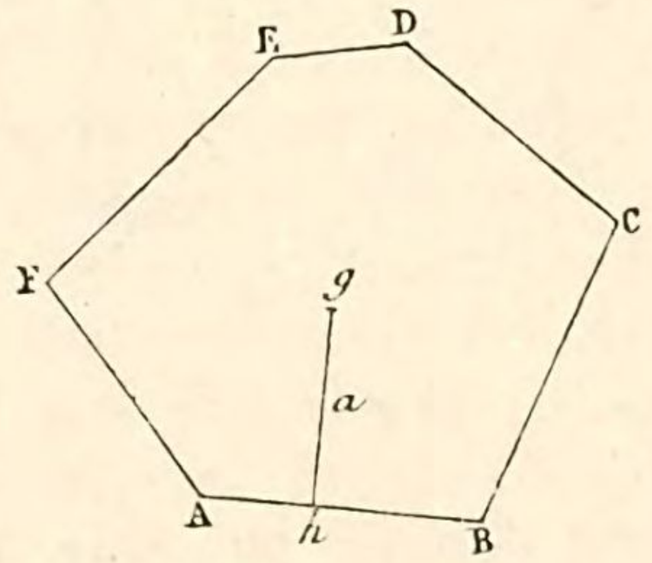


Fig. 91.

Von g aus wollen wir die Linie gh senkrecht zu AB ziehen, und im Punkte h zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte P und $-P$ anbringen, welche an absoluter Grösse gleich dem Gewicht des Körpers sein sollen; man hat dann eine Kraft P, die im Punkte h angreift, und ein Kräftepaar $P, -P$ mit dem Hebelarm gh oder a. Wenn man den Körper um die Kante AB kippt, so wird die einzelne Kraft P durch den Widerstand der Kante aufgehoben, und nur das Kräftepaar sucht den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzubringen; das Moment $P.a$ dieses Kräftepaares nennt man das *Maass der Stabilität bezogen auf die Achse AB.*

In der That kann die Stabilität des Körpers durch die zum Umkippen nöthige Arbeit gemessen werden. Legen wir in der

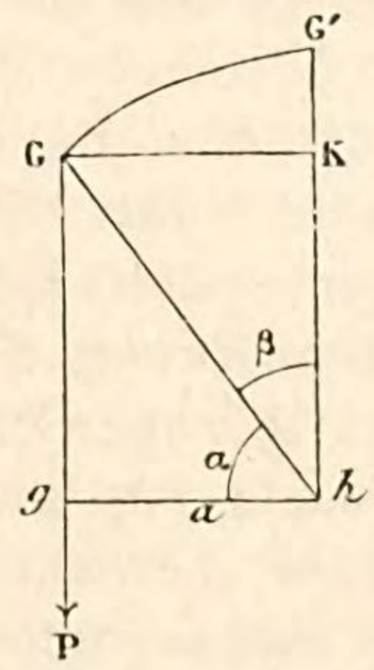


Fig. 92.

Richtung gh einen vertikalen Schnitt durch den Körper und ist G der Schwerpunkt, an welchem das Gewicht P des Körpers an-

greift, so muss, um den Punkt G nach G' (senkrecht über AB) zu bringen, die Arbeit

$$T = P \cdot G'K = Pa(\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$$

geleistet werden. Durch Einführung des Winkels $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ erhält man:

$$T = Pa \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \text{Maass der Stabilität} \times \operatorname{tg}\frac{\beta}{2};$$

dieser Ausdruck besitzt ceteris paribus für $\beta = 90^0$ ein Maximum und wird für einen beliebigen Werth von β um so grösser, je grösser das Maass der Stabilität ist.

Ganz allgemein ist die Stabilität am grössten, wenn der Schwerpunkt möglichst tief liegt (**70**).

In physikalischen Sammlungen findet man verschiedene Apparate, welche das Bestreben des Schwerpunktes, eine möglichst tiefe

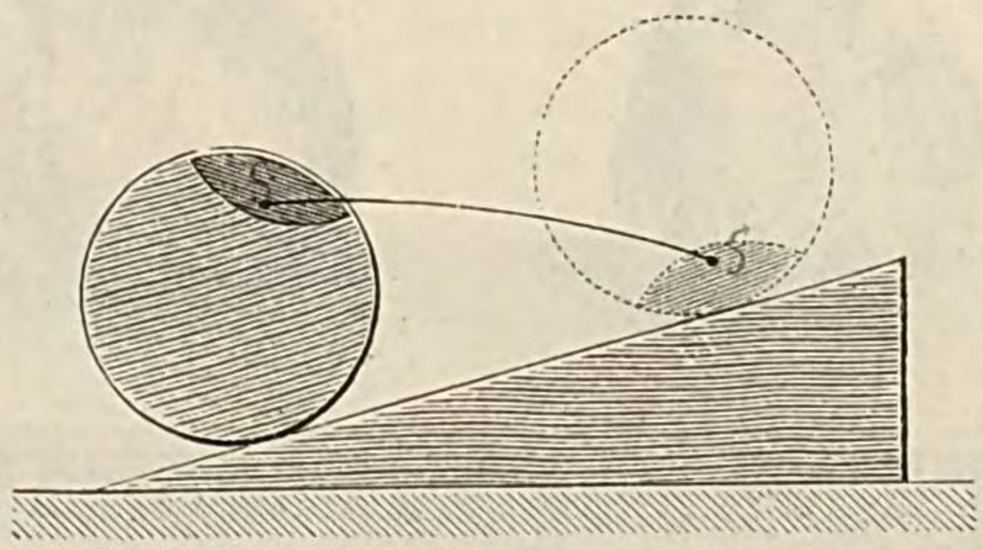


Fig. 93.

Lage einzunehmen, sehr deutlich erkennen lassen. Zu diesen Versuchen dient z. B. eine Holzscheibe, welche an einer Stelle der Peripherie mit einer Bleimasse beschwert ist; stellt man dieselbe auf eine schwach geneigte schiefe Ebene in der Weise, dass die durch den

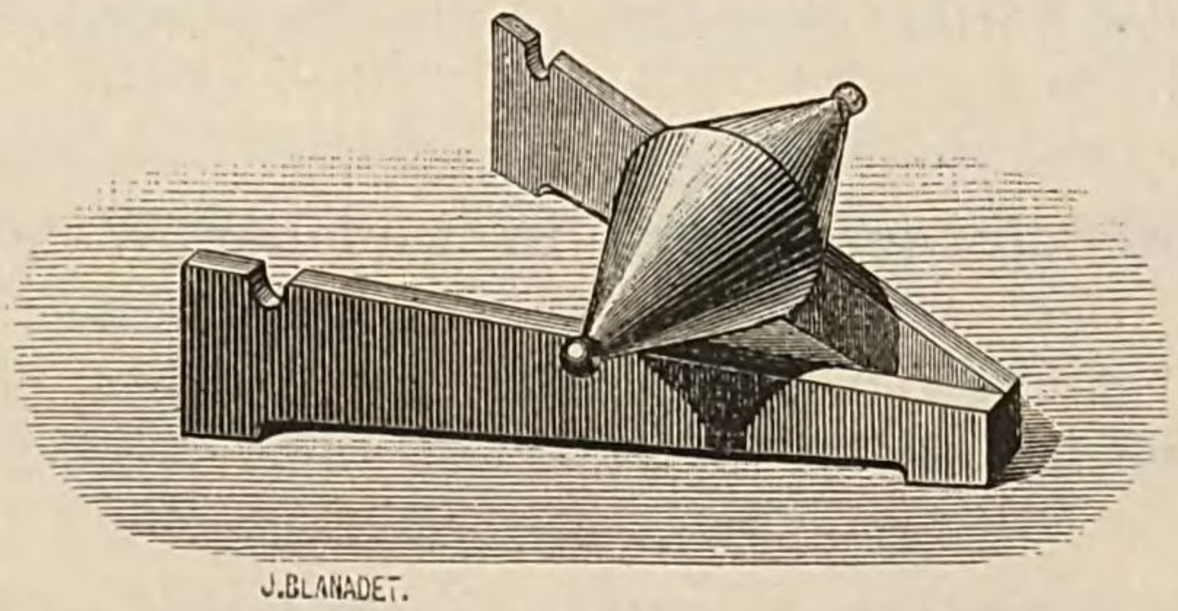


Fig. 94.

Schwerpunkt gehende Vertikale die Unterlage etwas oberhalb des Unterstützungspunktes trifft, so rollt die Scheibe auf der schiefen Ebene

in die Höhe. Bekannt ist auch der Versuch mit einem massiven Doppelkegel, welcher auf zwei schiefe Ebenen gelegt wird; die letzteren sind an dem einen Ende durch ein Gelenk verbunden, so dass man den von ihnen gebildeten Winkel mehr oder weniger ändern kann. Bei einer passend gewählten Stellung der schiefen Ebenen gegen einander rollt der Doppelkegel nach dem höchsten Punkt derselben und scheint zu steigen, während in Wirklichkeit sein Schwerpunkt sich nach unten bewegt. Ein physikalisches Instrument kann man durch Beschweren des Fusses stabiler machen, da man auf diese Weise den Schwerpunkt weit nach unten verlegt; auf dem gleichen Princip beruht das in Fig. 95 abgebildete bekannte Spielzeug.

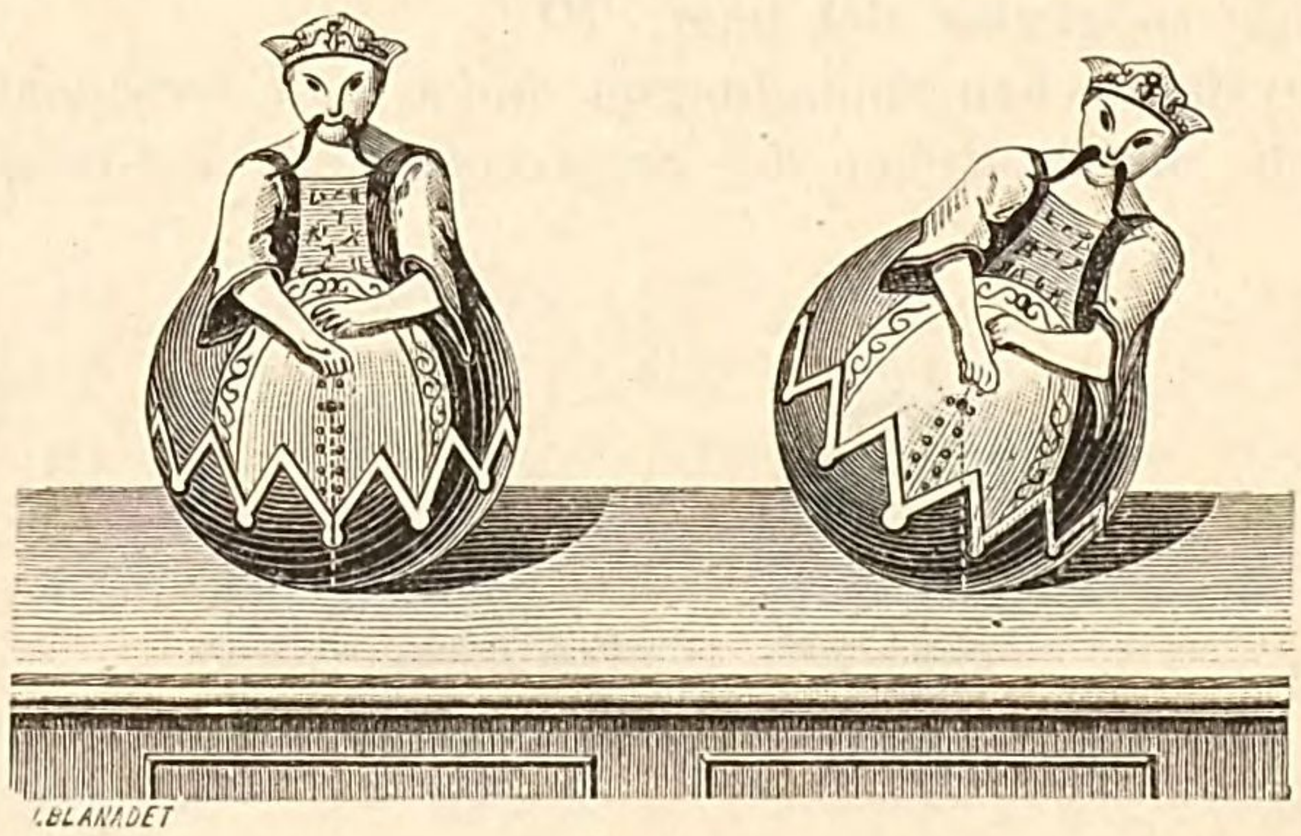


Fig. 95.

77. Fallgesetze. — Eine Kraft ist eindeutig bestimmt, wenn man die Bewegung kennt, welche sie bei einem ihrem Einfluss unterworfenen Körper erzeugt (**44**). Um die Grösse der Schwerkraft zu ermitteln, müssen wir demnach zuerst experimentell die Fallgesetze der Körper untersuchen; dieselben wurden von Galilei aufgestellt.[1])

78. Die Schwere wirkt in gleicher Weise auf alle Körper. — Das zuerst gefundene Ergebniss besteht darin, dass alle Körper mit gleicher Geschwindigkeit fallen. Die tägliche Erfahrung scheint dieser Thatsache zu widersprechen; wenn die

---

[1]) Galilei, geboren in Pisa 1564, gest. in Arcetri bei Florenz 1642; Gesammelte Werke, Ausgabe Alberi, 16 Bände; Florenz 1842—1856. Vgl. auch über die Fallgesetze Ostwald's Classiker der exacten Wissenschaften Nr. 11, Unterredungen und mathematische Demonstrationen etc. von Galileo Galilei; Leipzig 1890, Engelmann. — L.

Körper in der Luft fallen, so bewegen sie sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten; aber diese Erscheinung ist dem veränderlichen Widerstande zuzuschreiben, welchen bei ihrem verschiedenen Volumen die Luft ihnen entgegensetzt. Als Galilei Professor der Mathematik in Pisa[1]) war (1589 bis 1592), zeigte er durch wiederholte Versuche auf dem schiefen Thurme, dass Körper von verschiedenem Gewichte mit der gleichen Geschwindigkeit fallen; seine Schlüsse standen in schroffem Gegensatz zu der damals allgemein als gültig betrachteten Ansicht des Aristoteles, welcher behauptet hatte, ein Körper falle um so schneller, je schwerer er ist.[2])

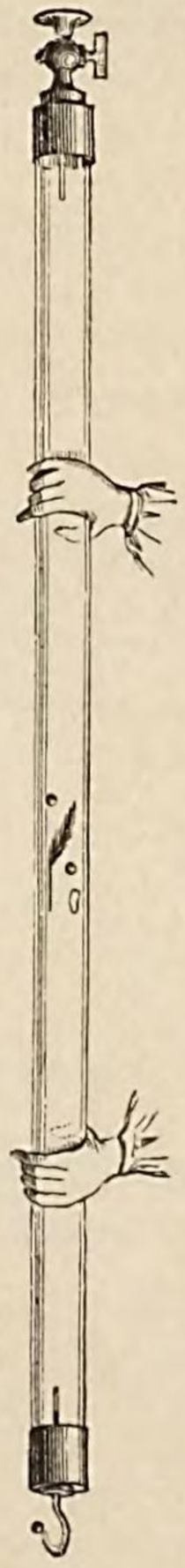


Fig. 96.

In Frankreich wiederholten Frenicle, und später Mariotte diese Versuche; in England führte sie Desaguliers in der St. Pauls-Kathedrale in Gegenwart von Newton aus, welch Letzterer dann einen schlagenderen Beweis durch Versuche im leeren Raum ersann. Mit Hülfe seiner Fallröhre (Fig. 96) lässt sich ohne Mühe zeigen, dass Körper von sehr verschiedener Beschaffenheit (Blei, Papier, Federn etc.) im leeren Raum gleich schnell fallen. Lässt man nach und nach Luft in die Newton'sche Röhre eindringen, so wird die Fallgeschwindigkeit der leichten Körper immer mehr verringert.

Der Widerstand, den die Luft der Bewegung eines fallenden Körpers entgegensetzt, macht sich, je nach der Oberfläche, welche der Körper der Luft darbietet, in verschiedenem Grade bemerklich. Ein Blatt Papier fällt langsam; knittert man es dagegen zusammen und vermindert so seine Oberfläche, so fällt es schneller. Zwei Blätter Papier, von denen das eine mit der Kante, das andere mit der breiten Fläche voran fällt, erlangen sehr verschiedene Geschwindigkeiten. Dasselbe Resultat erhält man mit dem in Fig. 97 abgebildeten Apparat. Die Flügel eines Rades B liegen in Ebenen, welche durch die Drehungsachse gehen; die Flügel des Rades A befinden sich sämmtlich in einer auf der Achse senkrechten Ebene. Man ertheilt beiden Rädern dadurch die gleiche Anfangsgeschwin-

---

[1]) S. Thurot, Journal de Physique, III, 160; 1874.

[2]) Stévin, ein Zeitgenosse von Galilei, hatte schon diesen Irrthum der Peripatetiker widerlegt, indem er gleichzeitig zwei Bleikugeln von zehnfach verschiedener Masse auf ein Brett fallen liess und zeigte, dass kein merklicher Unterschied in der Fallzeit vorhanden war.

digkeit, dass man ein zum Apparate gehöriges Gewicht fallen lässt; das letztere ist mit zwei Zahnstangen fest verbunden, welche in die auf der Achse sitzenden Triebe eingreifen. Wenn das Gewicht unten ankommt, lassen die Zahnstangen die kleinen Triebe

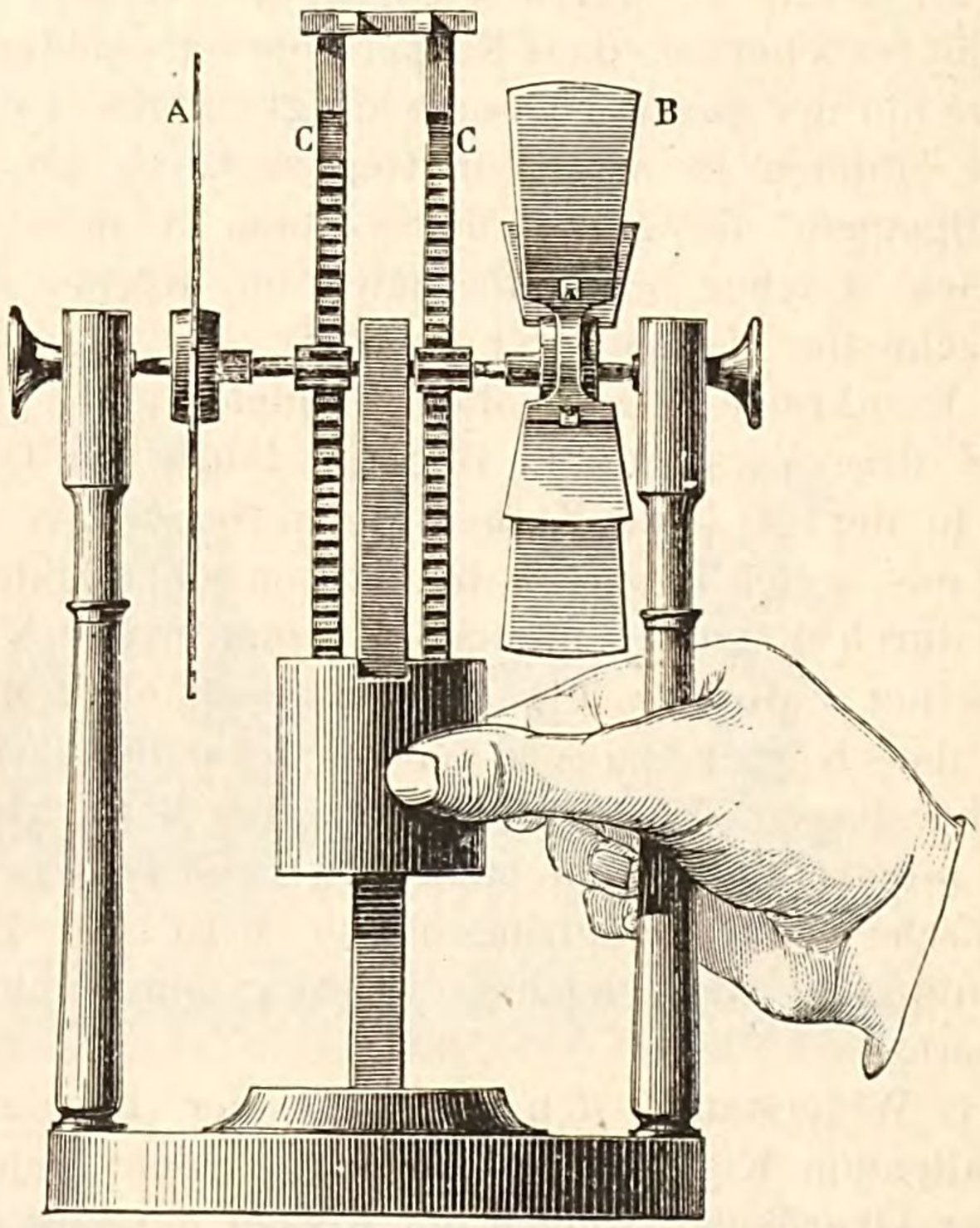


Fig. 97.

los, welche sich dann frei in den Nuthen *CC* drehen können. Obgleich die kleinen Flügelräder auf diese Weise einen gleichen Antrieb erhalten, so bleibt doch *B* lange vor *A* stehen. Wiederholt man den Versuch unter der Glocke einer Luftpumpe, so drehen sich die beiden Rädchen genau gleich lang.

Bei gleicher Oberfläche verzögert der Luftwiderstand die Geschwindigkeit der leichten Körper am meisten. Lassen wir z. B. ein Geldstück und eine Papierscheibe von gleichem Durchmesser und zu vernachlässigender Dicke jedes für sich fallen, so wird das Geldstück sehr viel früher am Boden ankommen als die Papierscheibe. Betrachten wir zur Erklärung dieser Thatsache den Fall während einer so kurzen Zeit, dass die wirksamen Kräfte während derselben als constant angenommen werden können. Es sei g die Beschleunigung, welche das Gewicht P des Geldstückes diesem

Geldstück im leeren Raum ertheilen würde, und g' die Beschleunigung, welche das Geldstück in der Luft annimmt, welche ihm den Widerstand r entgegensetzt. Nach dem Princip der Proportionalität zwischen den Beschleunigungen und den auf ein und dieselbe Masse wirkenden Kräften (**42**, III), hat man die Gleichung:

$$\frac{g'}{g} = \frac{P - r}{P},$$

und hieraus folgt

$$g' = g\left(1 - \frac{r}{P}\right).$$

Im leeren Raum würde die Papierscheibe, deren Gewicht p sein mag, durch diese Kraft p dieselbe Beschleunigung g erhalten wie das Geldstück durch sein Gewicht P. In der Luft erfährt das Papier, da seine Oberfläche gleich der des Geldstückes ist, den gleichen Widerstand r, und seine Beschleunigung g'' in der Luft beträgt:

$$g'' = g\left(1 - \frac{r}{p}\right);$$

da aber $\frac{r}{p}$ viel grösser ist als $\frac{r}{P}$, so muss g'' sehr viel kleiner als g' sein, d. h. das Papier fällt langsamer als das Geldstück. Legen wir das Papier auf die Münze, so kommen die beiden in demselben Augenblick am Boden an. Sie bilden dann in der That nur noch einen einzigen Körper und fallen mit der Beschleunigung

$$g''' = g\left(1 - \frac{r}{P + p}\right).$$

Man beobachtet eine ähnliche und noch interessantere Erscheinung bei dem *Wasserhammer*. Derselbe besteht aus einer dicken Glasröhre, an deren einem Ende eine Kugel angeblasen ist; dieselbe ist genügend gross, um alles in dem Apparat befindliche Wasser fassen zu können. Vor dem Zuschmelzen des Rohres kocht man das Wasser längere Zeit in der Kugel, um die Luft vollständig zu entfernen. Lässt man nachher das Wasser in die Kugel fliessen und dreht dann den Apparat rasch um, so fällt das Wasser als Ganzes, wie ein fester Körper, und kommt mit einem dem Schlage eines Hammers vergleichbaren Geräusch an dem Boden des Rohres an, der ziemlich kräftig sein muss, um den Stoss aushalten zu können. Die Wassertropfen, welche sich in der Luft

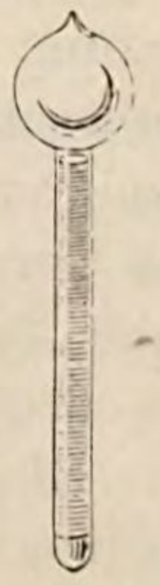


Fig. 98.

von einander trennen, bleiben hier vereinigt; daraus muss man schliessen, dass im leeren Raum alle Tropfen mit gleicher Geschwindigkeit fallen.

79. Die schiefe Ebene von Galilei. — Die Ergründung der Fallgesetze durch Galilei ist ein Muster für die richtige Methode der physikalischen Forschung, welche Galilei selbst geschaffen und mit grossem Erfolg angewandt hat.[1]) Nachdem er zuerst festgestellt hatte, dass die Schwere auf alle Körper in der gleichen Weise wirkt, ging er von der Hypothese aus, dass sie eine continuirliche und constante Kraft ist. Unter der Einwirkung einer derartigen Kraft wächst die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit (**42**). Es handelte sich also darum, diese Geschwindigkeit zu messen. Galilei geht dieser Schwierigkeit aus dem Wege, indem er das Problem folgendermassen anfasst: Er zeigt geometrisch, dass bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die zurückgelegten Wege den Quadraten der Zeiten proportional sind. Es genügte demnach die in verschiedenen, bekannten Zeiten durchlaufenen Wege zu messen, um zu erkennen, ob die a priori zugelassene Vorstellung von der Schwerkraft richtig ist. Da aber die Körper beim freien Fall sehr grosse Geschwindigkeiten erlangen, und der in einer gegebenen Zeit zurückgelegte Weg schwer mit genügender Genauigkeit zu messen ist, so formte Galilei die Aufgabe noch einmal mathematisch in der Weise um, dass nur leicht messbare Grössen zu beobachten waren. Dadurch bewies er zugleich, wie berechtigt seine Behauptung war, dass ein guter Physiker zuerst Mathematiker sein müsse. Er zeigte nämlich, dass „ein schwerer Körper mit grösserer Kraft in der Richtung der Vertikalen als auf einer schiefen Ebene fällt, und zwar in demselben Verhältniss, wie die am stärksten geneigte Linie (die Hypotenuse) der Ebene länger als die Vertikale ist.“ Die Bewegung auf einer schiefen Ebene ist also der Bewegung in der Lothrechten gleichwerthig, wenn man die letztere in einem bestimmten Verhältniss verzögert. Nach diesen Betrachtungen sind nun Versuche leicht ausführbar, und die a priori aufgestellte Hypothese kann dem in der Physik allein beweiskräftigen Criterium, der Prüfung durch genaue Messungen, unterworfen werden.

Die Hypotenuse AB einer schiefen Ebene bilde mit der Horizontalen BC den Winkel α. Die Untersuchung der Bewegung eines Körpers auf dieser Ebene können wir auf die Bewegung

---

[1]) Vgl. über diesen Gegenstand Th. H. Martin, Galilei. Paris, Didier, 1868; ferner Thurot a. a. O.

seines Schwerpunktes zurückführen. In diesem Punkt M wirkt das Gewicht p des Körpers in vertikaler Richtung. Wir zerlegen die Kraft MP in eine zur Ebene senkrechte Componente n und

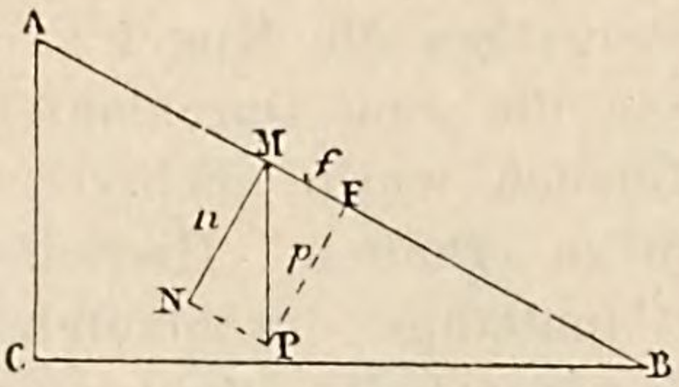


Fig. 99.

eine Kraft f, welche in der Geraden AB liegt. Zieht man durch P die Linien PN und PF parallel zu AB bez. MN, so erhält man ein Rechteck $PNMF$, dessen Seiten MN und MF die Grössen der beiden Componenten n und f bestimmen. Die zur Ebene senkrechte Kraft $n = MN$ wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben; es bleibt somit als wirksame Kraft allein die Componente f übrig, deren Grösse MF leicht zu berechnen ist. Der Winkel MPF ist nämlich gleich dem Winkel $ABC = \alpha$, da seine Schenkel PM und PF senkrecht auf den Schenkeln BC und BA des Winkels ABC stehen. Es ist demnach

$$f = p \frac{AC}{AB}.$$

Die wirksame Componente f ist also gleich dem Gewichte p, vermindert in dem Verhältniss der Höhe AC zu der Länge AB der schiefen Ebene. Um die durch das Gewicht p hevorgebrachte Bewegung zu ermitteln, genügt es demnach, zu untersuchen, welche Bewegung die Kraft f erzeugt; die geringe Geschwindigkeit dieser Bewegung erleichtert die Messungen und vermindert zugleich bedeutend den Einfluss des Luftwiderstandes.

Gesetz der Fallräume. — Zu dieser Untersuchung „nahm man eine hölzerne Latte von ungefähr 12 Klafter (7,20 m)[1]) Länge, deren eine Seite $^1/_2$ Klafter (0,30 m), die andere 3 Finger (0,075 m)[2]) breit war; auf der letzteren hatte man einen Canal von etwas mehr als 1 Finger (0,025 m) Breite ausgehöhlt. Nachdem man

---

[1]) Die Florentiner Klafter ist hierbei zu 0,60 m angenommen. Nach Mersenne (Cogitata physico mathematica; Paris 1647, III, 218), wäre sie genau gleich 23 französische Zoll, also 0,62 m; De Prony giebt in seiner Auswerthung der Längenmaasse (Annuaire du Bureau des longitudes pour 1846, p. 62) 0,59 m an.

[2]) Nach Mersenne war der Finger gleich $^1/_{24}$ Klafter.

sich überzeugt hatte, dass der Canal ganz gerade war, und man ihn gut geglättet hatte, überzog man ihn mit möglichst glattem Pergament und legte eine sehr harte, vollkommen runde, polirte Broncekugel hinein; dann hob man das eine Ende der Latte um einen oder zwei Klafter, liess die Kugel in dem Canal herunterrollen und beobachtete die zum Durchlaufen der ganzen Länge nöthige Zeit. Der Versuch wurde mehrere Mal wiederholt, um diese Zeit recht genau zu erhalten. Hierauf liess man die Kugel nur ein Viertel der Canallänge durchlaufen, bestimmte die Zeit und fand, dass dieselbe genau halb so lang war als die erste. Durch derartige Vergleichung der Zeiten, welche die Kugel brauchte, um die ganze Länge des Canales, die Hälfte, zwei Drittel, drei Viertel oder einen beliebigen Bruchtheil zu durchlaufen, fand man, dass sich die zurückgelegten Wege immer wie die Quadrate der Zeiten verhielten, welches auch die Neigung der Latte sein mochte. Zur Zeitmessung stellte man einen grossen, mit Wasser gefüllten Eimer[1]) auf, an dessen Boden ein Hahn angebracht war; durch denselben floss, so lange die Kugel im Rollen war, in dünnem Strahle Wasser aus, welches man in einem Becher auffing. Das so aufgefangene Wasser wurde auf einer genauen Wage gewogen. Die Unterschiede und die Verhältnisse der verschiedenen Gewichte ergaben die Unterschiede und Verhältnisse der Zeiten mit einer solchen Genauigkeit, dass die in grosser Zahl wiederholten Versuche keine merklichen Abweichungen darboten.“ Für eine beliebige Neigung der schiefen Ebene und folglich auch beim freien Fall *sind demnach die von einem fallenden Körper zurückgelegten Wege den Quadraten der Fallzeiten proportional.*

Bedeutet g die Beschleunigung dieser Bewegung und s den in der Zeit t zurückgelegten Weg, so ist:

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Die Constante g kann aus den obigen Messungen abgeleitet werden. Es ist nämlich die auf der schiefen Ebene wirksame Componente

$$f = p \frac{AC}{AB},$$

oder

$$f = p \sin \alpha;$$

---

[1]) Der Eimer war so gross, dass die Höhe des Wassers sich darin nicht merklich änderte.

die einer Masse durch zwei verschiedene Kräfte f und p ertheilten Beschleunigungen sind aber den Kräften proportional. Nennen wir g' die Beschleunigung beim Fall auf der schiefen Ebene, so ist

$$g' = g \sin \alpha;$$

aus der Messung von g' und von $\sin \alpha$ ergiebt sich also g.

Wenn der durch einen fallenden Körper in einer gewissen Zeit zurückgelegte Weg durch die Zahl 1 dargestellt wird, so ist der in der doppelten Zeit durchlaufene Weg durch die Zahl 4, in der 3fachen Zeit durch 9 gegeben u. s. w. Betrachten wir aber die in auf einander folgenden gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken, so verhalten sich dieselben wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 . . . Man prüft manchmal das Gesetz in dieser letzteren Form mit Hülfe des in Fig. 100 abgebildeten Apparates: Wenn die Kugel A $^1/_4$ von der Länge der schiefen Ebene EF durchlaufen hat, löst sie durch Hebung der Arme mn die Kugel B aus. In dem Augenblick, in welchem die eine Kugel von B aus ohne Anfangsgeschwindigkeit ihre Bewegung beginnt, hat die andere

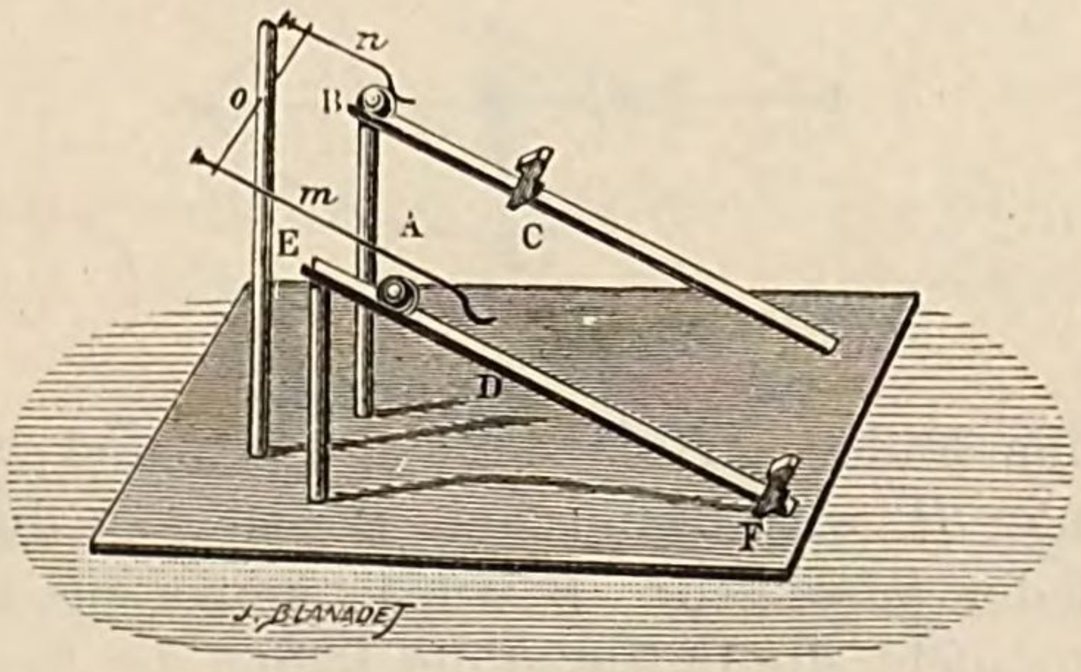


Fig. 100.

schon die Strecke ED zurückgelegt und rollt von D aus nach F; vorausgetetzt, dass die schiefen Ebenen BC und EF gleiche Neigung haben, schlagen die beiden Kugeln gleichzeitig gegen die Arretirungen C und F, wenn $BC = ED$ und $DF = 3ED$ ist.

Hiermit ist bewiesen, *dass die durch die Schwere hervorgebrachte Bewegung gleichförmig beschleunigt ist.*

Gesetz der Geschwindigkeiten. — Obgleich durch das Gesetz der Fallräume die Natur der Bewegung schon vollkommen festgestellt ist, so wird es doch nicht überflüssig sein, direct das Gesetz der Geschwindigkeiten durch Versuche zu bestimmen; wir werden dadurch aufs neue die Folgerung bestätigt finden, zu welcher uns

die Messung der Fallräume geführt hat. *Die Geschwindigkeiten sind den Fallzeiten proportional,*

$$v = gt;$$

dieses für eine gleichförmig beschleunigte und folglich auch für die durch die Schwere erzeugte Bewegung gültige Gesetz bewies Galilei nicht direct; er bestätigte es vielmehr durch eine merkwürdige Folgerung, welche sich unmittelbar durch die Anwendung des Gesetzes auf die schiefe Ebene ergiebt; er stellte nämlich fest, dass die Fallgeschwindigkeit eines Körpers nur von der Fallhöhe abhängig ist. „Man schlägt einen Nagel A in eine Mauer und hängt an demselben in einer Entfernung von ungefähr 2 Finger (0,05 m) von der Mauer mittelst einer 2 bis 3 Klafter (1,20 bis 1,80 m) langen Schnur AB eine Kugel von 1 bis 2 Unzen (30 bis 60 gr) Gewicht auf. An der Mauer wird die Linie CD gezogen, welche die Vertikale AB unter einem rechten Winkel schneidet; darauf

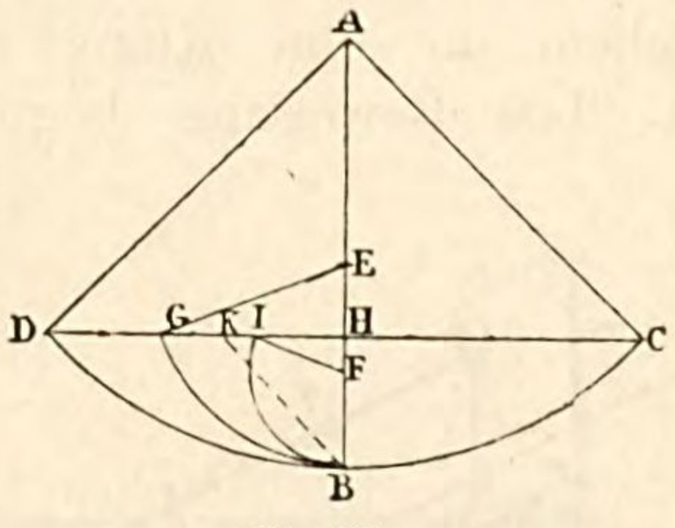


Fig 101.

bringt man den Faden AB in die Lage AC und lässt die Kugel los. Der Punkt B wird dann den Bogen CB durchlaufen und fast bis D wieder ansteigen; (B würde genau bis zum Punkte D kommen, wenn nicht die Luft und der Faden der Bewegung Widerstand entgegen setzten.) Der Antrieb der Kugel in B ist also so gross, dass dieselbe noch den Bogen BD beschreiben kann. Wir schlagen jetzt bei E oder F einen 5 bis 6 Finger langen Nagel in die Mauer, bringen den Faden AB wieder in die abgelenkte Lage AC und lassen die Kugel los. Wenn der Faden die Richtung AB erreicht hat, wird er an den Nagel E stossen; die Kugel wird einen Kreisbogen BG um den Mittelpunkt E beschreiben und fast bis zu dem in der Höhe DC gelegenen Punkte G ansteigen. Wenn der Nagel bei F eingeschlagen ist, bewegt sich die Kugel auf dem Kreisbogen BI um F als Mittelpunkt und erreicht wieder fast genau dieselbe Höhe DC im Punkte I. Die in B nach dem Durchlaufen von CB erlangte Geschwindigkeit reicht also dazu aus, den Körper auf dem Bogen $BD = BC$ wieder ansteigen zu lassen. Im

allgemeinen erlangt ein Körper durch den Fall auf irgend einem Kreisbogen diejenige Geschwindigkeit, welche zum Ansteigen auf dem gleichen Bogen nothwendig ist. Alle Geschwindigkeiten, welche das Ansteigen auf den Bogen BD, BG, BI bewirken, sind aber gleich, da sie alle durch den Fall auf demselben Bogen CB entstehen, folglich sind auch umgekehrt alle Geschwindigkeiten einander gleich, welche durch den Fall auf den Bogen DB, GB, IB erzeugt werden.“[1]) Galilei geht noch weiter; er nimmt an, dass die Geschwindigkeit des Körpers, auch wenn er auf einer beliebigen schiefen Ebene KB (Fig. 101) aus der Höhe von DC herunterfällt, im Punkte B immer dieselbe bleibt; diese Geschwindigkeit muss daher ebenso gross sein, wie diejenige, welche der Körper im freien Fall auf dem Wege HB erlangt.

Die Richtigkeit dieser Annahmen kann leicht bewiesen werden. Da nämlich die Beschleunigung g' auf der schiefen Ebene

$$g' = g \sin \alpha$$

ist, so haben wir für die Bewegung die Gleichungen

$$s = \frac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2,$$

$$v = g \sin \alpha \,.\, t.$$

Um die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und dem zurückgelegten Weg zu finden, eliminiren wir t aus beiden Gleichungen und erhalten:

$$v^2 = 2\, g s \sin \alpha.$$

Hat sich der Körper von A nach B bewegt, so ist:

$$s = AB, \qquad s \sin \alpha = h,$$

Fig. 102.

wenn h die Höhe der schiefen Ebene bedeutet; folglich

$$v^2 = 2\, g h,$$

oder

$$v = \sqrt{2\, g h},$$

---

[1]) Thurot, loc. cit.

d. h. die Geschwindigkeit am Fusse der schiefen Ebene ist der Grösse (aber nicht der Richtung) nach unabhängig von der Neigung der Ebene gegen die Horizontale.

Vorlesungsapparat. — Um beim Unterricht Versuche mit der schiefen Ebene anzustellen, verwendet man zweckmässig einen schief gespannten Seidenfaden, auf dem man einen kleinen leicht beweglichen Wagen herunterrollen lässt. Derselbe besteht aus

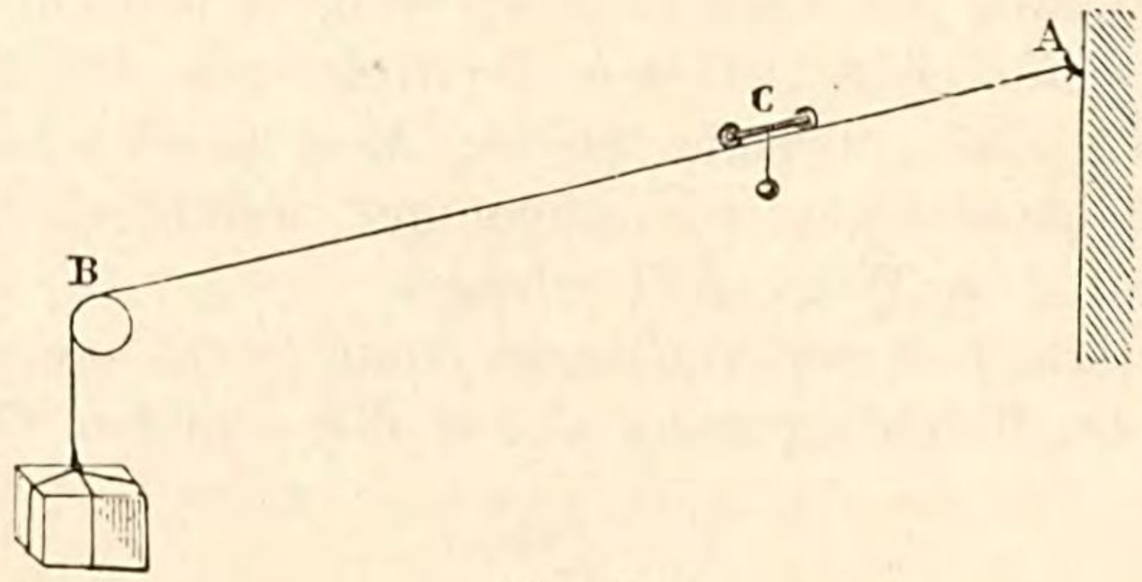


Fig. 103.

zwei durch ein Zwischenstück verbundenen Rädern und trägt ein Gewicht, welches seinen Schwerpunkt zur Herstellung der Stabilität etwas unterhalb der Unterstützungspunkte verlegt. Das Gesetz der Fallräume kann man mit dieser Vorrichtung ohne Mühe bestätigen; durch Veränderung der Neigung kann man ferner zeigen, dass sich die Beschleunigung proportional dem Sinus von α ändert. Zum Nachweise des Gesetzes der Geschwindigkeiten spannt man

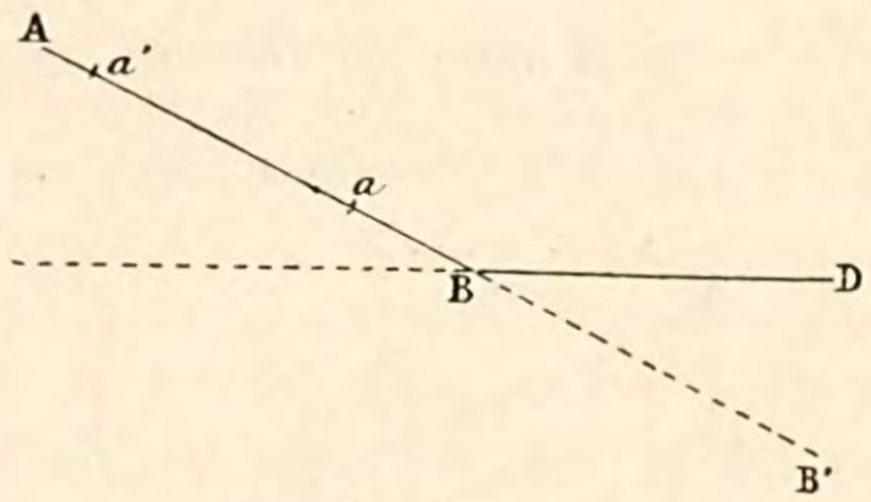


Fig. 104.

den Faden von einem bestimmten Punkte B aus horizontal, um den Körper jenseits dieses Punktes dem Einfluss der Schwere zu entziehen. Lässt man dann den Wagen von einem Punkte a aus herunterrollen, der so liegt, dass der Weg aB in einer Secunde durchlaufen wird, so bewegt er sich auf der Strecke BD mit gleichförmiger Geschwindigkeit, und zwar wird dieselbe nahezu jener proportional sein, die er in dem Augenblick besass, als er der

Einwirkung der Schwerkraft entzogen wurde.[1]) Um also annähernd die Geschwindigkeit des Wagens zu ermitteln, welche er in 1 Secunde durch den Fall auf der schiefen Ebene erlangte, wird es genügen, den in 1 Secunde auf BD zurückgelegten Weg zu messen. Wiederholt man den Versuch von einem Punkte a' aus, der so gewählt ist, dass $a'B$ in 2 Secunden durchlaufen wird, so hat man nur wiederum den auf BD während einer Secunde zurückgelegten Weg zu messen, um annähernd die Geschwindigkeit auf der schiefen Ebene nach 2 Secunden Fallzeit zu erhalten, und so fort. Diese so ermittelten Geschwindigkeiten werden mit genügender Genauigkeit den Fallzeiten proportional sein.

Sätze über die schiefe Ebene. — Wir haben bewiesen, dass die Geschwindigkeit am Fusse einer schiefen Ebene

$$v = \sqrt{2gh}$$

ist, wenn h die in vertikaler Richtung gemessene Höhe bezeichnet, welche der Körper durchfallen hat. Die Beziehung gilt allgemein, auf welchem Wege auch der Körper von A nach B gekommen sein mag; sie gründet sich auf den früher entwickelten Satz von der Arbeit (**47**).

Dagegen hängt die zum Durchlaufen der schiefen Ebene nothwendige Zeit wesentlich von der Neigung der Ebene ab. Lässt man eine Anzahl Körper auf verschiedenen durch den Punkt A

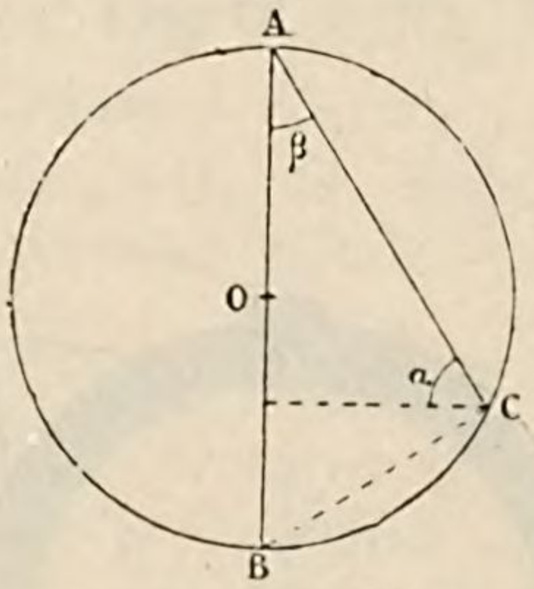


Fig. 105.

gehenden schiefen Ebenen im gleichen Zeitpunkt von A aus fallen, so wird man durch die Punkte, in denen sie nach einer bestimmten Zeit t alle angekommen sind, eine Kugelfläche legen können; der Durchmesser AB derselben ist gleich dem Wege, welchen der

---

[1]) Wenn an dieser Stelle kein Stoss erfolgen würde, so wäre die Geschwindigkeit auf der Strecke BD die Projection der Geschwindigkeit in der Richtung BB' auf diese Strecke. Der Stoss verändert aber im allgemeinen die Resultate recht bedeutend.

Körper während der nämlichen Zeit im freien Fall zurückgelegt haben würde. Denn der in der Zeit t auf irgend einer schiefen Ebene AC zurückgelegte Weg

$$AC = \frac{1}{2} g \sin\alpha . t^2,$$

$$= \frac{1}{2} g t^2 . \cos\beta,$$

ist die Projection von

$$AB = \frac{1}{2} g t^2$$

auf die Richtung AC; folglich ist der geometrische Ort des Punktes C eine um AB als Durchmesser beschriebene Kugel. Man kann

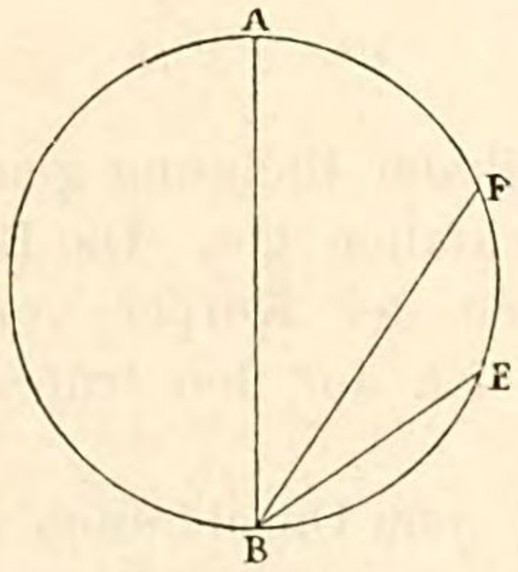


Fig. 106.

diesen Satz auch in der folgenden Form aussprechen: zieht man durch den tiefsten Punkt eines Kreises Sehnen BE, BF, BA und

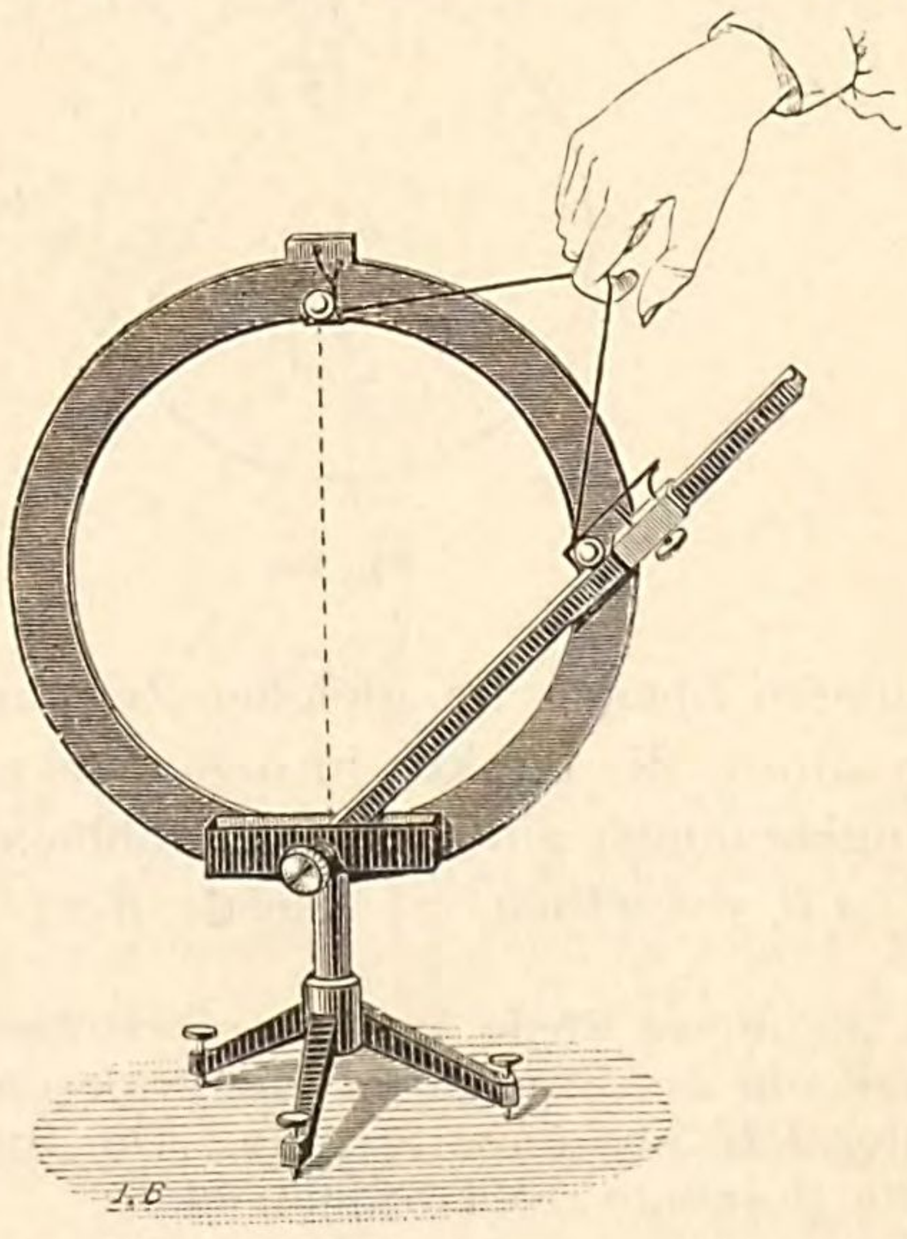


Fig. 107

lässt von den Punkten, in welchen die Sehnen den Umfang des Kreises wiederum schneiden, Körper auf den verschiedenen Sehnen herabfallen, so werden die Körper in demselben Moment in B ankommen. Man kann dieses Resultat mit Hülfe des nebenstehenden Apparates bestätigen. Zwei Kugeln ruhen auf Unterlagen, die eine im höchsten, die andere in einem beliebigen Punkt eines Kreises. Lässt man durch Ziehen an einer mit beiden Unterlagen verbundenen Schnur die Kugeln zur gleichen Zeit fallen, so kommen sie auch zu derselben Zeit unten an, unabhängig von der Neigung der Rinne, in welcher die eine Kugel herabrollt.

80. Atwood'sche Fallmaschine. — Der bequemste Apparat, um die Bewegungsgesetze eines fallenden Körpers zu demonstriren, ist die Atwood'sche Fallmaschine.[1]) Sie besteht im wesentlichen aus einem sehr beweglichen, leichten Rade, über welches ein vollkommen biegsamer, nicht dehnbarer Faden geschlungen ist; an den Enden des Fadens sind zwei Gewichte von je P Gramm aufgehängt. Da das Gewicht des Fadens vernachlässigt werden kann, so ist die ganze Vorrichtung im Gleichgewicht, in welcher Höhe auch die beiden Gewichte stehen mögen. Hebt man eines der Gewichte bis in die Nähe des Rades, und legt dann auf dasselbe ein kleines Übergewicht p, so fängt das ganze System an sich zu bewegen, und zwar einzig unter dem Einfluss der Kraft p. Diese Kraft p wirkt aber (wenn man die Massen des Rades und des Fadens vernachlässigt) auf eine Masse $\frac{2P+p}{g}$. Würde sie auf die Masse $\frac{p}{g}$ des Übergewichtes allein wirken, so könnte sie derselben die Beschleunigung g ertheilen. Da die von derselben Kraft zwei verschiedenen Massen $\frac{p}{g}$ und $\frac{2P+p}{g}$ ertheilten Beschleunigungen g und g' den Massen umgekehrt proportional sind, so wird die Beschleunigung des Systems $2P+p$

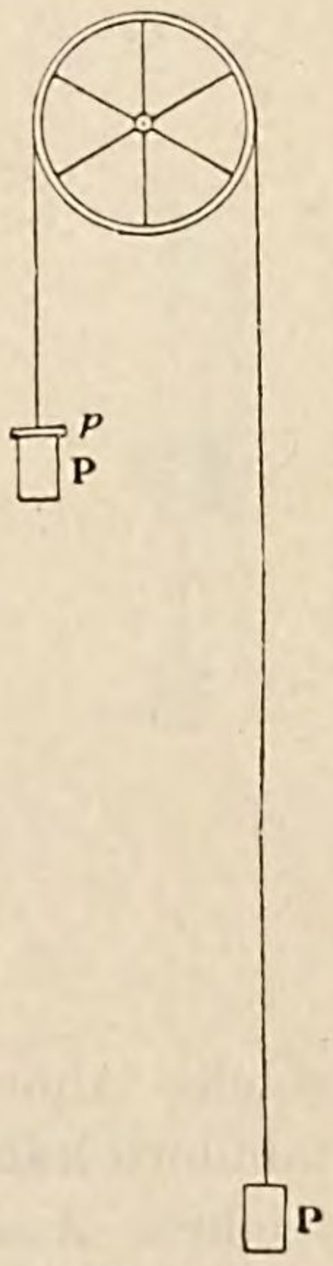


Fig. 108.

$$g' = g\,\frac{p}{2P+p}$$

---

[1]) Atwood, Professor in Cambridge, On the rectilinear motion and rotation of bodies; 1784.

sein. Die Bewegung folgt denselben Gesetzen wie beim freien Fall; sie wird nur in einem bekannten Verhältniss verzögert, woraus sich zwei Vortheile ergeben. Die Messungen werden leichter ausführbar, und die Unsicherheiten infolge des Luftwiderstandes geringer.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie in dem obigen Apparate diese theoretischen Bedingungen verwirklicht sind. Die Achse des am besten aus Aluminium verfertigten Rades *A* ruht auf den sich kreuzenden äusseren Rändern der vier (Frictions-) Räder *B, B, B, B*; die Reibung der Achse erfolgt somit nicht in festen Lagern, sondern auf leicht beweglichen Theilen. Obgleich in den 4 neuen Achsen auch wiederum Reibung statt findet, so ist doch leicht einzusehen, dass unter gewissen, später zu besprechenden Bedingungen eine

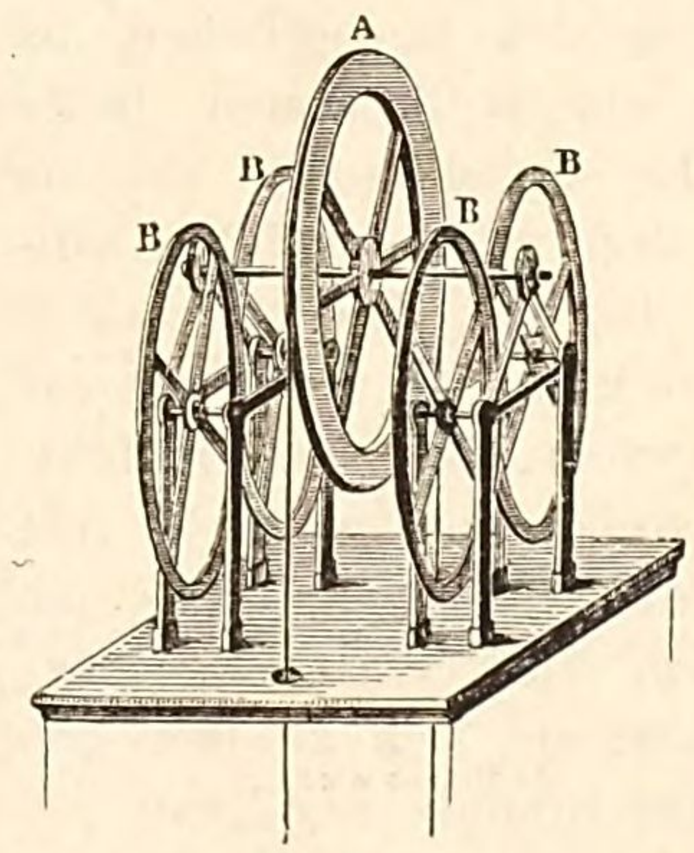
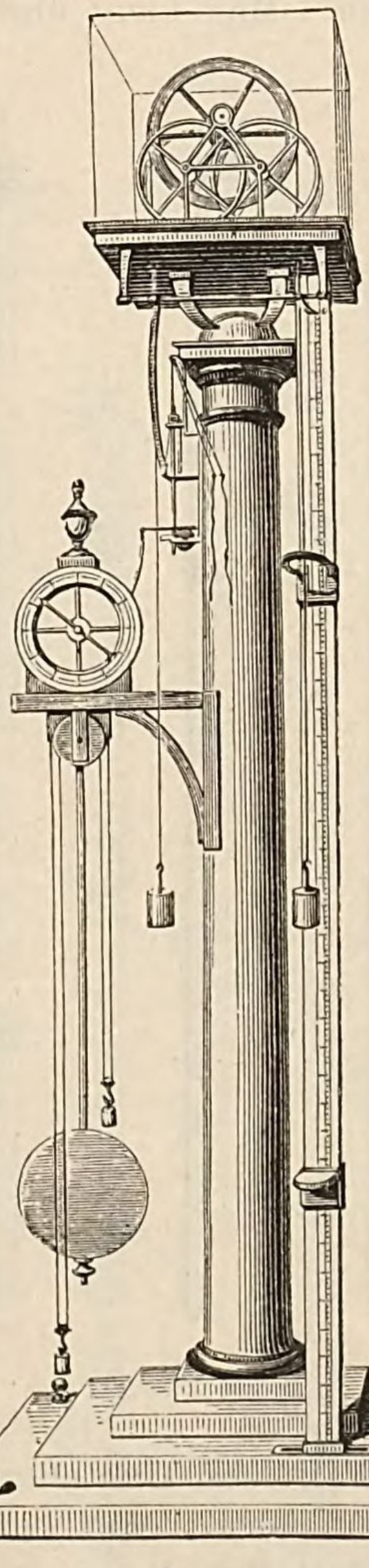


Fig. 109.

solche Anordnung die Reibung des Hauptrades bedeutend vermindern kann (**185**). Giebt man einem derartig gelagerten Rade einen leichten Anstoss, so dauert die Drehung desselben sehr lange Zeit ohne merkbare Abnahme der Geschwindigkeit fort.

Das ganze Rädersystem ist auf einer stabilen hölzernen Säule befestigt, welche mit Hülfe von drei Stellschrauben vertikal gestellt werden kann. Eine dünne über das Rad geschlungene Seidenschnur trägt an ihren Enden zwei gleiche Gewichte. Das eine Gewicht bewegt sich vor einem an der Säule senkrecht befestigten Maassstab; auf demselben lassen sich mehrere Schlitten verschieben, welche man mit Hülfe von Druckschrauben an beliebigen Punkten festklemmen kann. Einige dieser Schlitten sind mit massiven, horizontalen Scheiben verbunden und haben den Zweck, die fallenden Gewichte aufzuhalten; die Scheiben der anderen Schlitten sind

durchbohrt, so dass die Gewichte eben noch passiren können, während die Übergewichte, welche zu diesem Zwecke eine längliche Gestalt haben, durch dieselben aufgehalten werden. Am Apparat ist ferner noch ein Secundenpendel mit Zählwerk angebracht.



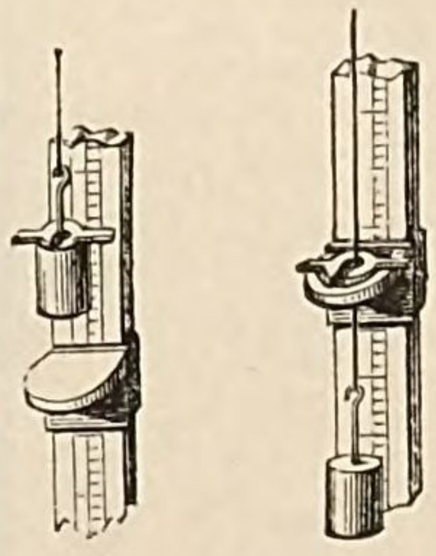


Fig. 111.

Fig. 110.

Um das Gesetz der Fallräume zu bestätigen, legt man auf das vor dem Maassstab befindliche Gewicht ein leichtes Übergewicht, bringt dasselbe in die Höhe des Nullpunktes der Theilung und hält es dort mit einer der massiven Scheiben fest. Früher

musste man diese Scheibe mit der Hand festhalten und nach dem Schlage des Secundenpendels zurückziehen, um zu bewirken, dass die Bewegung mit dem Beginne einer Secunde ihren Anfang nahm. In den neueren Apparaten ist die Scheibe an der Säule befestigt und lässt beim ersten Secundenschlag jeder Minute das Gewicht selbstthätig fallen. Man kann übrigens auch durch Zug

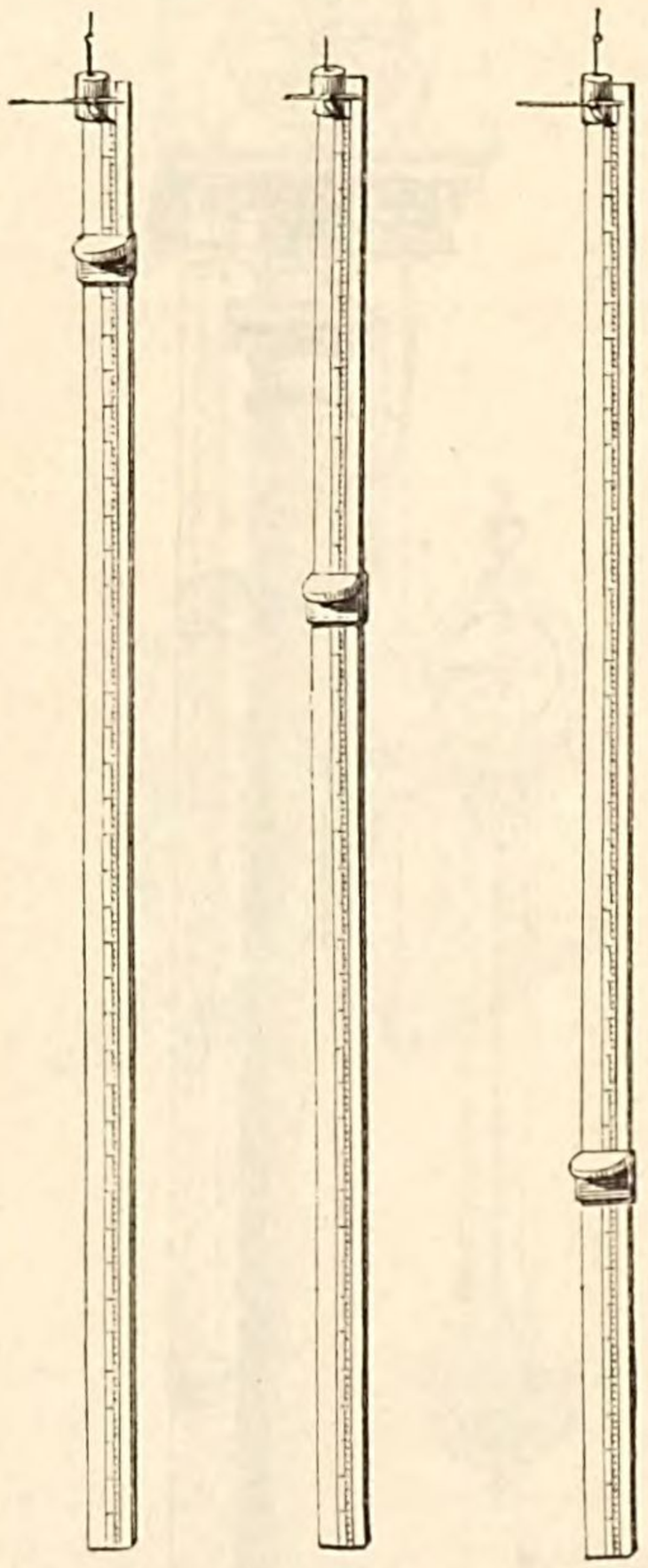


Fig. 112.

an einem Faden den Fall des Gewichtes bei jedem anderen Secundenschlage beginnen lassen. Man sucht nun durch Probiren einen Schlitten mit massiver Scheibe so zu stellen, dass das Gewicht mit dem Schlage der folgenden Secunde auf die Scheibe aufschlägt. Nehmen wir an, dies sei erreicht, so ergiebt die Entfernung der beiden Schlitten den in einer Secunde zurückgelegten Weg. Stellt man jetzt den Schlitten so, dass das Gewicht nach zwei Secunden aufschlägt, so hat man den in zwei Secunden

durchfallenen Weg, und so weiter. Man findet z. B. für ein gewisses Verhältniss der Massen:

Zeit	Fallraum
1 Sec.	16 Theile $= 16 \times 1^2$
2 „	64 „ $= 16 \times 2^2$
3 „	144 „ $= 16 \times 3^2$
4 „	256 „ $= 16 \times 4^2$
⋮	⋮ ⋮

Die zurückgelegten Wege sind demnach den Quadraten der Fallzeiten proportional.

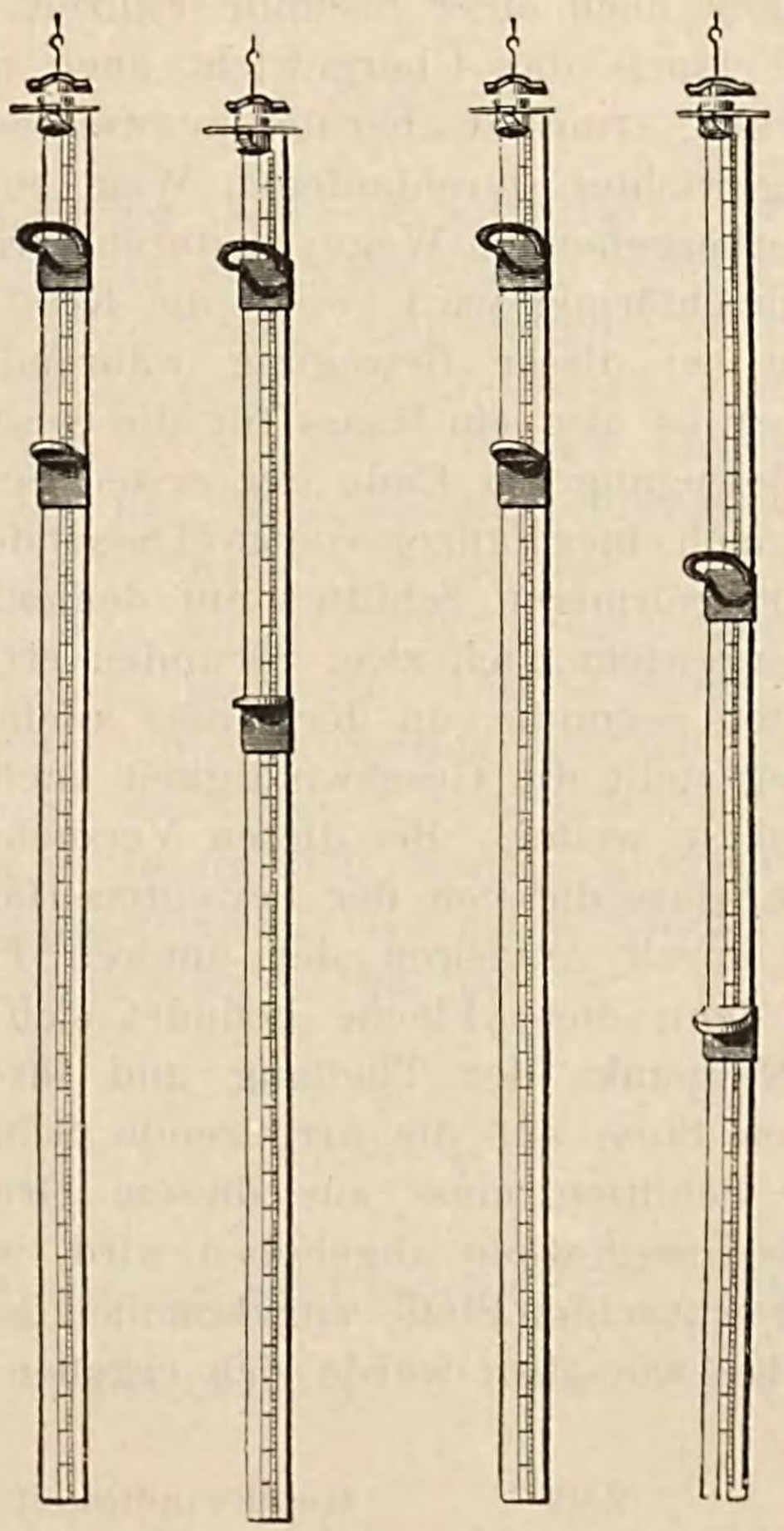


Fig. 113.

Mit demselben Apparat lassen sich auch die Geschwindigkeiten messen. Die wirkende Kraft ist das Gewicht p des Übergewichtes; hebt man diese Kraft in einem gegebenen Augenblicke auf, so setzt das System von diesem Zeitpunkte an seine Bewegung gleich-

förmig fort, und behält genau diejenige Geschwindigkeit bei, welche das System in dem Augenblicke besass, als die Kraft zu wirken aufhörte. Zur Bestätigung dieser Behauptung klemmt man einen Schlitten mit durchbohrter Scheibe an dem Punkte der Theilung fest, welchen das Übergewicht am Ende einer Secunde passirt; lässt man nun die Gewichte ihre Bewegung beginnen, so wird das Übergewicht nach einer Secunde Fallzeit abgehoben, und das grosse Gewicht bewegt sich allein weiter; stellt man diesem Gewicht einen Schlitten mit massiver Scheibe derart in den Weg, dass das Gewicht gerade noch eine weitere Secunde in Bewegung bleibt, so hat man in der Entfernung zwischen den beiden Schlitten die Geschwindigkeit nach einer Secunde Fallzeit. Lässt man bei einem zweiten Versuch das Übergewicht auch nur eine einzige Secunde lang wirken, ermittelt aber den in zwei Secunden nach Abheben des Übergewichtes durchlaufenen Weg, so findet man das Doppelte vom vorhergehenden Wege; dadurch wird bewiesen, dass die Bewegung gleichförmig wird, wenn die Kraft zu wirken aufgehört hat; der bei dieser Bewegung während einer Secunde zurückgelegte Weg ist also ein Maass für die Geschwindigkeit der ursprünglichen Bewegung am Ende der ersten Secunde. Um die Geschwindigkeit nach einer Fallzeit von zwei Secunden zu bestimmen, stellt man den ringförmigen Schlitten auf denjenigen Theilstrich, welchen das Übergewicht nach zwei Secunden erreicht, und misst den in der dritten Secunde von der Masse allein zurückgelegten Weg; dieser Weg stellt die Geschwindigkeit nach zwei Secunden Fallzeit dar, und so weiter. Bei diesen Versuchen hat man nur darauf zu achten, dass die von der bewegten Hauptmasse durchlaufene Strecke durch Anvisiren der unteren Fläche derselben gemessen wird; denn diese Fläche befindet sich zu Anfang des Versuches am Nullpunkt der Theilung und ihre Ankunft wird wieder durch den Stoss auf die arretirende Scheibe beobachtet. Der ringförmige Schlitten muss aus diesem Grunde so gestellt werden, dass das Übergewicht abgehoben wird, wenn jene untere Fläche an der gewünschten Stelle angekommen ist. Bei der Wahl derselben Gewichte wie oben würde sich ergeben:

Zeit	Geschwindigkeit
1 Sec.	32 Theile
2 „	64 „
3 „	96 „
4 „	128 „
⋮	⋮

Die Geschwindigkeiten sind demnach den Fallzeiten proportional.

Ausserdem sieht man, dass die Geschwindigkeit nach einer Secunde Fallzeit das Doppelte des in der ersten Secunde zurückgelegten Weges ist, in Übereinstimmung mit den Formeln

$$s = \frac{1}{2} g' t^2,$$

$$v = g' t,$$

welche für $t = 1$

$$s_1 = \frac{1}{2} g',$$

$$v_1 = g'$$

ergeben.

Die Zeiteinheit ist natürlich willkürlich, wenn man also die Wirkung der Kraft in einem beliebigen Momente aufhebt, so ist bis dahin bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung der zurückgelegte Weg halb so gross, als die Strecke, welche der Körper zurückgelegt haben würde, wenn er sich die nämliche Zeit hindurch mit der bei der beschleunigten Bewegung erlangten Endgeschwindigkeit gleichförmig bewegt hätte.

Der beschriebene Apparat erlaubt die beiden Fallgesetze mit grosser Genauigkeit zu bestätigen. Die Wirkungsweise der Maschine wird indessen durch einen störenden Umstand, nämlich durch den Einfluss der Masse des Rades, welcher sich besonders in dem folgenden Versuch bemerklich macht, etwas complicirt. Nach einer ersten Messungsreihe mit Gewichten P und $P + p$, bei welcher die Fallbeschleunigung im Verhältniss

$$\frac{p}{2P + p},$$

vermindert wird, nehmen wir Gewichte $\left(P + \frac{p}{4}\right)$ und $\left(P + \frac{p}{4}\right) + \frac{p}{2}$; dann sollte die Beschleunigung im Verhältniss

$$\frac{\frac{p}{2}}{2\left(P + \frac{p}{4}\right) + \frac{p}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2P + p},$$

also auf die Hälfte von der vorigen vermindert werden. Diese Folgerung wird nicht bestätigt, denn die in Bewegung zu setzenden

Massen bestehen nicht nur aus den an dem Faden aufgehängten Gewichten, sonderen auch noch aus der Masse des Fadens, die im allgemeinen vernachlässigt werden kann, und der Masse des Rades. Nehmen wir an, diese Masse sei vollständig, wie es in Wirklichkeit nahezu der Fall ist, auf den Umfang des Rades vertheilt, so haben wir zu den andern bewegten Massen noch eine weiter unten berechnete Grösse zu addiren, und die Fallbeschleunigung wird bei Anwendung der Gewichte P und $P + p$ in Wirklichkeit im Verhältniss

$$\frac{p}{2P + p + a}$$

vermindert, worin a eine Constante des Apparates bedeutet.

Mann kann übrigens dem Einfluss des Rades stets dadurch Rechnung tragen, das man den in Bewegung gesetzten Massen eine constante Masse a zufügt. Um dies zu zeigen, wollen wir den Satz von den Momenten der Bewegungsgrössen (**58**) auf den vorliegenden Fall anwenden. Die Derivirte des Momentes der Bewegungsgrösse nach der Zeit beträgt für die Gewichte, wenn wir die Momente in Bezug auf die Radachse bilden,

$$\frac{2P + p}{g} \frac{dv}{dt} R,$$

wo R der äussere Halbmesser des Rades ist.

Für das Rad allein ergiebt sich als Differentialquotient des Momentes, bezogen auf die Radachse,

$$MK^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{MK^2}{R} \frac{dv}{dt};$$

hierin bedeutet MK^2 das Trägheitsmoment des Rades um seine Achse, $v = \omega R$ seine Umfangsgeschwindigkeit, ω die Winkelgeschwindigkeit desselben.

Das Moment der wirkenden Kraft p ist pR.

Wir haben also die Gleichung

$$\left(\frac{2P + p}{g} R + \frac{MK^2}{R}\right) \frac{dv}{dt} = pR,$$

oder, wenn wir wie gewöhnlich mit $g' = \frac{dv}{dt}$ die Beschleunigung

des fallenden Gewichtes bezeichnen,

$$g' = g \frac{p}{2P + p + g\dfrac{MK^2}{R^2}}.$$

Der Einfluss des Rades lässt sich also dadurch in Rechnung ziehen, dass man eine Constante $g\dfrac{MK^2}{R^2} = a$ zu den bewegten Massen $2P + p$ hinzufügt. Für manche Constructionen des Rades wird es erlaubt sein, sich vorzustellen, dass seine ganze Masse auf dem Umfange vertheilt ist; die Grösse a ist dann einfach das Gewicht des Rades. In jedem Falle kann man a leicht durch den Versuch bestimmen, wenn man mit zwei verschiedenen Combinationen von Gewichten die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege misst. Das Verhältniss q dieser beiden Wege ist gleich dem Verhältniss der Beschleunigungen; aus der Gleichung

$$q = \frac{p}{2P + p + a} : \frac{p'}{2P' + p' + a}$$

lässt sich dann die Grösse a berechnen.[1])

Wir kennen jetzt das Verhältniss, in welchem die an der Atwood'schen Fallmaschine beobachtete Bewegung im Vergleich zum freien Fall verzögert wird, wenn man von der bei guten Maschinen sehr geringen Reibung absieht; aus der beobachteten Grösse g' kann man dann den Werth von g, d. h. die Beschleunigung im freien Fall berechnen. Es ergiebt sich nahezu $g = 9{,}81$ m, oder in C.-G.-S.-Einheiten

$$g = 981.$$

81. Apparat von Morin. — Die Fallgesetze sind noch mit einem dritten Apparat geprüft worden, dessen Construction einen bemerkenswerthen Fortschritt in der Geschichte der Wissenschaft

---

[1]) Um zu vermeiden, dass man dieser Grösse a Rechnung zu tragen hat, werden manchmal von den Constructeuren solcher Maschinen die Gewichte falsch bezeichnet; die Grösse eines Gewichtes P ist zu $P + \dfrac{a}{2}$ angegeben; in Folge dessen ist der Einfluss des Rades scheinbar zu vernachlässigen.

bedeutete; bei demselben wurde nämlich eine zu genauen Messungen brauchbare Registrirmethode, wie sie jetzt in allen Beobachtungswissenschaften benutzt wird, zum ersten Mal angewandt. Das Ziel dieser fruchtbaren Methode, die sich aus meteorologischen Beobachtungen entwickelt zu haben scheint, besteht darin, eine Erscheinung zu zwingen, ihren Verlauf selbst aufzuzeichnen, das heisst, ein *Diagramm* zu liefern, aus welchem der Experimentator alle Einzelheiten der Erscheinung zu einer beliebigen anderen Zeit studiren kann.[1])

In den „Mémoires de l'Académie des sciences“ für das Jahr 1734, Seite 123 findet sich die „Beschreibung eines Anemometers, von dem Marquis d'Ons-en-Bray, das auf einem Streifen Papier selbstthätig aufzeichnet, welche Winde innerhalb der letzten 24 Stunden geweht haben, wann jeder zu wehen angefangen und aufgehört hat, sowie auch ihre verschiedenen Geschwindigkeiten oder relativen Stärken.“[2])

Der erste in der Mechanik angewandte Registrirapparat war der bekannte Watt'sche Indicator,[3]) bei welchem der Dampfdruck auf einem Cylinder registrirt wird, dessen periodische Bewegung mit der Bewegung des Kolbens der Maschine übereinstimmt. Etwas später liess Eytelwein[4]) beim Studium des Stosshebers die Klappe desselben eine Curve beschreiben, deren Ordinaten den von der Klappe zurückgelegten Wegen entsprechen, und deren Abscissen ungefähr der Zeit proportional waren; der Papierstreif wurde dabei mit der Hand in Bewegung gesetzt.

Der nämliche Gedanke, eine bekannte gleichförmige Bewegung mit einer andern, zu untersuchenden, derart zu combiniren, dass sich aus der aufgezeichneten Curve alle Einzelheiten der studirten Bewegung entnehmen lassen, liegt dem Apparat von Morin zu zu Grunde; derselbe wurde nach Angaben des General Poncelet

---

[1]) Vergl. Marey, Du mouvement dans les fonctions de la vie. Paris, Masson, 1868; p. 112.

[2]) Zur Registrirung der Windrichtung trug die Achse der Windfahne 24 Schreibstifte in verschiedenen Höhen und in 24 verschiedenen Azimuthen. Die Stifte hatten alle gleiche Länge, und bei jeder Stellung der Fahne berührte nur ein einziger einen Papierstreifen, der durch ein Uhrwerk in Bewegung gesetzt wurde; nach 24 Stunden waren demnach auf dem Papierstreifen eine Reihe von parallelen Linien aufgezeichnet, deren Höhe die Richtung und deren Länge die Dauer jedes Windes von der bestimmten Richtung anzeigten.

[3]) Watt, Patente von 1782—85.

[4]) Eytelwein, Über die Wirkung und vortheilhafteste Anwendung des Stosshebers, Berlin 1805.

construirt.[1]) Wir denken uns ein Blatt Papier, das sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit verschiebt, während ein an einem frei fallenden Körper befestigter Stift auf demselben Eindrücke hinterlässt; dieser Stift wird eine Curve aufzeichnen, deren Ordinaten die Fallhöhen ergeben und deren Abscissen der Zeit proportional sind, so dass man mit Hülfe dieser Curve die Natur der Fallbewegung studiren kann. Statt das Blatt Papier in seiner Ebene parallel zu sich selbst fortzubewegen, kann man ihm offenbar auch eine gleichförmige Drehung um eine vertikale Achse ertheilen; jede Vertikale des Papierstreifens kommt dann ebenfalls in einem gegebenen Augenblick vor den Stift.

Der Apparat von Morin besteht aus einem grossen, vertikal stehenden Cylinder; an demselben kann ein Körper, dessen Fallbewegung untersucht werden soll, entlang gleiten. Um den Einfluss des Luftwiderstandes möglichst zu verringern, giebt man dem eisernen Fallkörper cylindrische, unten conisch zugespitzte Form. An seinem oberen Ende trägt dieser Körper in einem kleinen Metallröhrchen einen Schreibstift, welcher durch eine Spiralfeder fortwährend gegen den Cylinder gedrückt wird. Der Fallkörper wird vor Beginn des Versuches in der Weise unterstützt, dass ein oberhalb des Schreibstiftes angebrachter Haken auf einem Arme eines Winkelhebels aufliegt; durch Drehen dieses Hebels entzieht man dem eisernen Gewicht die Unterstützung. Solange der Haken noch aufliegt, wird der Schreibstift, um eine unnöthige Abnutzung desselben zu vermeiden, durch eine kleine am Hebel befestigte Gabel ein wenig vom Cylinder entfernt gehalten. Zieht man mit Hülfe einer Schnur die Unterstützung unter dem Haken weg, so lässt die Gabel gleichzeitig den Schreibstift los; das Gewicht fällt und der Schreibstift wird gegen den Cylinder gedrückt. Da der grosse Cylinder sich um seine Achse dreht, so würde die durch diesen Druck verursachte Reibung den Eisenkörper ebenfalls in Drehung versetzen, und es könnte eine Abweichung aus der Lothrechten, in welcher die Schwere auf das Gewicht wirkt, eintreten. Um dies zu verhindern ist der Eisenkörper mit Hülfe von vier seitlich angelötheten Ösen an zwei vertikal ausgespannten Eisendrähten, also ziemlich reibungslos, geführt. Der Cylinder von über 2 m Höhe und 12,5 cm Durchmesser ist in zwei achsialen Zapfen gelagert und kann durch eine dem Bratenwender ähnliche

---

[1]) Morin (damals Artilleriehauptmann in Metz), Expériences sur le frottement..., exécutées à Metz, en 1833; in den Mémoires des savants étrangers, VI, 641; 1838; oder Notions fondamentales de mécanique, 2. Aufl.; Paris 1855.

Vorrichtung in Rotation versetzt werden. Als bewegende Kraft dient ein Gewicht, welches an einem um eine Welle geschlungenen Faden hängt, und beim Fallen diese Welle sowie ein auf der

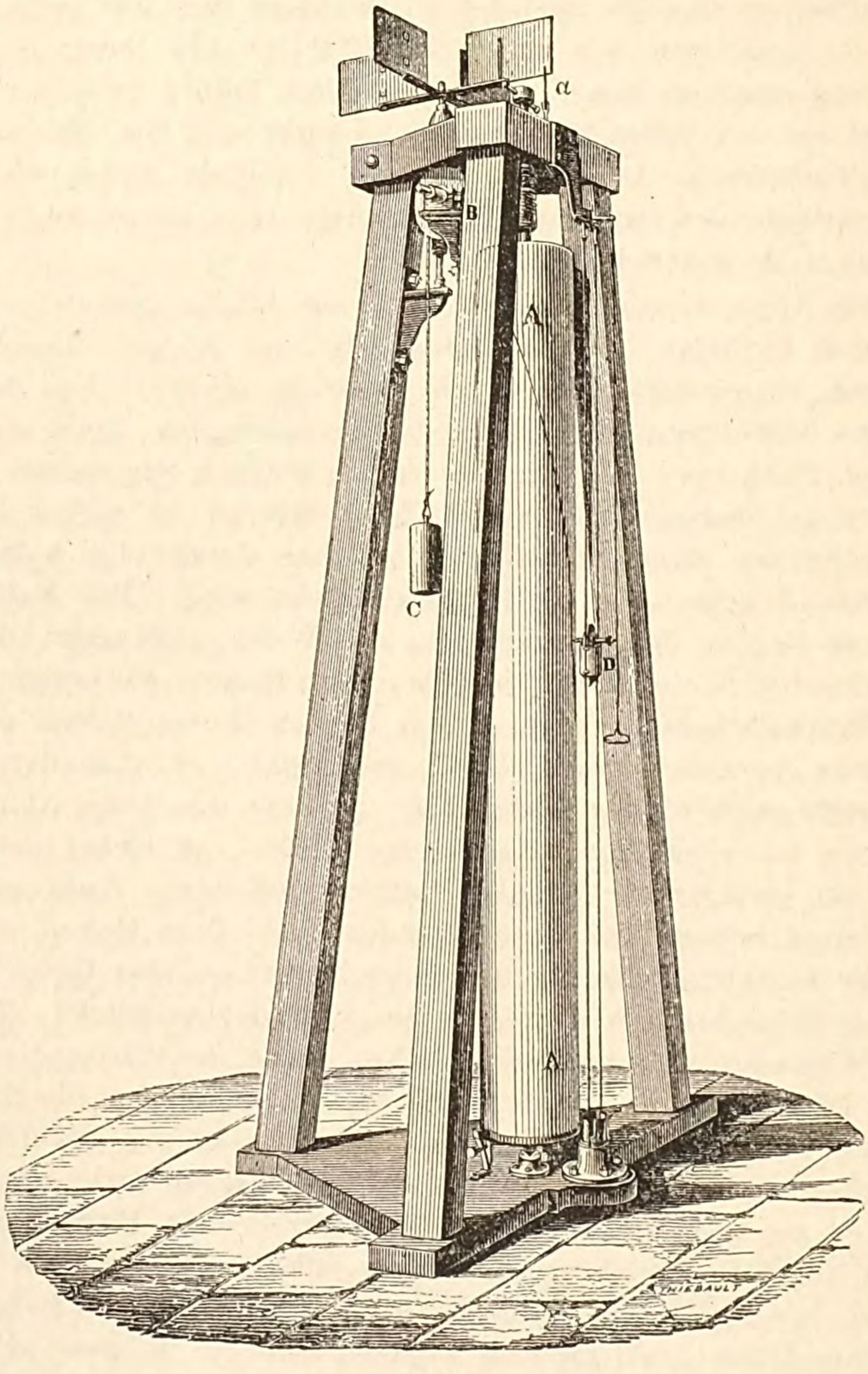


Fig. 114.

Welle befestigtes Zahnrad in Drehung versetzt; das Zahnrad greift in die Cylinderachse ein und gleichzeitig mittelst einer Schraube ohne Ende in einen Windfang. Durch das treibende Gewicht allein würde eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erzeugt werden;

da aber die passiven Widerstände, besonders der des Windfanges, mit der Geschwindigkeit wachsen, so wird die bewegende Kraft allmählich compensirt und die Bewegung wird gleichförmig. Die Flügel des Windfanges stossen an einen kleinen Streifen von Fischbein; nach dem Geräusch, das auf diese Weise entsteht, lässt sich beurtheilen, wann die Bewegung gleichförmig geworden ist.[1]) Da man die Grösse des treibenden Gewichtes verändern und durch Verstellen der Flügel des Windfanges den Einfluss des Luftwiderstandes vermehren oder vermindern kann, so lässt sich eine passende Geschwindigkeit, z. B. von einer Umdrehung in der Secunde erreichen.

Vor jedem Versuch klebt man auf den Cylinder ein weises Blatt Papier, auf welchem eine Reihe von gleich weit von einander abstehenden, der Cylinderachse parallelen Linien gezogen sind.[2])

Während der Körper, dessen Fallbewegung untersucht werden soll, noch unterstützt wird, lässt man den Schreibstift durch Drehung des Cylinders einen Kreis aufzeichnen, auf welchem nachher der Anfangspunkt der Fallcurve liegen wird. Dann zieht man den Schreibstift wieder zurück und setzt den Cylinder durch das Gewicht in Drehung. Wenn die Rotation gleichförmig geworden ist, zieht man den Winkelhebel, welcher dem Fallkörper als Unterstützung dient, weg; dieser fällt dann senkrecht abwärts und beschreibt bei seinem Fall auf dem Papier eine Curve, die wir näher untersuchen wollen.

Da die ganze Fallzeit nur einen Bruchtheil einer Secunde beträgt, so wird die Geschwindigkeit, obwohl sie nicht wie bei

---

[1]) Da die Bewegung nur allmählich zu einer gleichförmigen wird, so hat in diesem Zeitpunkt das treibende Gewicht schon $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ seines Weges zurückgelegt; es bleibt indessen noch genügende Zeit zur Ausführung des Versuches übrig.

[2]) Der Apparat des Conservatoire des arts et métiers hat einen Cylinder von 3,10 m Höhe, einem Meter Umfang und macht genau eine gleichförmige Umdrehung in der Secunde. Mit Hülfe einer einfachen Vorrichtung kann man auf dem aufgeklebten Papier 100 gleich weit von einander abstehende, der Cylinderachse parallele, Linien ziehen. Jeder Zwischenraum zwischen zwei Linien entspricht also $\frac{1}{100}$ Umdrehung oder $\frac{1}{100}$ Secunde; da man noch $\frac{1}{10}$ desselben (gleich 1 mm) schätzen kann, so lässt sich noch $\frac{1}{1000}$ Secunde messen; der Apparat ist demnach ein empfindlicher Zeitmesser.

den anderen Apparaten in einem bestimmten Verhältniss verkleinert wird, doch immer gering bleiben; daher wird die Bewegung auch durch den Luftwiderstand nicht merklich beeinflusst. Die Entfernungen der verschiedenen Punkte der Curve vom Anfangskreis werden also die von dem Körper unter dem Einfluss der Schwere senkrecht durchfallenen Wege darstellen. Die Fallzeit wird durch Längenmessung auf dem Anfangskreis ermittelt. Durch directe Vergleichung der zurückgelegten Strecken und der entsprechenden Zeiten erkennt man unmittelbar, dass die Fallräume den Quadraten der Fallzeiten proportional sind. Die Curve muss daher eine Parabel sein. Man benutzt diese Überlegung zur genauen Bestimmung des Anfangspunktes; zuerst ermittelt man denselben

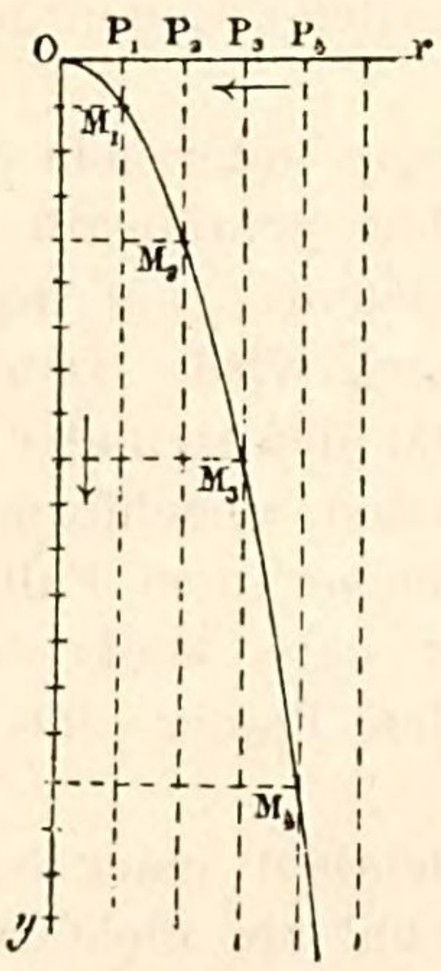


Fig. 115.

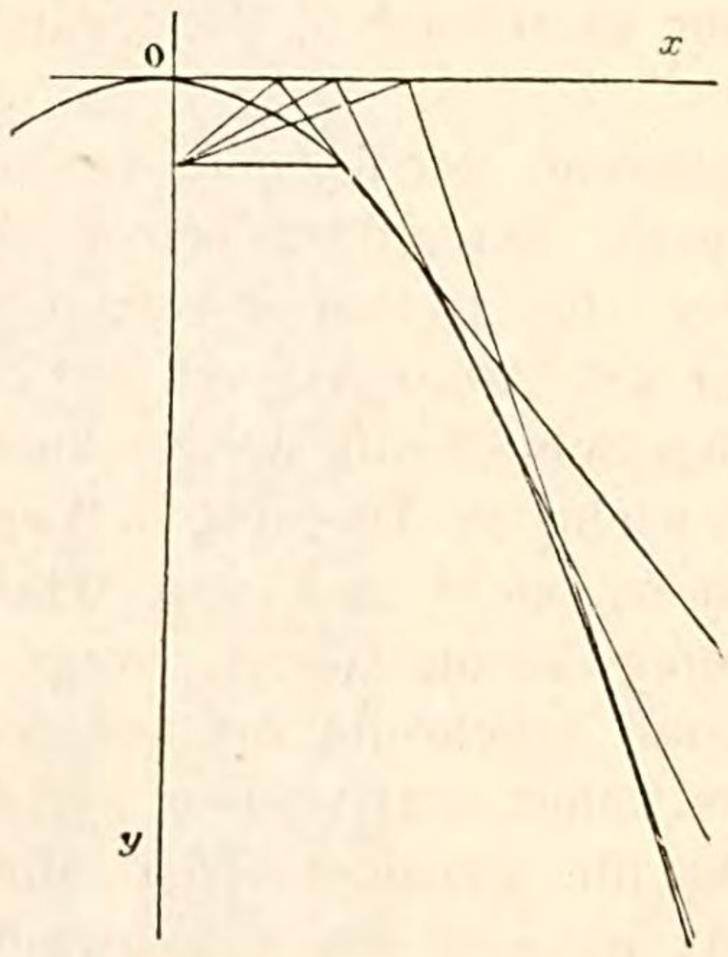


Fig. 116.

nach dem Augenmaass, wobei man indessen kleine Unsicherheiten nicht wird vermeiden können. Zur genauen Bestimmung ziehen wir eine Reihe von Tangenten an die Parabel und verlängern dieselben bis zum Schnitt mit der Scheiteltangente (die nichts anderes als der Anfangskreis ist); in diesen Schnittpunkten errichten wir auf jeder Tangente eine Senkrechte; alle diese Senkrechten schneiden sich im Brennpunkt der Parabel, und das von diesem Punkt auf die Scheiteltangente gefällte Loth bestimmt genau den Scheitel, d. h. den Anfangspunkt der Curve. Die Bestätigung des Gesetzes der Fallräume wird dann sehr genau ausfallen.

Man kann auch das Gesetz der Geschwindigkeiten aus der Curve ableiten. Sind nämlich M und M' zwei benachbarte Punkte der Curve, die von dem Schreibstift zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ aufgezeichnet wurden, so ist $M'N$ der von dem Körper in der

Zeit Δt zurückgelegte Weg; diese Zeit Δt selbst wird durch die Länge PP' gemessen; die mittlere Geschwindigkeit v_1 während der Zeit Δt war demnach $\frac{NM'}{PP'} = \text{tg}\, NMM' = \text{tg}\, PSM$. Wird Δt immer kleiner, so nähert sich der Punkt M' immer mehr dem

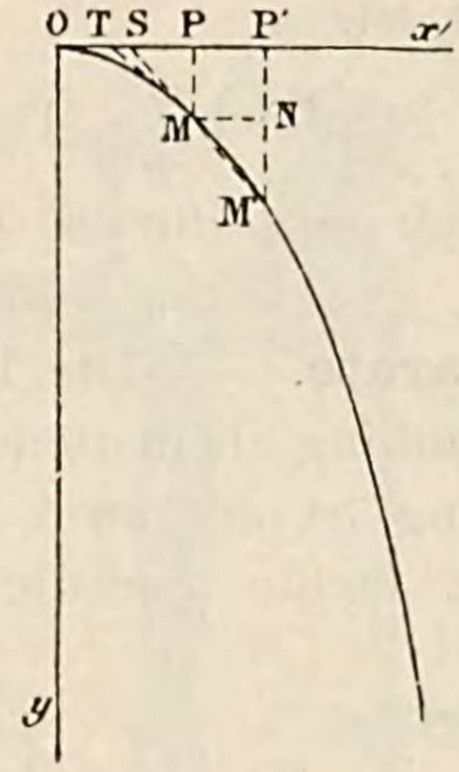


Fig. 117.

Punkte M, die mittlere Geschwindigkeit v_1 wird gleich der Ge-Geschwindigkeit v des Körpers zur Zeit t, während die Secante MM' mit der Tangente an die Curve im Punkte M zusammenfällt. Die Beziehung

$$v_1 = \text{tg}\, PSM$$

welche immer noch bestehen bleibt, wird im Grenzfall zu

$$v = \text{tg}\, PTM,$$

d. h. die Geschwindigkeit des Körpers in dem Augenblick, wo er den Punkt M markiert, ist durch die trigonometrische Tangente des Winkels gegeben, welchen die Berührungslinien im Punkte M und im Scheitel mit einander bilden. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese durch das Verhältniss $\frac{PM}{PT}$ gemessene trigonometrische Tangente der Zeit OP proportional ist. Auch hieraus folgt, dass die Curve eine Parabel sein muss. Bezeichnet nämlich $\frac{1}{p}$ einen constanten Coefficienten, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p} x,$$

oder

$$2p\,dy = 2x\,dx;$$

und durch Integration,

$$x^2 = 2py;$$

dies ist die auf die Scheiteltangente und die Achse bezogene Gleichung einer Parabel.

Wir finden also durch Messung der Fallräume und Fallzeiten bestätigt, dass die durch die Schwere verursachte Bewegung gleichförmig beschleunigt ist.

Die Beschleunigung ist gleich $\frac{1}{p}$. Der Apparat von Poncelet und Morin liefert demnach eine directe Bestimmung der Grösse g.

82. Andere Apparate. — Die Registrirmethode hat seit ihrer erstmaligen Anwendung bedeutende Fortschritte gemacht. Eine genauere Zeitmessung ist auf zwei verschiedenen Wegen erreicht worden. Zunächst suchte man die Bewegung des Cylinders,

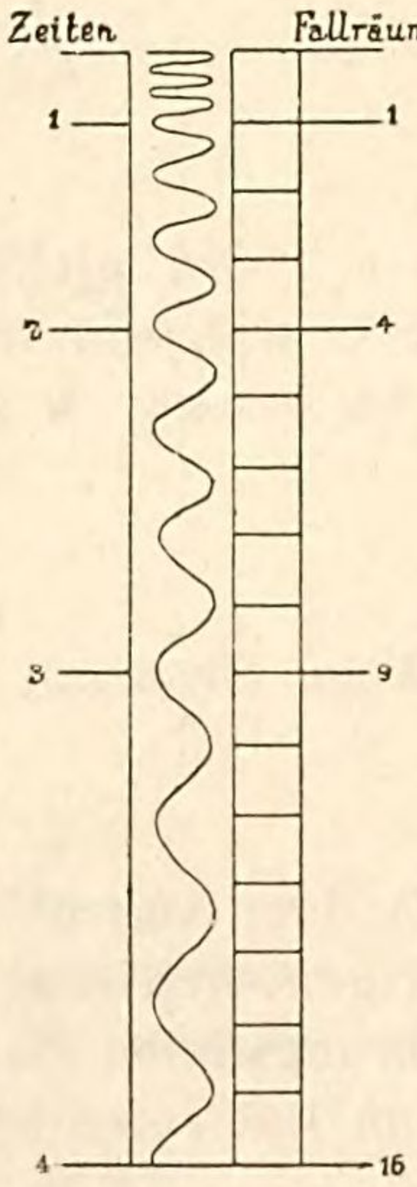


Fig. 118.

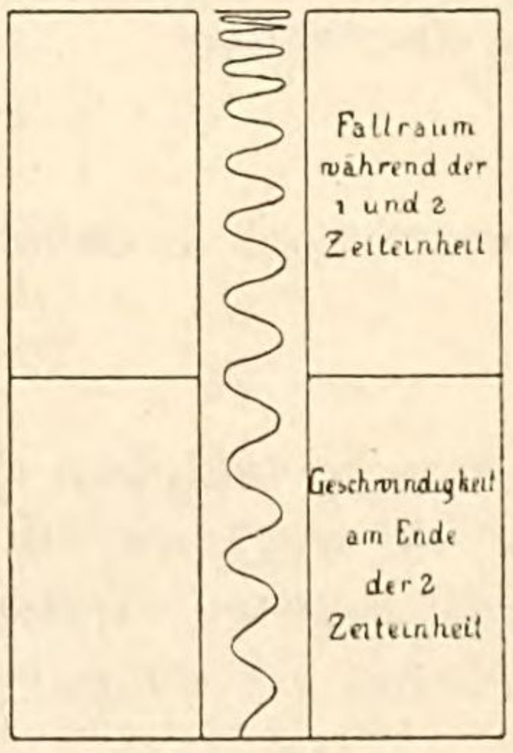


Fig. 119.

welche durch das Aufzeichnen der Curve immer etwas unsicher ist, dadurch zu controliren, dass man die zu untersuchende Bewegung mit einer vollkommen regelmässigen und bekannten Bewegung, z. B. derjenigen einer Stimmgabel verglich. Dieses Verfahren, welches wir hier nur andeuten wollen, rührt von Thomas Young her; Duhamel verwendete es zur experimentellen Untersuchung schwingender Saiten und zeigte seine grosse Fruchtbarkeit; heutzutage wird es in der Physiologie wie in der Physik fort-

während angewendet. Das zweite Verfahren beruht auf der Verwendung von Regulatoren, die die Bewegung trotz der Änderung der passiven Widerstände zu einer gleichförmigen gestalten; die Regulatoren von Foucault und von Villarceau lösen diese schwierige Frage in vollkommener Weise.

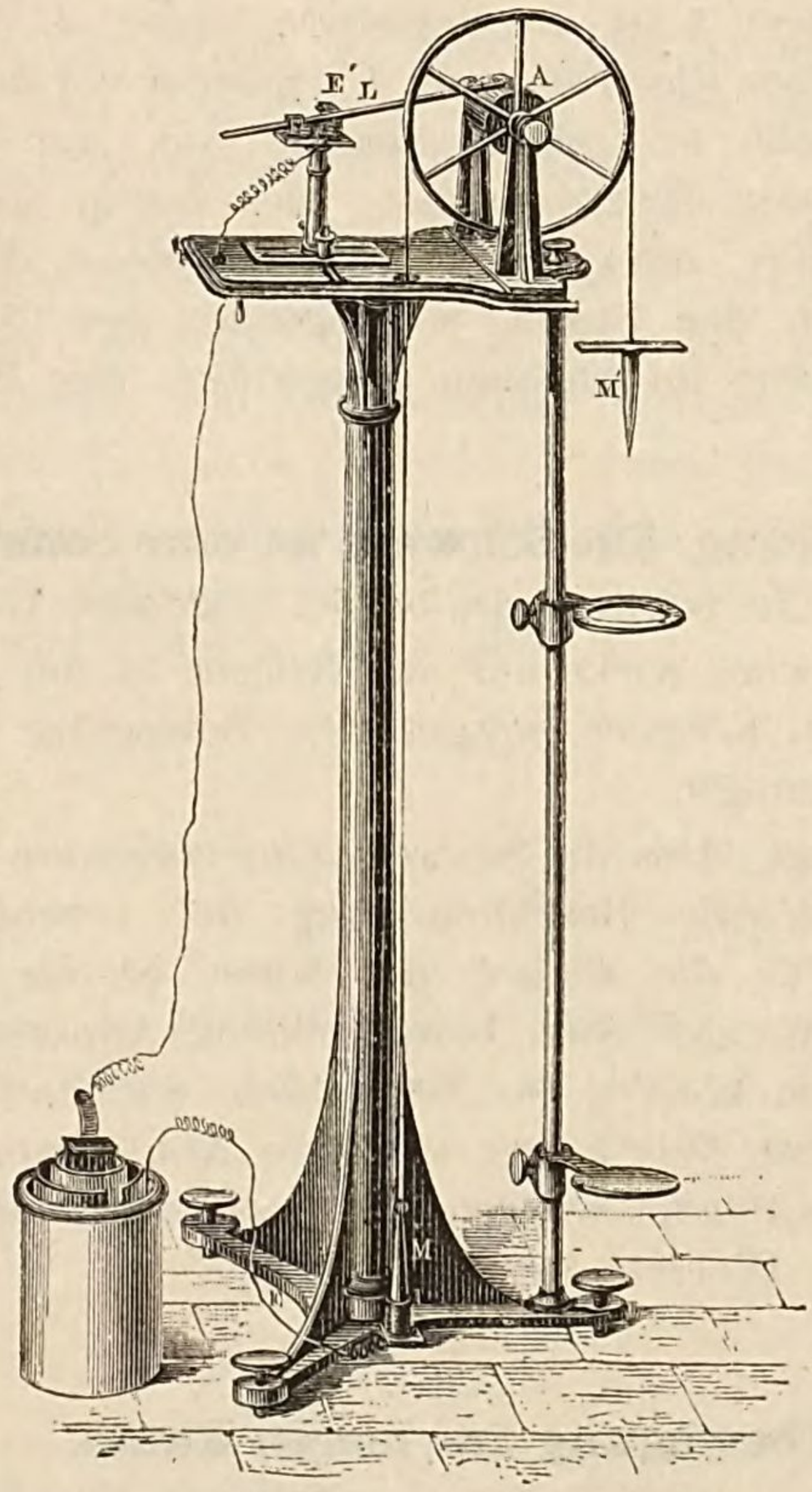


Fig. 120.

Man hat naturgemäss diese Vervollkommnungen beim Bau der Fallmaschinen zu verwerthen gesucht. So verwendete man statt der zugespitzten cylindrischen Masse von Morin eine schwingende Platte (Pfaundler)[1]) oder eine Stimmgabel (Lebourg).[2]) Bourbouze[3]) brachte auf der Achse der Atwood'schen Maschine einen Cylinder an, auf welchem eine schwingende Platte Curven auf-

[1]) Pfaundler, Müller-Pouillet's Physik, I, 276.
[2]) Lebourg, Journal de physique, VII, 44; 1877.
[3]) Bourbouze, C. R., LIV; 1862.

zeichnete. Man erhält dann eine Wellenlinie, auf der jeder Bogen derselben Zeitdauer entspricht, während die veränderliche Länge derselben den zurückgelegten Wegen entsprechen. Die Figuren 118 und 119 sind derartige mit der Anordnung von Bourbouze erhaltene Curven, welche deutlich die Wirkungsweise der Registrirvorrichtung erkennen lassen. Figur 120 giebt eine Ansicht des ganzen Apparates: A ist der Registrircylinder, L die schwingende Platte. Ein kleiner Electromagnet E', welcher vor der schwingenden Platte angebracht ist, zieht dieselbe aus der Gleichgewichtslage; ein anderer Electromagnet, der durch denselben Strom, welcher E' passirt, erregt wird, hält die Masse M unten zurück. Unterbricht man den Strom, so beginnen der Cylinder und die schwingende Platte im gleichen Augenblick ihre Bewegung.

83. Folgerung: Die Schwere ist eine constante Kraft. — Wir haben für die Schwere die beiden folgenden Gesetze bewiesen:

1. Die Schwere wirkt auf alle Körper in der gleichen Weise;

2. Die den Körpern mitgetheilte Bewegung ist eine gleichförmige beschleunigte.

Hieraus folgt, dass die Schwere eine constante Kraft ist, deren Intensität durch die Beschleunigung der erzeugten Bewegung definirt wird; für die Einheit der Masse ist die Kraft gleich g. Obwohl mit Hülfe der oben beschriebenen Apparate die Grösse g bestimmt werden könnte, so betrachten wir doch den in dieser Weise abgeleiteten Werth nur als erste Annäherung; in dem Abschnitt über das Pendel werden wir bessere Methoden zur Messung des endgültigen Werthes kennen lernen.

84. Wurfbewegung im leeren Raum. — Bevor wir zum Pendel übergehen, wollen wir das Studium der Fallgesetze noch durch einige Worte über die Wurfbewegung im leeren Raum vervollständigen.

Ein Körper möge mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Richtung der Vertikalen in Bewegung gesetzt werden und zwar werde er zunächst mit dieser Geschwindigkeit v_0 senkrecht abwärts geworfen. Stellen wir uns ein System von Punkten vor, welches eine mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten gerichtete Bewegung besitzt; in diesem System sei der Körper allein der Wirkung der Schwere unterworfen. Nach dem Satze von den relativen Bewegungen ist die Bewegung des Körpers in Bezug auf dieses System dieselbe, als ob das System in Ruhe bliebe (**41**).

Durch Superposition der beiden gleichgerichteten Bewegungen erhalten wir

$$v = v_0 + gt$$

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2};$$

die resultirende Bewegung ist also gleichförmig beschleunigt. Geschwindigkeit und Weg werden dabei immer positiv gerechnet, wenn sie senkrecht abwärts gerichtet sind.

Diese Formeln sind mit Berücksichtigung der Vorzeichen direct auf den Fall anwendbar, dass der Körper senkrecht aufwärts geworfen wird. Es ist aber doch von Vortheil, in den Formeln hervortreten zu lassen, wie die Bewegung, welche ohne die Schwere gleichförmig wäre, in jedem Augenblick durch den Einfluss dieser Kraft verzögert wird. Wir nehmen also Weg und Geschwindigkeit in dem Sinne der Anfangsbewegung, d. h. von unten nach oben positiv. Die Formeln gehen dann über in

$$v = v_0 - gt,$$

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

und die Bewegung ist gleichförmig verzögert.

Die Geschwindigkeit wird Null

$$0 = v_0 - gt$$

zur Zeit

$$t = \frac{v_0}{g};$$

der Körper hat in diesem Augenblick die Höhe

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g v_0^2}{2 g^2}$$

$$= \frac{v_0^2}{2g}$$

erreicht.

Von dieser Höhe aus fällt er wieder ohne Anfangsgeschwindigkeit herab und erreicht den Boden bekanntlich (**79**) mit der Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$, d. h. mit einer Geschwindigkeit, die der ursprünglichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Grösse nach

gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt ist. Man kann dieses Resultat auch in folgender Form aussprechen: Ein senkrecht nach oben geworfener Körper steigt gerade bis zu der Höhe h an, von welcher er fallen müsste, um die anfänglich ihm mitgetheilte Geschwindigkeit zu erlangen.

Die Zeit t, welche der Körper beraucht, um wieder zum Boden zurückzukommen, ist durch die Gleichung

$$h = \frac{1}{2} g t^2,$$

bestimmt; wenn man den oben für h gefundenen Werth einsetzt, erhält man

$$\frac{{v_0}^2}{2g} = \frac{1}{2} g t^2,$$

d. h. die Zeit

$$t = \frac{v_0}{g}$$

ist gleich derjenigen, welche zum Aufsteigen nöthig war.

Offenbar unterscheidet sich der Erdboden in keiner Weise von irgend einer anderen horizontalen Ebene. Ganz allgemein muss also ein Körper in den beiden Zeitpunkten, in denen er denselben Punkt in vertikaler Richtung passirt, auch die gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit haben; ferner sind diese beiden Zeiten gleich weit von dem Augenblick entfernt, in welchem er den höchsten Punkt erreichte.

Die vorigen Formeln müssen natürlich auch für den zweiten Theil der Bewegung gelten, in welchem der Körper frei fällt. Zählen wir die Zeiten von dem Augenblicke an, wo der Körper die Geschwindigkeit Null hat, und nennen wir die von da ab gerechnete Zeit t', so ist

$$t' = t - \frac{v_0}{g};$$

und die obigen Formeln ergeben

$$v = v_0 - g\left(t' + \frac{v_0}{g}\right) = -g t',$$

$$s = v_0\left(t' + \frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(t' + \frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{{v_0}^2}{2g} - \frac{g t'^2}{2} = h - \frac{g t'^2}{2}.$$

Der Körper fällt also von der grössten Höhe h frei herab; es ist noch zu beachten, dass hier das Minuszeichen nach unten gerichtete Geschwindigkeiten und Wege bedeutet. Die Formeln zeigen ausserdem, dass zur Zeit $-t'$ und t', die gleich weit von dem der Geschwindigkeit Null entsprechenden Augenblicke abstehen, der Körper vom höchsten Punkte seiner Bahn gleich weit entfernt ist und absolut gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten besitzt.

Für geringe Geschwindigkeiten gelten alle diese Resultate auch im lufterfüllten Raume. Um diese Ergebnisse mit der Atwood'schen Fallmaschine zu bestätigen, stellt man zwei Schlitten mit durchbohrten Scheiben in der Höhe des oberen Randes der Gewichte P ein, wobei die Stellung der letzteren eine beliebige sein kann, und legt auf jeden Ring ein Zulagegewicht p. (Es muss zu diesem Zweck ein Schlitten mit einem längeren horizontalen Arm vorhanden sein. Vgl. Fig. 121). Dann hebt man eines der

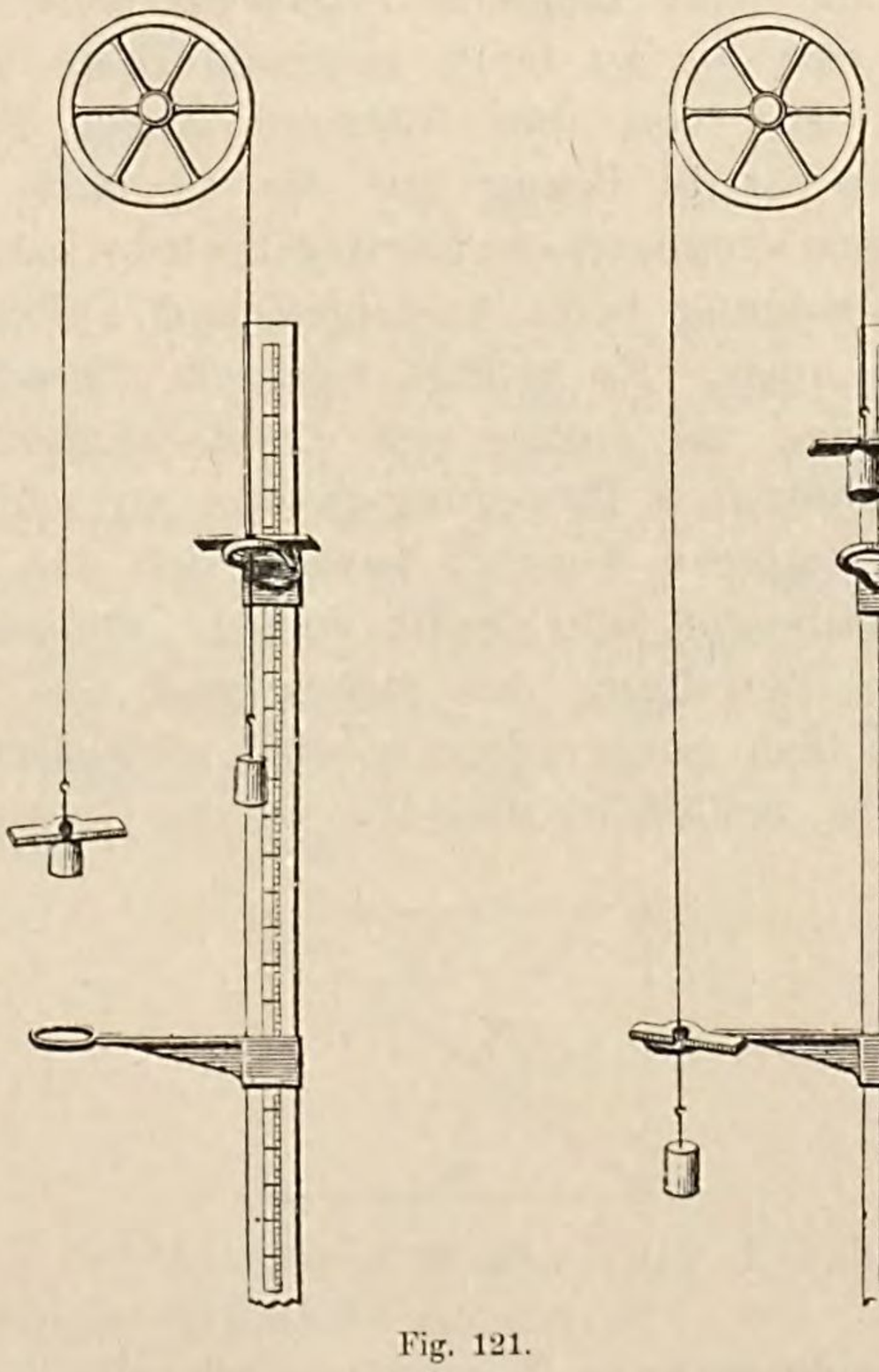


Fig. 121.

Gewichte mit dem Zulagegewicht auf eine beliebige Höhe, während das zweite Zulagegewicht auf einer Scheibe liegen bleibt. Beim Loslassen des gehobenen Gewichtes bewegt sich das System $2P + p$ unter dem Einfluss der Kraft p. Sobald die Gewichte in die Höhe

der Schlitten kommen, hört die Kraft p auf zu wirken, während sich das zweite Zulagegewicht auf das andere Gewicht P auflegt; das Gewicht des Systems bleibt demnach unverändert $2P+p$; es kann jetzt als ein mit einer gewissen Geschwindigkeit senkrecht aufwärts geschleuderter Körper angesehen werden. Es ergiebt sich, dass das Gewicht genau bis zu der Höhe ansteigt, von der man es fallen lassen musste, um ihm diese Geschwindigkeit zu ertheilen; das erste Gewicht bewegt sich nämlich mit verzögerter Bewegung unterhalb des Schlittens noch so lange abwärts, bis seine Entfernung von der Scheibe des Schlittens gleich derjenigen ist, bis zu welcher man es anfangs über den Schlitten emporgehoben hatte. Hier wird die Geschwindigkeit Null, die Bewegung ändert ihre Richtung u. s. w.

Mit der Morin'schen Maschine lassen sich die Gesetze der gleichförmig verzögerten Bewegung eingehend untersuchen. Zu diesem Zwecke wird der am unterem Ende des Cylinders befindliche Fallkörper mit einer Armbrust senkrecht nach oben geschleudert; er erhebt sich bis zu einer gewissen Höhe und fällt dann wieder abwärts. Die von ihm während dieser Bewegung aufgezeichnete Curve ist in Bezug auf die Ordinate des höchsten Punktes vollkommen symmetrisch; hierdurch wird wiederum bewiesen, dass auch die Bewegung beim Ansteigen und Fallen vollkommen symmetrisch sein muss. Es genügt demnach, diese Symmetrie der Curve nachzuweisen, um daraus auf die Richtigkeit der oben in anderer Weise ermittelten Bewegungsgesetze zu schliessen.

Bei diesem letzteren Versuch bewegt sich das Papier gleichförmig an dem fallenden Schreibstift vorbei. Offenbar ändern wir an der relativen Bewegung des Stiftes und des Papierstreifens nichts, wenn wir dem ganzen System eine gleichförmig fortschreitende Bewegung u_0 ertheilen; dieselbe sei der Grösse nach gleich,

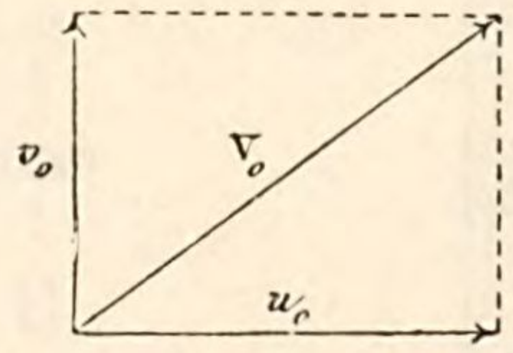


Fig. 122.

aber von entgegengesetztem Vorzeichen wie die im übrigen beliebige Geschwindigkeit des Streifens. Dann wird aber der Theil des Papierstreifens, welchen der Schreibstift gerade berührt, in Ruhe sein; der fallende Körper bewegt sich mit der ihm mitgetheilten horizontalen Geschwindigkeit u_0 und der vertikalen Fall-

geschwindigkeit v_0, die er vorher schon besass. Die resultirende Geschwindigkeit V_0 ist demnach, da u_0 und v_0 beliebig gross sind, auch keiner Beschränkung unterworfen; da nun die von ihm aufgezeichnete Curve dieselbe bleibt, ob der Papierstreifen eine translatorische Bewegung besitzt oder nicht, so schliessen wir, dass ein unter einem beliebigen Winkel geworfener Körper im Raume eine Parabel beschreibt.

Dieser wichtige Satz kann auch direct bewiesen werden.

Ein Körper werde vom Punkte O aus mit der Geschwindigkeit v_0 in der Richtung Ox_1 geworfen. Wir suchen die Bewegung,

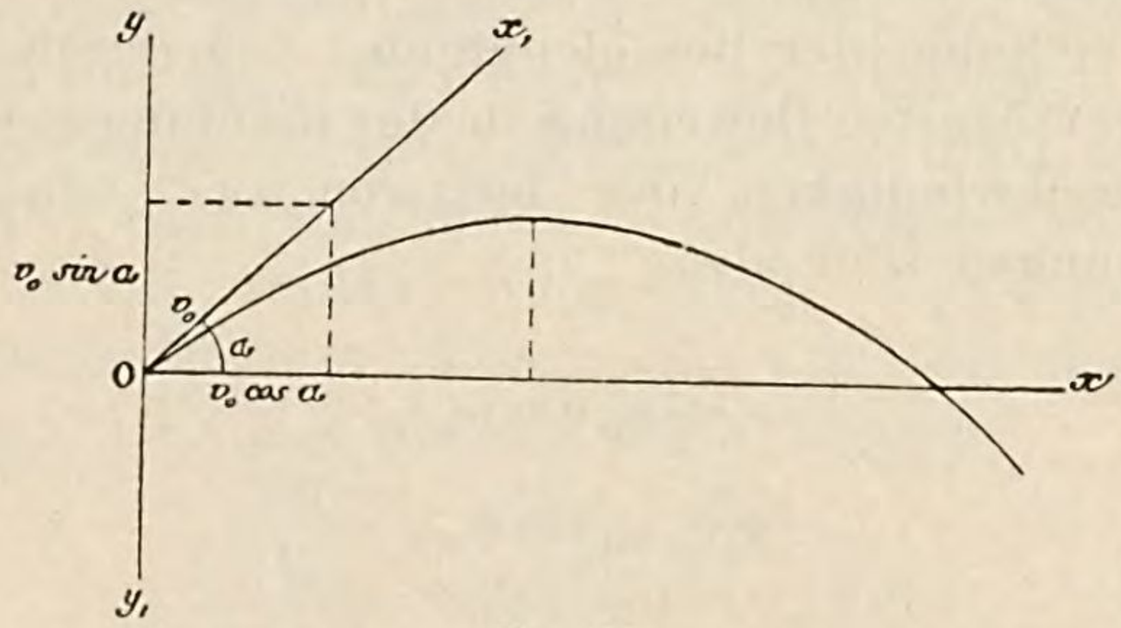


Fig. 123.

welche er unter der Wirkung der Schwere annimmt. Durch ähnliche Überlegungen wie die eben angestellten sieht man unmittelbar ein, dass die gesuchte Bewegung erhalten werden kann durch Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 in der Richtung Ox_1 und einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, welche dem Körper bei alleiniger Wirkung der Schwere in der Richtung Oy_1 ertheilt werden würde. Nimmt man nun die Richtungen Ox_1 und Oy_1 zu Achsen, so sind die Gleichungen der Bewegung

$$x_1 = v_0 t$$

und

$$y_1 = \frac{g t^2}{2}.$$

Die Gleichung der Flugbahn wird durch Elimination von t aus beiden Gleichungen erhalten; sie lautet:

$$y_1 = \frac{g x_1^{\,2}}{2 v_0^{\,2}};$$

dieselbe stellt eine auf eine Tangente und den conjugirten Durch-

messer bezogene Parabel dar; die ursprüngliche Richtung der Bewegung tangirt diese Parabel, und die Achse derselben steht vertikal.

Bei der Untersuchung der Bewegung ist es indessen bequemer, rechtwinklige Achsen zu benutzen; wir nehmen deshalb die Horizontale Ox, die durch den Anfangspunkt der Bewegung geht, und die Vertikale Oy zu Coordinatenaxen. Bedeutet α den Winkel, welchen die anfängliche Bewegungsrichtung mit der Horizontalen bildet, so kann die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in zwei andere zerlegt werden, nämlich in eine horizontale Componente $v_0 \cos \alpha$ und eine senkrechte $v_0 \sin \alpha$. Die gesuchte Bewegung ist die Resultante der gleichförmigen Geschwindigkeit $v_0 \cos \alpha$ in der Richtung Ox, und der in Folge der Beschleunigung $-g$ durch die Schwere gleichförmig verzögerten Bewegung in der Richtung der Vertikalen; die Anfangsgeschwindigkeit der letzteren ist $v_0 \sin \alpha$. Die Bewegungsgleichungen sind also:

$$x = v_0 \cos \alpha \,.\, t,$$
$$y = v_0 \sin \alpha \,.\, t - \frac{g t^2}{2};$$

durch Elimination von t erhält man wieder die Gleichung der Flugbahn

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel mit vertikaler Achse dar.

Die Coordinaten des Scheitels kann man leicht erhalten, wenn man diese Gleichung so transformirt, dass das Glied vom ersten Grad wegfällt; dieselben ergeben sich indessen einfacher, wenn man beachtet, dass der Scheitel derjenige Punkt ist, in welchem die senkrechte Componente der Geschwindigkeit Null wird.

In irgend einem Augenblick sind die Componenten der Geschwindigkeit v des Körpers, wenn man mit ϑ den Winkel ihrer Richtung mit Ox bezeichnet:

$$v \,.\, \cos \vartheta = v_0 \cos \alpha,$$
$$v \,.\, \sin \vartheta = v_0 \sin \alpha - g t;$$

die senkrechte Componente $v \sin \vartheta$ wird also Null zur Zeit

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g};$$

setzt man diesen Wert von t in die allgemeinen Ausdrücke für x und y ein, so erhält man die Coordinaten des Scheitels

$$\xi = \frac{{v_0}^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$\eta = \frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Der Körper steigt demnach bis zur Höhe $\eta = \frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g}$ an und fällt dann symmetrisch zum aufsteigenden Aste wieder herunter.

Die Geschwindigkeit des Körpers ist abgesehen vom Zeichen beim Aufsteigen und beim Fallen in gleicher Höhe dieselbe; denn die horizontale Componente dieser Geschwindigkeit ist constant und gleich $v_0 \cos\alpha$; die vertikale Componente $v \sin\vartheta = v_0 \sin\alpha - gt$ kann man andererseits durch Elimination von t aus dieser Gleichung und dem Ausdruck für y auf die Form bringen:

$$v \sin\vartheta = \pm\sqrt{{v_0}^2 \sin^2\alpha - 2gy};$$

diese Componente wird folglich, abgesehen vom Zeichen, dieselbe, wenn y wieder den gleichen Werth bekommt. Die resultirende Geschwindigkeit des Körpers ist die geometrische Summe dieser beiden Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} v^2 &= {v_0}^2 \cos^2\alpha + {v_0}^2 \sin^2\alpha - 2gy \\ &= {v_0}^2 - 2gy. \end{aligned}$$

Der Körper erlangt also dieselbe Geschwindigkeit, wenn er wieder dieselbe Höhe passirt.

Er kommt deshalb auch am Boden mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 wieder an; nur ihre Richtung ist eine andere.

Der Punkt, in welchem er den Boden erreicht, hat die Abcisse (wir haben $y = 0$ zu setzen oder die Abcisse des Scheitels zu verdoppeln):

$$a = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Diese Länge a nennt man die *Wurfweite*.

Man sieht, dass bei constantem v_0 die Grösse a ein Maximum hat für $\alpha = 45^0$. Man muss also unter einem Winkel von 45^0

werfen, um möglichst weit zu kommen; man erreicht dann die grösste Wurfweite $\frac{{v_0}^2}{g}$, das Doppelte von der Höhe, zu welcher ein mit derselben Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht aufwärts geworfener Körper gestiegen wäre. Ferner ist offenbar die Wurfweite für zwei Werthe von α, die gleich weit von 45^0 abstehen, dieselbe; es ist daher im allgemeinen möglich, einen Punkt des Bodens durch zwei verschiedene Parabeln zu erreichen. Dasselbe gilt natürlich für einen Punkt in beliebiger Höhe.

Wir nehmen an, der Punkt $M\ (x', y')$ solle getroffen werden. Da die Parabel durch diesen Punkt gehen muss, hat man den Winkel α so zu wählen, dass er der Gleichung genügt:

$$y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x'^2}{2 {v_0}^2 \cos^2 \alpha}.$$

Ersetzt man $\cos^2 \alpha$ durch $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ und ordnet nach Potenzen von $\operatorname{tg} \alpha$, so folgt

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2 {v_0}^2}{g x'} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2 {v_0}^2 y'}{g x'^2} + 1 = 0.$$

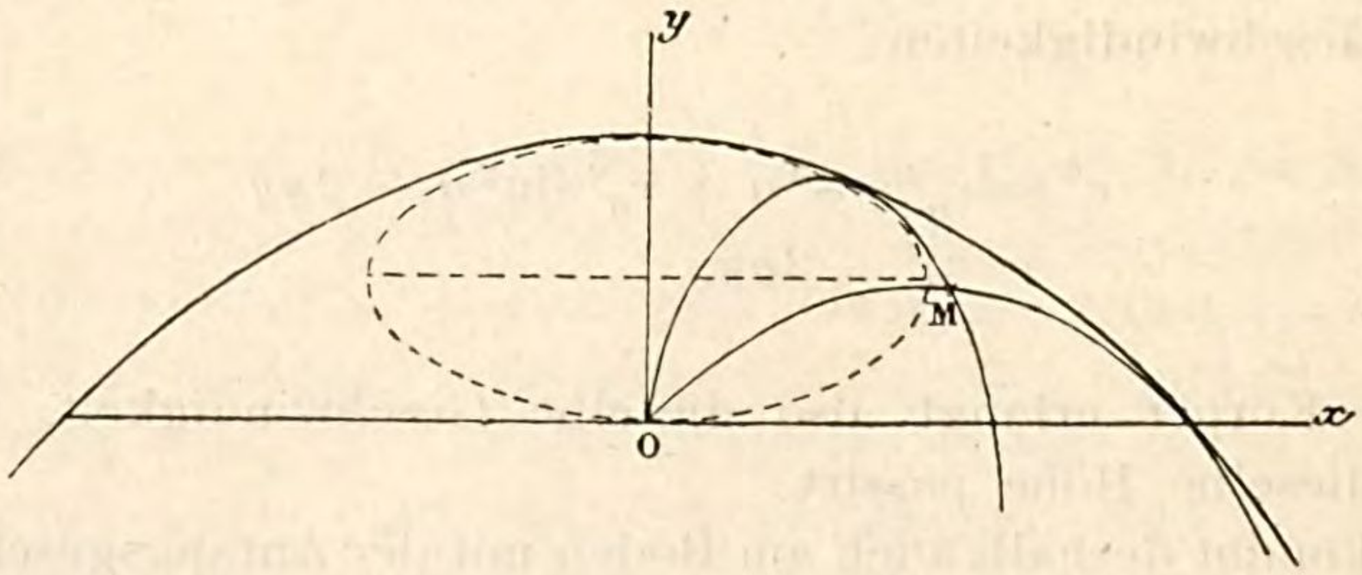


Fig. 124.

Damit die Aufgabe möglich ist, muss diese Gleichung reelle Wurzeln haben, d. h. es muss

$$\frac{{v_0}^4}{g^2 x'^2} - \frac{2 {v_0}^2 y'}{g x'^2} - 1 \geqq 0$$

oder

$$y' \leqq \frac{{v_0}^2}{2g} - \frac{g x'^2}{2 {v_0}^2}$$

sein. Der gegebene Punkt muss also innerhalb der Parabel

$$y' = \frac{{v_0}^2}{2g} - \frac{g x'^2}{2 {v_0}^2}$$

liegen, dessen Scheitel auf der Achse Oy in einer Höhe $\frac{{v_0}^2}{2g}$ liegt. Diese Höhe würde ein mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht aufwärts geworfener Körper gerade erreichen. Eine solche Parabel hüllt alle Parabeln, welche der gleichen Anfangsgeschwindigkeit entsprechen, ein und heisst *Sicherheitsparabel*, da man ausserhalb dieser Curve in Sicherheit ist.

Die auf der Curve selbst liegenden Punkte können nur auf eine einzige Art getroffen werden, nämlich unter einem Anfangswinkel, welcher durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{{v_0}^2}{g x'}$$

gegeben ist. Für alle innerhalb liegenden Punkte sind zwei verschiedene Parabeln möglich.

Es ist leicht zu beweisen, dass der geometrische Ort des Scheitels aller Flugbahnen die Ellipse

$$\frac{g {x_1}^2}{{v_0}^2} + \frac{4 g {y_1}^2}{{v_0}^2} - 2 y_1 = 0$$

ist; dieselbe hat $\frac{{v_0}^2}{2g}$ zur kleinen Achse und ihre grosse Achse ist das Doppelte der kleinen. Jeder ausserhalb der Ellipse gelegene Punkt kann nur von dem abwärts gerichteten Aste einer Flugbahn getroffen werden. Das Geschoss muss aber denselben notwendigerweise beim abwärts gehen treffen, einerlei, welche von den beiden möglichen Parabeln es durchflogen hat; in den beiden Fällen ist nur der Aufschlagswinkel verschieden. Ein innerhalb der Ellipse gelegener Punkt wird bei der einen Flugbahn im aufsteigenden, bei der anderen im fallenden Aste getroffen. Die Punkte auf der Ellipse können entweder in horizontaler Richtung oder von oben getroffen werden.

In Wirklichkeit beeinflusst der Luftwiderstand, dessen Wirkung wir hier nicht berücksichtigt haben, die erhaltenen Resultate beträchtlich, namentlich wenn die Wurfgeschwindigkeiten bedeutend sind.

II. Das Pendel.

85. Entdeckung durch Galilei: Isochronismus kleiner Schwingungen. — „Als der etwa 20jährige Galilei eines Tages (ungefähr 1583) dem Gottesdienste in der Cathedrale zu Pisa beiwohnte, verweilten seine Blicke auf einer Broncelampe, einem Meisterwerke von Benvenuto Cellini, die an einem langen Seile aufgehängt, langsam vor dem Altare oscillirte.“ Galilei bemerkte erstaunt mit Hülfe seines Pulsschlages, dass die Lampe, obgleich sie nach und nach immer kleinere Schwingungen ausführte, doch immer in demselben Tacte hin und her ging. Die Schwingungsdauer ist also unabhängig von der Amplitude. Galilei ahnte sofort die wichtigen Folgerungen, welche sich aus dieser gleichförmigen Bewegung ergaben. „Die erste Anwendung, an die er dachte, war eine Folge seiner damaligen medicinischen Studien. Man fühlte den Kranken schon seit langer Zeit den Puls, aber man maass die genaue Dauer eines Schlages nicht. Zu diesem Zwecke bediente sich Galilei des Pendels. Eine sehr einfache Anordnung erlaubte die Verlängerung und Verkürzung des Aufhängefadens, so dass man die Schwingungen des Pendels mit dem Pulsschlag in Übereinstimmung bringen konnte; anstatt, wie wir es heute thun, zu sagen: Der Puls eines Fieberkranken beträgt 140 Schläge in der Minute, sagte man damals: Der Kranke zeigt 6 Zoll 3 Linien am *Pulsmaass*.“

„Die mathematische Theorie der Bewegung war zu wenig vorgeschritten, um zum genauen Schwingungsgesetze zu führen. Die Ehre, dasselbe zu entdecken, war Huyghens vorbehalten, der das Gesetz auf die Galilei'schen Sätze über den Fall der Körper gründete. Der berühmte Italiener beschränkte sich darauf, durch Versuche zu zeigen, dass die Schwingungsdauer wie die Quadratwurzel der Fadenlänge wächst, und er schloss daraus auf die Möglichkeit, die Höhe eines Gebäudes nach der Schwingungsdauer eines Seiles zu bestimmen, das am höchsten Punkte desselben befestigt ist.“ [1])

Später benutzte Galilei das Pendel, um durch Versuche zu beweisen, dass die Geschwindigkeit, welche ein und derselbe Körper beim Herabgleiten von verschieden geneigten, aber gleich hohen schiefen Ebenen erlangt, gleich gross sind (**79**). In seinen letzten

---

[1]) Bertrand, Les fondateurs de l'astronomie moderne. Paris, Hetzel, 1860; Artikel Galilei.

Lebensjahren wurde er durch andere Aufgaben auf diese Frage zurückgeführt und beschäftigte sich mit der wichtigen Anwendung des Pendels auf Uhren; er beschrieb klar den zur Unterhaltung und zur störungsfreien Übertragung der Bewegung auf die Zeiger geeigneten Mechanismus. Immerhin war es Huyghens, welcher, durch seine Untersuchungen über pendelnde Bewegungen darauf geführt, die erste durch ein Pendel regulirte Uhr construirte; er legte dieselbe den holländischen Generalstaaten im Jahre 1657 vor, worauf sich die Anwendung dieser Uhren rasch über alle Länder verbreitete.

86. Einfaches (mathematisches) Pendel. — Ein materieller Punkt, welcher an einem unausdehnbaren, masselosen Faden fest aufgehängt ist, heisst ein einfaches oder mathematisches Pendel. Der materielle Punkt ist in dem durch den festen Punkt gehenden Lothe im Gleichgewicht, wenn man ihn sich selbst überlässt. Entfernt man ihn aus dieser Lage, so zerlegt sich sein Gewicht in zwei Kräfte; die eine ME fällt in die Richtung des Fadens und sucht den letzteren zu spannen, die andere, tangentiale MD sucht den materiellen Punkt auf dem Kreisbogen BA nach A zurückzuführen.

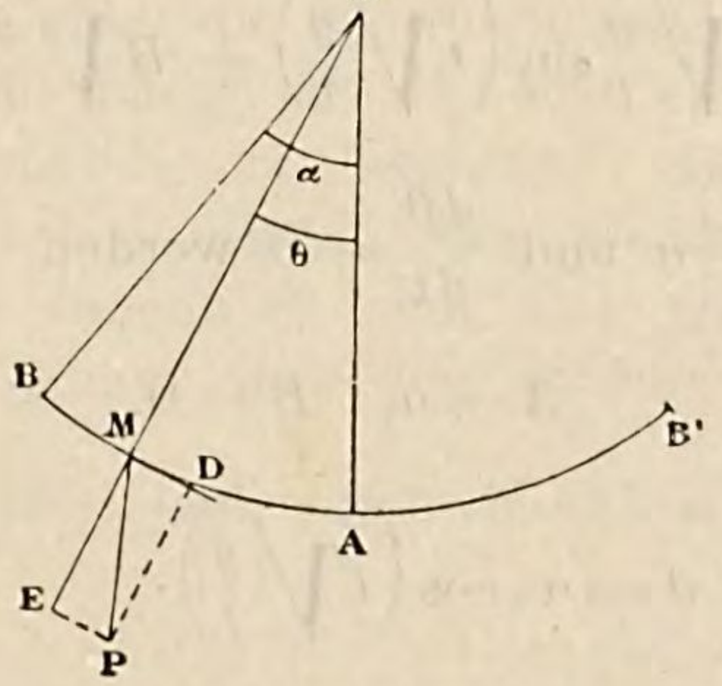


Fig. 125.

Nehmen wir an, wir hätten den materiellen Punkt nach B gebracht; der Ablenkungswinkel AOB sei α, und wir überlassen den Punkt sich selbst. Er fällt dann längs des Bogens BA herunter, und wenn wir ihn in einem beliebigen Punkte M seiner Bahn in einer Entfernung $BM = s$ vom Punkte B (auf dem Bogen gezählt) betrachten, so ist die tangentiale Componente MD seines Gewichtes mg gleich $mg \sin \vartheta$, wenn mit ϑ der Winkel AOM bezeichnet wird, und man hat:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin \vartheta.$$

Es ist aber

$$s = l(\alpha - \vartheta)$$

und folglich

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -l\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

somit

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta. \qquad (1)$$

Kleine Schwingungen. — Setzen wir zunächst voraus, ϑ sei sehr klein, so können wir den Sinus statt des Bogens setzen und schreiben:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\vartheta. \qquad (2)$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist:

$$\vartheta = A\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

wo A und B zwei durch die Anfangsbedingungen zu bestimmende Constanten sind. Es ist aber:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -A\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + B\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

für $t = 0$ muss $\vartheta = \alpha$ und $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ werden, woraus folgt

$$A = \alpha, \quad B = 0.$$

Es wird daher

$$\vartheta = \alpha\cdot\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \qquad (3)$$

Der Körper geht von B ab und kommt in A in dem durch die Gleichung $0 = \alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$, d. h. $t\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}$ gegebenen Zeitpunkt an, er ist demnach zur Zeit $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ in A. Während dieser Zeit wächst die Geschwindigkeit fortwährend; man hat nämlich:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Die Geschwindigkeit im Punkte A ist $-\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Der Körper bewegt sich darauf den Bogen AB' hinauf und kommt in dem symmetrisch zu B gelegenen Punkte B', zur Zeit $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ an; die Geschwindigkeit nimmt von A nach B' ab und ist in B' Null. Der Körper befindet sich also in B' genau unter denselben Bedingungen wie in B, er wird daher fortwährend zwischen den beiden Punkten hin und her schwingen. Diese Schwingungen sind isochron, was selbstverständlich und nicht mit der von Galilei entdeckten Erscheinung zu verwechseln ist.

Der Körper macht eine *vollständige Schwingung*, wenn er sich von B nach B' und wieder rückwärts von B' nach B bewegt; die Bewegung von B nach B' allein ist eine halbe Schwingung. Die Dauer einer halben Schwingung ist unabhängig von der Amplitude,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (4)$$

Es ist also *die Dauer kleiner Pendelschwingungen unabhängig von der Grösse des Ausschlages;* diese Thatsache heisst Isochronismus, oder richtiger *Tautochronismus* kleiner Pendelschwingungen.

Die Formel zeigt ausserdem, dass in Übereinstimmung mit den Messungen von Galilei die Schwingungsdauer proportional der Quadratwurzel aus der Länge des Pendels ist.

Es ist nicht unnöthig zu bemerken, dass die Bewegungsgleichungen des einfachen Pendels, das sehr kleine Schwingungen ausführt, denjenigen indentisch sind, die man erhalten würde, wenn man die Bewegung eines den Umfang eines Kreises vom Radius a mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $PV = a\sqrt{\frac{g}{l}}$ durch-

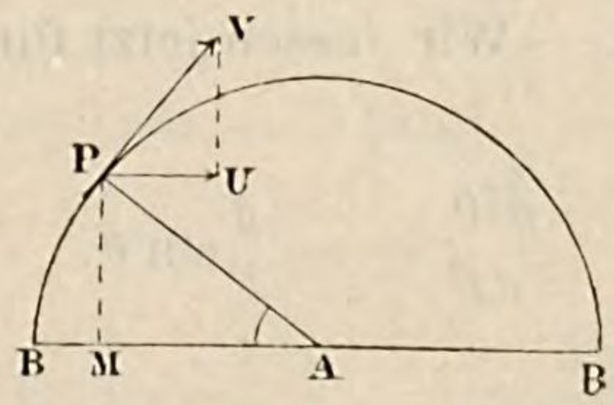


Fig. 126.

laufenden Körpers auf den Durchmesser des Kreises projicirt:

$$AM \text{ oder } \vartheta = a\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

$$-PU \text{ oder } \frac{d\vartheta}{dt} = -a\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Diese Bemerkung wurde oft zum einfachen, aber indirecten Beweis der Formel für kleine Schwingungen eines Pendels benutzt. Man kann darauf auch eine Veranschaulichung der sehr kleinen Schwingungen eines Pendels gründen, nämlich: die Bewegung eines Nagels auf einem sich gleichmässig drehenden Rade, den man aus grosser Entfernung und in der Ebene des Rades stehend betrachtet.

Verallgemeinerung der Formel für das Pendel. — Die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ist offenbar in allen Fällen gültig, wo die Beziehung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\vartheta \qquad (2)$$

gilt, d. h.

1. Wenn ein Körper, welcher der Wirkung einer nach Richtung und Stärke constanten Kraft unterworfen ist, sehr kleine Schwingungen nach beiden Seiten seiner Ruhelage ausführt. Es ist hierbei, vom analytischen Standpunkte aus betrachtet, gleichgültig, ob die wirkende Kraft die Schwere oder irgend eine andere constante Kraft ist.

2. Wenn ein Körper um irgend eine Entfernung aus seiner Ruhelage abgelenkt ist und unter der Einwirkung einer der Ablenkung proportionalen Kraft dahin zurückstrebt. Bezeichnet man nämlich die Ablenkung mit ϑ und die Kraft mit $\frac{g}{l}\vartheta$, so kommt man genau auf die Gleichung (2).

Allgemeiner Fall.[1]) — Wir lassen jetzt für ϑ jede Einschränkung fallen und setzen:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta. \qquad (1)$$

Multipliciren wir die beiden Glieder dieser Gleichung mit $2\,d\vartheta$;

$$2\,d\vartheta\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\,2\,\frac{g}{l}\sin\vartheta\,d\vartheta;$$

---

[1]) Der erste, welcher den Einfluss der Grösse des Ausschlages erkannte war Picard; D. Bernoulli reducirte zuerst grössere Ausschläge auf sehr kleine (1747).

und integriren, so folgt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\vartheta + \text{const.}$$

Die Constante wird durch die Anfangsbedingungen bestimmt, für $t = 0$ muss $\vartheta = \alpha$ und $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ sein; man hat also die Bedingungsgleichung

$$0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + \text{const.}$$

Ersetzen wir die Constante durch ihren Werth:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\vartheta - \cos\alpha),$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\vartheta - \cos\alpha};$$

woraus endlich folgt:

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\alpha}}. \qquad (5)$$

Hier giebt das negative Vorzeichen die Bewegung von B nach B', und das positive diejenige von B' nach B an.

Die Variablen sind nun getrennt; wir formen aber die rechte Seite der Gleichung noch weiter um.
Es ist

$$\cos\vartheta - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

und folglich

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}}.$$

Setzen wir

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi,$$

und differentiiren, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\,d\varphi,$$

oder

$$\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\vartheta}{\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{\cos\frac{\vartheta}{2}},$$

und daher

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}. \qquad (6)$$

Auf diese Weise ist der Ausdruck für die Zeit auf ein elliptisches Integral erster Art zurückgeführt.

Die Zeit, welche das Pendel braucht, um den Weg von B nach A zu durchlaufen, ist gleich dem Werthe dieses Integrales innerhalb derjenigen Grenzen, die dabei den Werthen von ϑ entsprechen, nämlich: α und 0 und folglich den Werthen von φ: $\frac{\pi}{2}$ und 0. Vertauscht man noch wegen des negativen Vorzeichens die Grenzen, so erhält man:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Wir entwickeln den Nenner in eine Reihe

$$\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi+\cdots$$
$$+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}\sin^{2n}\varphi+\cdots,$$

da nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2},$$

so erhalten wir als vollständige Formel für die halbe Schwingungsdauer,

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots + \left(\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} + \ldots \right]. \quad (7)$$

Ist α klein genug, so dass man das Glied mit $\sin^4 \frac{\alpha}{2}$ und die folgenden vernachlässigen und $\sin \frac{\alpha}{2}$ mit $\frac{\alpha}{2}$ vertauschen kann, so bekommt man:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right), \quad (8)$$

eine Formel, die oft angewendet wird.

Einfluss des Luftwiderstandes, welcher als der Geschwindigkeit proportional vorausgesetzt wird.[1]) Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Bewegung im leeren Raum stattfinde; wir betrachten jetzt ein in freier Luft schwingendes Pendel und untersuchen die durch den Luftwiderstand hervorgebrachte Störung.

Das Gesetz dieses Widerstandes ist verwickelt und wenig bekannt; für kleine Geschwindigkeiten kann er nach Poisson's Vorgang der Geschwindigkeit proportional gesetzt werden.

Die im Sinne BA positiv angenommene Geschwindigkeit ist:

$$v = -l \frac{d\vartheta}{dt},$$

der Luftwiderstand ist gleich v multiplicirt mit einem constanten sehr kleinen Factor, den wir mit $\frac{g}{k}$ bezeichnen wollen; der Widerstand wird demnach sein

$$-\frac{gl}{k} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Die Beschleunigung ist $-l \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$; die Kräfte sind erstens die wirksame Componente der Schwere $g \sin \vartheta$, zweitens der Luftwiderstand, welcher im entgegengesetzten Sinne wirkt, und deshalb von

---

[1]) Newton studirte zum ersten Mal den Einfluss des Luftwiderstandes auf das Pendel.

$g \sin \vartheta$ abgezogen werden muss; man erhält demnach als Bewegungsgleichung

$$-l \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = g \sin \vartheta + \frac{gl}{k} \frac{d\vartheta}{dt}. \qquad (9)$$

Beschränken wir uns auf den Fall kleiner Schwingungen und ersetzen den Sinus durch den Bogen, so erhalten wir nach Division mit l,

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{k} \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{g}{l} \vartheta = 0, \qquad (10)$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne zweites Glied, die man nach der gewöhnlichen Methode integrirt, indem man zuerst die Gleichung

$$r^2 + \frac{g}{k} r + \frac{g}{l} = 0,$$

auflöst und damit erhält

$$r = -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4k^2} - \frac{g}{l}}$$

$$= -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - \frac{gl}{4k^2}} \sqrt{-1}$$

$$= -\frac{g}{2k} \pm \gamma \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{-1},$$

wenn man

$$\gamma^2 = 1 - \frac{gl}{4k^2}$$

setzt. Das gesuchte Integral ist dann

$$\vartheta = e^{-\frac{gt}{2k}} \left[A \sin \left(\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + B \cos \left(\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right],$$

wo A und B zwei willkürliche Constanten bedeuten.

Wir differentiiren

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{g}{2k} e^{-\frac{tg}{2k}} \left[A \sin \left(\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + B \cos \left(\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right]$$

$$+ \gamma \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot e^{-\frac{tg}{2k}} \left[A \cos \left(\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) - B \sin \left(\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right],$$

und bestimmen die beiden Constanten durch die Anfangsbedingungen: für $t = 0$ muss $\vartheta = \alpha$ und $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ sein; folglich

$$B = \alpha, \quad A = \frac{\alpha\sqrt{gl}}{2k\gamma};$$

und

$$\vartheta = \alpha e^{-\frac{gt}{2k}}\left[\cos\left(\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \frac{\sqrt{gl}}{2k\gamma}\sin\left(\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right] \qquad (11)$$

und

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{l}}\,.\,e^{-\frac{gt}{2k}}\sin\left(\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Diese beiden Formeln enthalten die vollständige Lösung.

$\frac{d\vartheta}{dt}$ wird Null für die Werthe von t, welche der Gleichung

$$\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t = n\pi$$

genügen, wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet; die Geschwindigkeit wird also Null für die Zeiten

$$t = n\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{l}{g}};$$

mit andern Worten, die Bewegung ist isochron, und die halbe Schwingungsdauer beträgt

$$t = \frac{1}{\gamma}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (12)$$

ein Werth, der gleich der mit $\frac{1}{\gamma}$ multiplicirten Dauer einer halben Schwingung im leeren Raum (4) ist; da γ etwas kleiner als 1 ist, ist t also etwas grösser als im leeren Raum. Der Isochronismus bleibt demnach bestehen, und die Schwingungsdauer wird einfach etwas vergrössert.

Legen wir in der allgemeinen Gleichung für ϑ der Grösse t die Werthe bei, für welche die Geschwindigkeit Null wird, so

bekommen wir die entsprechenden Werthe von ϑ in den Umkehrspunkten

$$\vartheta = \pm a e^{-n\frac{\pi\sqrt{gl}}{2k\gamma}},$$

worin das Zeichen $\pm$ einem geraden oder ungeraden n entspricht. Die Werthe von ϑ, welche den Umkehrpunkten der Bewegung entsprechen, nehmen also in geometrischer Reihe ab, wenn n, und folglich auch die Zeiten, in arithmetischer Reihe zunehmen.

Borda hat durch seine Versuche gefunden, dass die Amplitude nach 1800 Schwingungen noch $\frac{2}{3}$ der anfänglichen Amplitude war. Wir haben also für die Versuche von Borda

$$\frac{2}{3} = e^{-\frac{1800\,\pi\sqrt{gl}}{2k\gamma}}.$$

Gehen wir zu den natürlichen Logarithmen über, erheben zum Quadrat,

$$\left(\mathrm{Ln}\,\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{(1800)^2\pi^2 gl}{4k^2\gamma^2},$$

und ersetzen alsdann $\frac{gl}{4k^2}$ durch seinen aus der Definitionsgleichung von γ

$$\gamma^2 = 1 - \frac{gl}{4k^2}$$

entnommenen Werth, so erhalten wir

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 + \frac{\left(\mathrm{Ln}\,\frac{2}{3}\right)^2}{(1800)^2\pi^2}.$$

Durch Ausziehen der Wurzel und unter Benützung der für kleine x nahezu gültigen Beziehung $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma} &= 1 + \frac{\left(\mathrm{Ln}\,\frac{2}{3}\right)^2}{2(1800)^2\pi^2} \\ &= 1{,}000\,000\,002\,57.\end{aligned}$$

Die Schwingungsdauer des Borda'schen Pendels in der Luft war also gleich der Schwingungsdauer im leeren Raum multiplicirt mit

1,000 000 002 57.

Wir haben gesehen, dass die Amplituden der Schwingungen in geometrischer Reihe abnehmen. Das von B ausgehende Pendel gelangt nicht zu dem symmetrisch zu B gelegenen Punkte B', sondern zu einem Punkt C, der ein wenig unter B' liegt; dabei

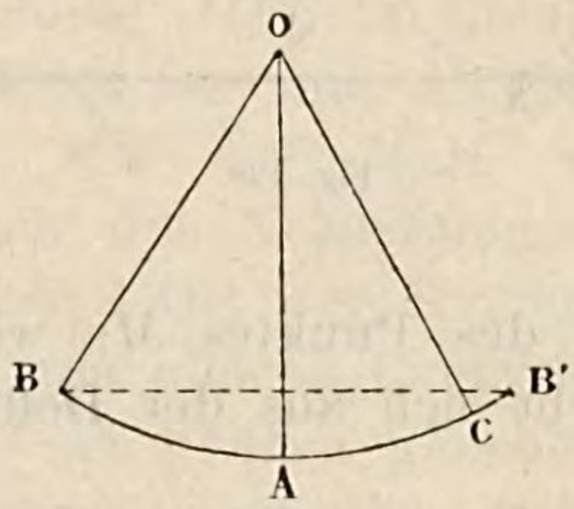


Fig. 127.

ist die Dauer der halben Schwingung sehr nahe dieselbe wie im leeren Raum, aber die beiden auf das Fallen und Steigen verwendeten Zeiten sind nicht mehr gleich. Suchen wir nämlich die Zeiten t', in welchen das Pendel durch die Ruhelage geht, d. h. die Zeiten für welche $\vartheta = 0$ wird, so ist

$$\operatorname{Cotg}\left(\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t'\right) = -\frac{\sqrt{gl}}{2k\gamma}.$$

Ein Bogen mit negativer Cotangente ist grösser als $\frac{\pi}{2}$; der erste der Gleichung genügende Bogen ist also

$$\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t' = \frac{\pi}{2} + \delta,$$

wo $\delta > 0$ durch die Beziehung $\operatorname{tg}\delta = \frac{\sqrt{gl}}{2k\gamma}$ definirt ist; es ist also

$$t' = \frac{1}{\gamma}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\delta}{\gamma}\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (13)$$

wo t' die zum Durchlaufen von BA notwendige Zeit ist; wie man sieht ist dieselbe grösser als die halbe Dauer einer Halbschwingung. Während also die ganze Schwingungsdauer kaum verändert ist, wird die Zeit des Fallens verlängert, diejenige des Steigens ver-

kürzt und damit die Symmetrie auf beiden Seiten des Lothes aufgehoben. Gleichwohl bleiben die kleinen Schwingungen isochron und haben fast die gleiche Schwingungsdauer wie im leeren Raum.

Cycloiden-Pendel. — Ein Punkt M eines Kreises C, der auf einer Geraden AB rollt, ohne zu gleiten, beschreibt eine Cycloide. Es

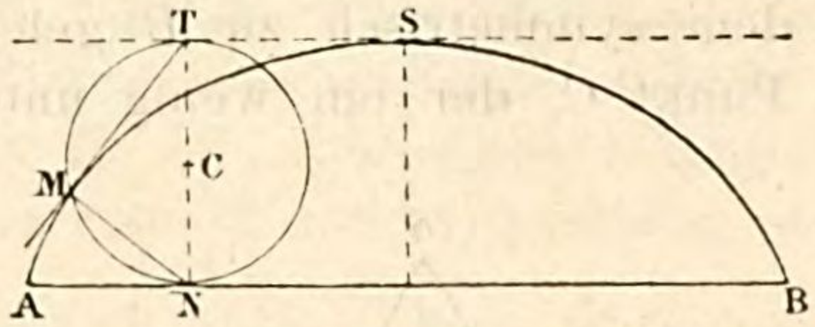


Fig. 128.

sei A die Anfangslage des Punktes M; wenn der Kreis nach C gekommen ist, so ergiebt sich aus der Definition:

$$\text{Bogen } MN = AN.$$

Aus der Entstehungsart der Curve folgt, dass MN auf derselben im Punkte M senkrecht steht. Denn das erste Curvenelement, welches der Punkt M von seiner gegenwärtigen Lage aus beschreibt, kann man sich annähernd aus einer Rotation um den Stützpunkt N entstanden denken; daher ist MT die Tangente. AB heisst die Basis der Cycloide und S ihr Scheitel.

Bei einer zweiten, der ersten gleichen Cycloide, deren Scheitel A ist, betrachten wir den erzeugenden Kreis in der Stellung C',

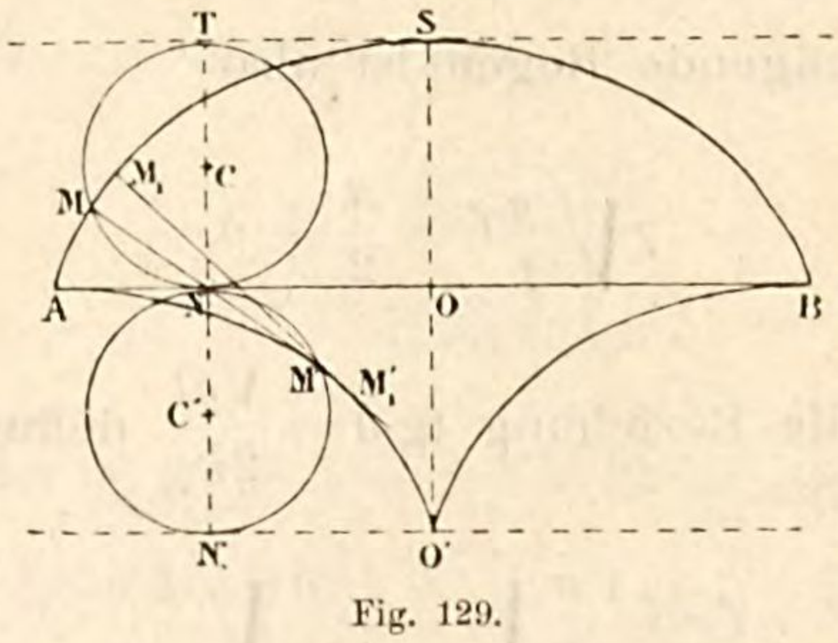


Fig. 129.

die in Bezug auf die Gerade AB zu C symmetrisch ist; der entsprechende Punkt der Curve sei M'. Alsdann ist

$$\text{Bogen } M'N' = O'N'.$$

Die Gerade NM' ist Tangente in M', aber sie ist auch die Verlängerung von MN. Denn

$$\text{Bogen } MN = AN, \text{ also auch}$$
$$\text{Bogen } MT = ON \text{ und}$$
$$MNT = N'NM'.$$

Es ist also die Normale der Cycloide ASB im Punkte M zugleich Tangente der zweiten Cycloide $AO'B$ im Punkte M'. Die Normale der Cycloide ASB in einem dem Punkte M sehr nahen Punkte M_1 wird Tangente der Cycloide $AO'B$ in einem Punkte M_1' sein, der dem Punkte M' benachbart ist, und der Schnittpunkt der beiden benachbarten Normalen MM' und M_1M_1' wird sehr nahe bei M' liegen. M' ist demnach der Krümmungsmittelpunkt der ersten Cycloide: der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Cycloide ASB ist also eine gleiche Cycloide $AO'B$.

Weil MN und $M'N$ als Sehnen gleicher Kreisbogen einander gleich sind, ist der Krümmungsradius $M'M$ in einem Punkte M gleich $2MN$. Hieraus lässt sich in einfacher Weise ein Ausdruck für den Cycloidenbogen SM ableiten. Betrachten wir nämlich

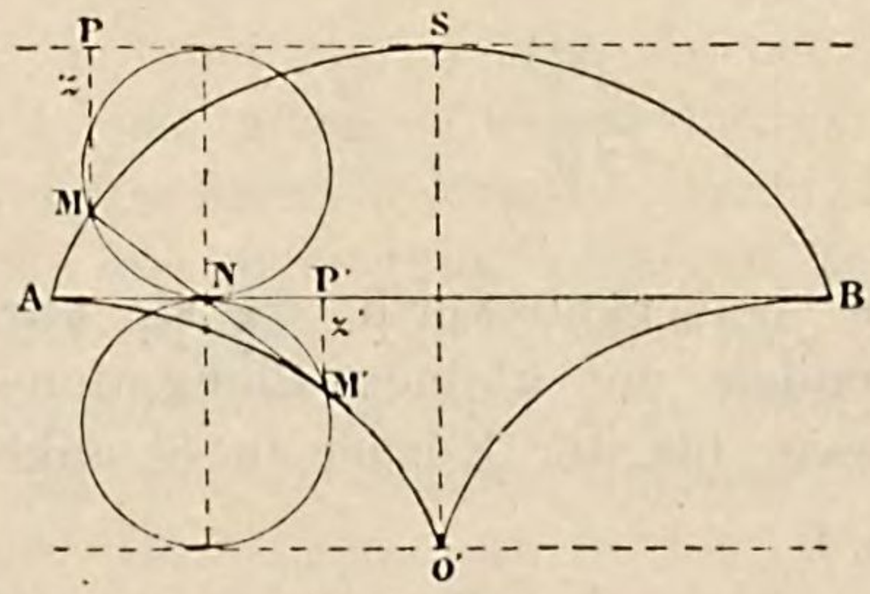


Fig. 130.

auf der unteren Cycloide den entsprechenden Bogen AM', wo r der Radius des erzeugenden Kreises und $z' = M'P'$ sei, so folgt

$$\text{Bogen } AM' = MM' = 2M'N = 2\sqrt{2rz'} = \sqrt{8rz'}$$
$$= \sqrt{2lz'},$$

wenn man

$$l = 4r = O'S \text{ setzt.}$$

Bezeichnet man mit s den Cycloidenbogen SM und mit z die Entfernung des Punktes M von der Tangente PS am Scheitel, so hat man

$$s^2 = 2lz.$$

Wir wollen jetzt mit Hülfe dieser Sätze die Bewegung eines schweren Punktes auf der Cycloide untersuchen.

Wir nehmen an, dass ein Körper im leeren Raum den Cycloidenbogen AS herunter rolle. Bezeichnet man, wie oben, den Bogen

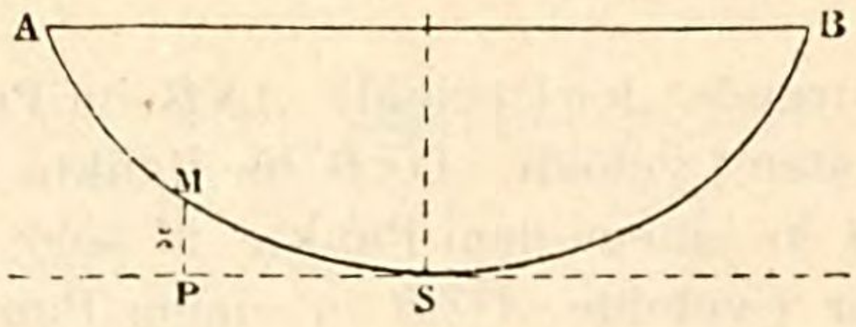


Fig. 131.

SM mit s und die Höhe MP des Punktes M über der Horizontalen PS mit z, so hat man

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dz}{ds},$$

oder da nach der Gleichung $s^2 = 2lz$, $\frac{dz}{ds} = \frac{s}{l}$,

so ist

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s. \qquad (14)$$

Diese Gleichung ist bemerkenswerth, da sie auch die Bewegung eines einfachen Pendels mit kleinen Elongationen darstellt. Die Zeit, welche verfliesst, bis der Körper in S' ankommt,

$$\frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ist demnach unabhängig vom Bogen s. Von welchem Punkte auf dem Bogen AS aus die Bewegung auch beginnen mag, immer wird der Körper die gleiche Zeit brauchen, um nach S zu kommen. Die Bewegung auf der Cycloide ist daher vollkommen tautochron. Die Eigenschaft, welche wir beim Kreispendel für kleine Schwingungsweiten kennen lernten, bleibt hier, wie Huyghens zuerst erkannt hat, für jeden Ausschlag bestehen.

Aus der letzten Gleichung folgt, dass die Cycloide beim Steigen und beim Fallen tautochron ist. Ein ohne Geschwindigkeit in M abgehender Körper kommt nach S in einer von SM unabhängigen Zeit. In S besitzt er irgend eine Geschwindigkeit, die nur von

der Höhe z abhängt, und bewegt sich alsdann auf dem Bogen SB aufwärts in einer von dieser Geschwindigkeit unabhängigen, constanten Zeit.

Dieselbe Eigenschaft kommt allen Curven zu, die durch Auflegen der Cycloide auf einen Cylinder mit vertikaler Achse entstehen. In einer vertikalen Ebene giebt es ausser der Cycloide keine andere Tautochrone. Denn nehmen wir an, ein Körper steige von S nach irgend einem Punkte M auf einer Tautochrone in der constanten Zeit $\frac{t}{2}$. Construiren wir alsdann die Cycloide $\left(\text{vom Parameter } l = \frac{t^2 g}{\pi^2}\right)$, auf der ein Körper dieselbe Zeit $\frac{t}{2}$ braucht,

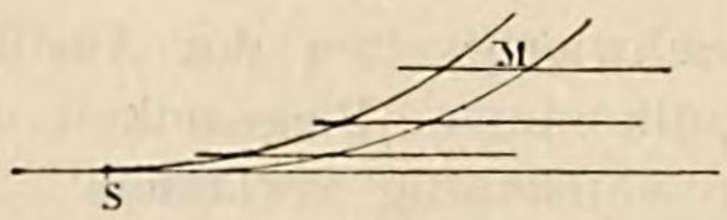


Fig. 132.

um von S nach M zu kommen, so wird in einer gewissen Entfernung von S eine der beiden Curven nothwendigerweise über der andern liegen, und die Tangenten in den in gleicher Höhe liegenden Punkten werden verschiedene Winkel gegen die Horizontale bilden. Da aber die beiden Körper in derselben Höhe auf beiden Curven mit gleicher Geschwindigkeit ankommen, und die zu durchlaufenden Elementarwege verschiedene Längen haben, so müssen die für die Bewegung nöthigen Zeiten ebenfalls verschieden sein. Die fragliche Curve wird also schneller oder langsamer durchlaufen als die Cycloide, d. h. sie ist nicht tautochron.

Man kann für die Bewegung auf der Cycloide leicht die soeben angestellte Überlegung über den Widerstand der Luft durchführen. Die für das Kreispendel mit kleinen Schwingungs-

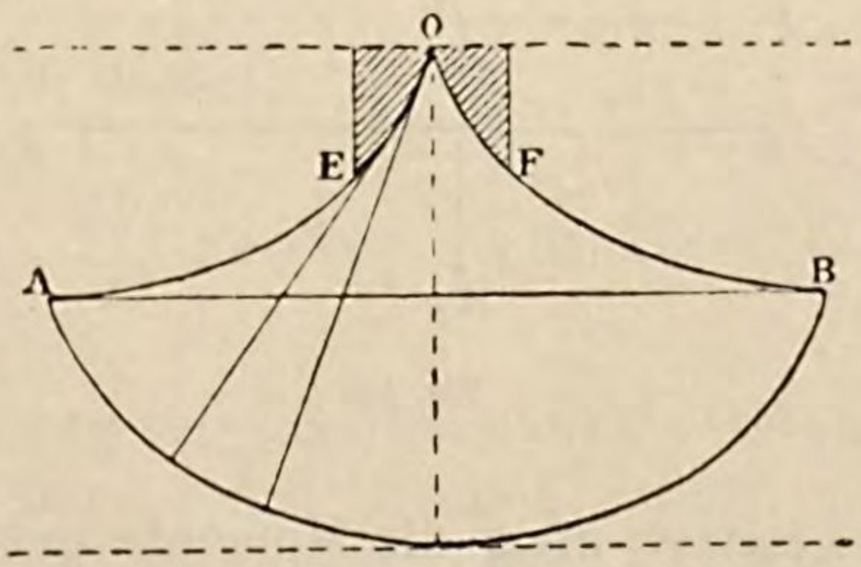


Fig. 133.

weiten aufgestellten Sätze sind hier für beliebige Bogen gültig. Der Tautochronismus bleibt in der Luft vollkommen bestehen.

Um die Bewegung eines Körpers auf einer Cycloide zu verwirklichen, genügt es nach dem, was wir oben gesehen haben, ihn an einem Faden von der Länge $l = 4r$ aufzuhängen und zu beiden Seiten des Aufhängepunktes zwei als gleiche Cycloidenbogen geschnittene Stücke OE und OF anzubringen. Man erhält auf diese Weise das von Huyghens construirte Cycloidenpendel. Die halbe Schwingungsdauer desselben

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ist vollkommen constant, wie gross auch die Amplitude gewählt wird. Wegen der Schwierigkeiten der Ausführung (Reibung am Aufhängepunkt, unvollkommene Biegsamkeit des Fadens) hat man jedoch dieses System vollständig verlassen.

87. Zusammengesetztes Pendel. — Jeder beliebige Körper bildet ein zusammengesetztes oder physisches Pendel, wenn er Schwingungen um eine horizontale Achse ausführen kann, welche nicht durch seinen Schwerpunkt geht.

Wir wählen diese feste Achse als z-Achse, die durch irgend einen Punkt O der Linie Oz in der Richtung der Schwere gezogene Senkrechte als x-Achse, und die auf der Ebene zOx senkrecht stehende Horizontale als y-Achse.

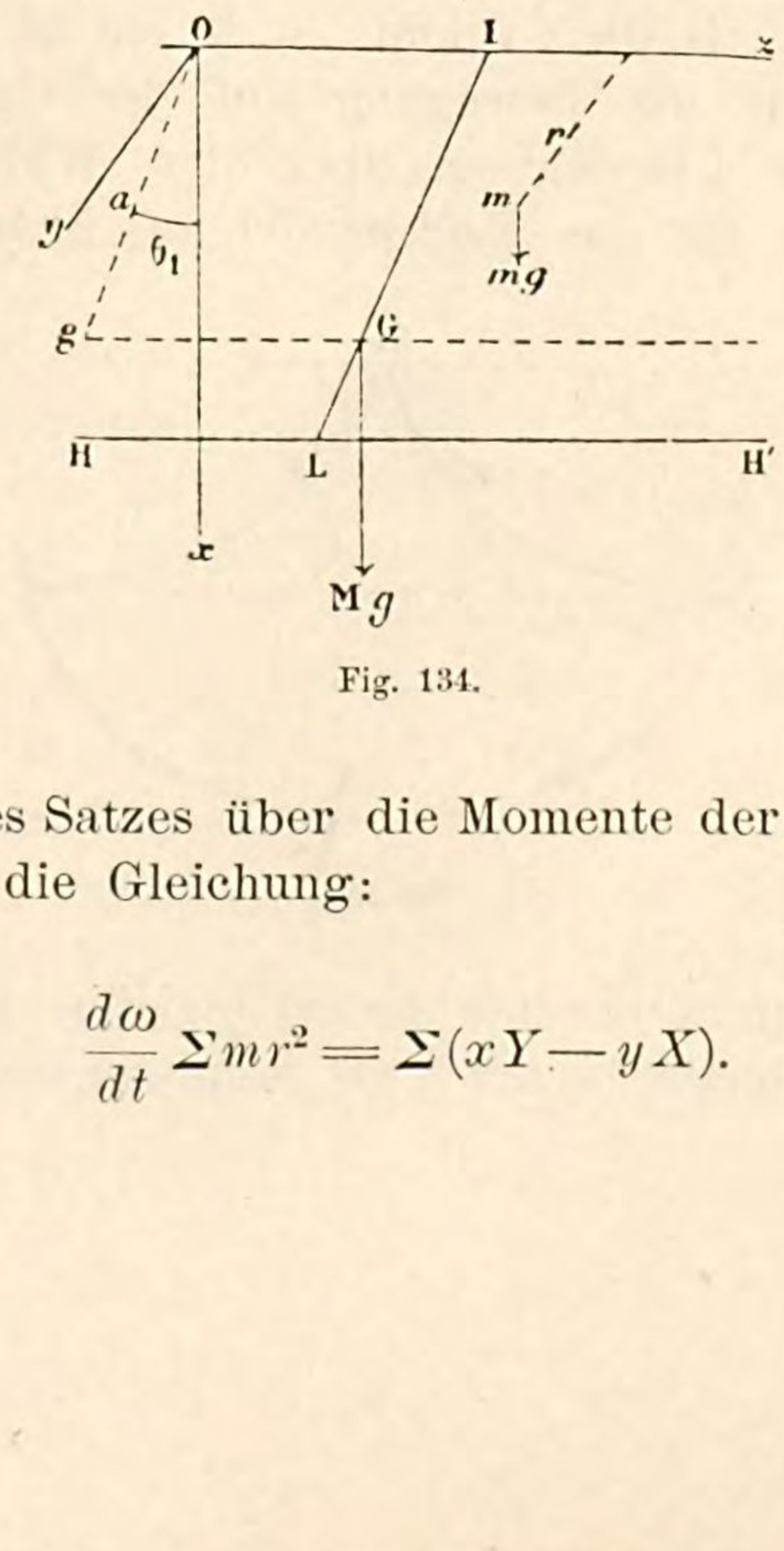


Fig. 134.

Mit Hülfe des Satzes über die Momente der Bewegungsgrössen (**59**) erhält man die Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} \Sigma m r^2 = \Sigma (xY - yX). \qquad (15)$$

Die einzige Kraft ist die Schwere, welche auf jedes Theilchen mit einer durch das Gewicht desselben bestimmten Kraft wirkt; für jede Masse m ist

$$X = mg,$$
$$Y = 0;$$

und die Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{d\omega}{dt} \Sigma m r^2 = - \Sigma m g y.$$

Es ist aber

$$\Sigma m g y = M g y_1,$$

wenn M die Gesammtmasse des Körpers und y_1 die Ordinate des Schwerpunktes G bedeutet; man kann die Gleichung also auch folgendermaassen schreiben:

$$\frac{d\omega}{dt} \Sigma m r^2 = - g M y_1. \qquad (16)$$

Es sei a die Entfernung des Schwerpunktes G von der Achse, und ϑ_1 der Winkel, den die Linie IG oder ihre Projection Og auf die xy-Ebene zu einer gegebenen Zeit mit der x-Achse bildet, dann ist:

$$y_1 = a \sin \vartheta_1,$$

und ferner, wie für jeden anderen Punkt des Körpers

$$\omega = \frac{d\vartheta_1}{dt}.$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} \Sigma m r^2 = - g M a \sin \vartheta_1, \qquad (17)$$

welche die Bewegung des Schwerpunktes bestimmt. Man kann sie in eine bequemere Form bringen, wenn man berücksichtigt (**60**), dass das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf die Achse Oz, $\Sigma m r^2$, gleich ist dem Trägheitsmoment in Bezug auf eine zu Oz parallele Achse Gg, die durch den Schwerpunkt geht, MK^2, vermehrt um Ma^2,

$$\Sigma m r^2 = M(K^2 + a^2).$$

Man bekommt also

$$\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} = -\frac{ga}{a^2+K^2}\sin\vartheta_1, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} = -\frac{g}{a+\frac{K^2}{a}}\sin\vartheta_1. \qquad (18)$$

Die Gleichung des einfachen Pendels (die sich aus dieser Gleichung unmittelbar ergiebt, wenn man $a = l$ und $K = 0$ setzt) ist:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta. \qquad (1)$$

Die Winkelbewegung des Pendels IG ist also die nämliche, wie diejenige eines einfachen Pendels von der Länge

$$l = a + \frac{K^2}{a}. \qquad (19)$$

Es existirt daher immer ein einfaches Pendel IL, das mit einem zusammengesetzten synchron schwingt; wenn l die Länge dieses einfachen Pendels bedeutet, so giebt die Formel

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4)$$

die halbe Schwingungsdauer des zusammengesetzten Pendels.[1])

Die Länge des einfachen synchronen Pendels $l = a + \frac{K^2}{a}$ ist immer grösser als a, im übrigen kann der eine oder der andere Theil der Summe bedeutend überwiegen: l kann kaum von a verschieden sein (eine kleine an einem langen Faden befestigte Kugel) oder aber sehr viel grösser sein als a. Dies ist der Fall, wenn a im Vergleich zu K^2 sehr klein ist, wie beim Metronom, welches ein sehr kurzes zusammengesetztes Pendel mit grosser Schwingungsdauer besitzt.

---

[1]) Man bezeichnet oft mit Schwingungsdauer die Zeit einer halben Periode der Pendelbewegung. Da man in allen anderen Gebieten der Physik, besonders in der Wellenlehre, stets mit der ganzen Periode als Einheit rechnet, wurde auch hier in der Mechanik die logische französische Ausdrucksweise beibehalten. — K.

Zieht man durch den Punkt L, dessen Lage durch die Gleichung $IL = a + \frac{K^2}{a}$ bestimmt ist, eine Parallele HH' zur *Drehungsachse* Oz, so haben alle auf dieser Parallelen gelegene Punkte des Körpers dieselbe Schwingungsdauer. Sie verhalten sich gerade so, als ob sie allein vorhanden und mit Oz durch einen undehnbaren, masselosen Faden verbunden wären. Die anderen Punkte des Körpers würden, im Falle sie allein vorhanden wären, zum Theil schneller, zum Theil langsamer schwingen, als sie das in Wirklichkeit bei der gemeinschaftlichen Bewegung zu thun gezwungen sind; nur die Bewegung der auf HH' gelegenen Punkte ist durch die Verbindung mit den anderen Punkten nicht geändert; HH' heisst die *Schwingungsachse*.

Aus dem Ausdruck für die Entfernung beider Achsen

$$l = a + \frac{K^2}{a}$$

folgt eine wichtige, von Mersenne (1646) und Huyghens[1]) entdeckte Eigenschaft: *Die Achsen sind gegenseitig vertauschbar.* Nehmen wir nämlich HH' als Drehungsachse, so ist die Länge des einfachen, mit dem zusammengesetzten synchronen, Pendels

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'},$$

wo a' die neue Entfernung LG des Schwerpunktes von der Drehungsachse HH' ist; da aber

$$a' = \frac{K^2}{a},$$

so folgt

$$l' = \frac{K^2}{a} + a = l.$$

Das in HH' aufgehängte Pendel hat also als Schwingungsachse Oz; die Länge und die Schwingungsdauer des einfachen synchronen Pendes sind demnach die gleichen geblieben.

Betrachtet man die vertikale, durch den Schwerpunkt senkrecht zu Oz gelegte Ebene, so nennt man oft den Schnittpunkt I dieser Ebene mit der Schwingungsachse *Aufhängungsmittelpunkt* und den auf derselben Ebene im Abstand $a + \frac{K^2}{a}$ vom Punkte I gelegenen Punkt L *Schwingungsmittelpunkt*; der eben aufgestellte

---

[1]) Huyghens, Horologium oscillatorium; Paris, 1673.

Satz lässt sich alsdann auch folgendermaassen fassen: Aufhängungsmittelpunkt und Schwingungsmittelpunkt sind vertauschbar.

Wählt man in einer durch den Schwerpunkt eines Körpers gelegten Ebene zwei Achsen derart, dass der abwechselnd an der einen oder anderen Achse aufgehängte Körper immer Schwingungen von derselben Dauer ausführt, so müssen die beiden Achsen entweder in gleicher Entfernung vom Schwerpunkte liegen, oder aber in Entfernungen, deren Product gleich K^2 ist.

Wenn nämlich

$$a + \frac{K^2}{a} = a' + \frac{K^2}{a'},$$

so hat man

$$a - a' = \frac{K^2 (a - a')}{a a'};$$

und ist $a - a' \gtrless 0$, so kann man beide Seiten der Gleichung durch $a - a'$ dividieren und erhält

$$a a' = K^2,$$

d. h. die Entfernung der beiden Achsen ist die Länge des dem zusammengesetzten synchronen mathematischen Pendels. Dieser Satz bietet ein praktisches Mittel, um jene Länge zu messen.

88. Anwendung des Pendels zur Messung von Kräften. — Die Gleichung

$$\frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} \Sigma m r^2 = - g M a \sin \vartheta_1 \qquad (17)$$

lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} = - \frac{F a}{Q} \sin \vartheta_1, \qquad (20)$$

wenn man $\Sigma m r^2 = Q$ und $M g = F$ setzt, so dass $F a$ das Moment der in Bezug auf die Drehungsachse wirkenden Kraft, und Q das Trägheitsmoment desselben Körpers in Bezug auf dieselbe Achse ist.

Vergleichen wir diese Gleichung mit derjenigen des mathematischen Pendels

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \vartheta, \qquad (1)$$

so sehen wir, dass das zusammengesetzte Pendel wie ein mathematisches schwingt, dessen Länge

$$l = \frac{Qg}{Fa} \tag{21}$$

ist; die halbe Schwingungsdauer beträgt also für kleine Amplituden

$$t = \pi \sqrt{\frac{Q}{Fa}}. \tag{22}$$

Diese Formel ist unmittelbar auf einen Körper anwendbar, der sehr kleine Schwingungen unter der Wirkung irgend einer Kraft ausführt, wenn diese eine oder beide der oben angegebenen Bedingungen erfüllt (**86**, pag. 200).

Daraus ergeben sich zwei Methoden, um eine Kraft zu messen:

1. Man lässt sie unmittelbar auf ein Pendel wirken und verlegt dabei den Ausgangspunkt der Kraft hinreichend weit, um sie nach Grösse und Richtung als constant annehmen zu können;

2. Man compensirt die Wirkung einer Kraft auf das Pendel durch diejenige einer andern Kraft $F\vartheta$, von welcher bekannt ist, dass sie sich dem Ausschlag proportional ändert und die daher mit Hülfe eines Pendels der Formel (22) gemäss direct messbar ist.

Beide Methoden werden in der Physik fortwährend angewendet.

89. Beweis des ersten Fallgesetzes. — Das unter dem Einfluss der Schwere schwingende Pendel giebt einen strengen Beweis des ersten Fallgesetzes, wonach die Schwere auf alle Körper gleichmässig wirkt. Hierfür genügt der Nachweis, dass die Schwingungsdauer vollkommen unabhängig von der Natur des als Pendel schwingenden Körpers ist, wie Formel (4) angiebt. Man behauptet sogar, dass Galilei durch die Beobachtung der gleichen Schwingungsdauer zweier gleich langer, aber verschieden schwerer Pendel zur Entdeckung dieses Grundgesetzes der Schwere geführt wurde. Newton stellte Versuche mit sehr verschiedenen Körpern an, die er nach einander in dasselbe durch einen Faden getragene Gefäss brachte. Bessel wiederholte diese Beobachtungen mit besseren Hülfsmitteln, und mit allen später aufgeführten Vorsichtsmaassregeln. Er verwendete ein Borda'sches Pendel mit Kugeln, welche aus den verschiedensten Körpern bestanden (Metalle, Elfenbein, Stein etc.), und fand, dass die Schwingungsdauer von einem Körper zum andern kaum um 0,000 01 verschieden war.[1])

---

[1]) Bessel, Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht. Abh. d. Berl. Acad. 1830.

90. Bestimmung von g. — Mit Hülfe des Pendels misst man, wie oben angegeben (**83**) und wie Huyghens[1]) zuerst gezeigt hat, die Grösse g am genauesten. Es ist klar, dass nach Formel (4) zur Messung des Werthes von g die Bestimmung der Schwingungsdauer und die Messung der Pendellänge ausreicht. Wenn die Schwingungsweite nicht klein genug gewählt wird, muss man ausserdem noch diese messen, um sie bei der Rechnung zu berücksichtigen.

91. Versuche von Borda. — Die ersten genauen Messungen von g mit Hülfe des Pendels verdankt man Borda[2]). Sein Pendel bestand im wesentlichen aus einer schweren, an einem sehr feinen Metalldrahte aufgehängten Platinkugel. Das obere Fadenende ist an einer Schneide befestigt, welche die Schwingungsachse des Pendels bildet und auf einer Stahlplatte aufliegt. Die ebenfalls stählerne Schneide trägt oben eine Schraube mit verstellbarer Mutter und unten eine Verlängerung, in welche man mit einer kleinen längs der Achse durchbohrten Schraube den durch einen Knoten gehaltenen Draht befestigt. Eine ähnliche Schraube verbindet das andere Drahtende mit einer sehr dünnen metallenen Schale, die sich vollkommen an die Platinkugel anlegt; die beiden mit einer dünnen Fettschicht überzogenen Berührungsflächen werden nur durch Adhäsion und Luftdruck zusammengehalten.

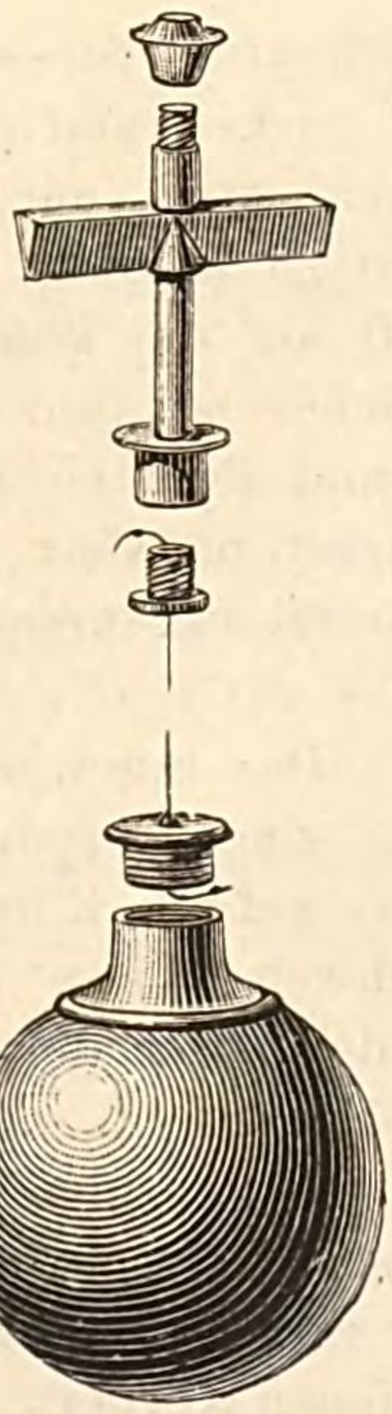


Fig. 135.

1. *Messung der Schwingungsdauer.* — Die nächstliegende Methode zur Bestimmung der Schwingungsdauer bestände darin, alle Durchgänge des Pendels durch eine gegebene Richtung (z. B. die Vertikale) während einer ziemlich langen, mit einem Chronometer gemessenen, Zeit zu zählen; der Quotient dieser Zeit und der Zahl aller Durchgänge würde die Schwingungsdauer mit um so grösserer Genauigkeit angeben, je länger man die Beobachtungszeit ausgedehnt hätte, weil dadurch der Einfluss, welchen die unvermeidlichen

---

[1]) Huyghens, Horologium oscillatorium etc. Paris 1673.

[2]) Borda, *Mémoire sur la mesure du pendule*, 1792, in *Mesure de la méridienne.*

Unsicherheiten der genauen Zeitpunkte des Anfangs und Schlusses der Beobachtung ausüben, abgeschwächt würde. Weil jedoch das Zählen einer sehr grossen Anzahl von Durchgängen ermüdend ist

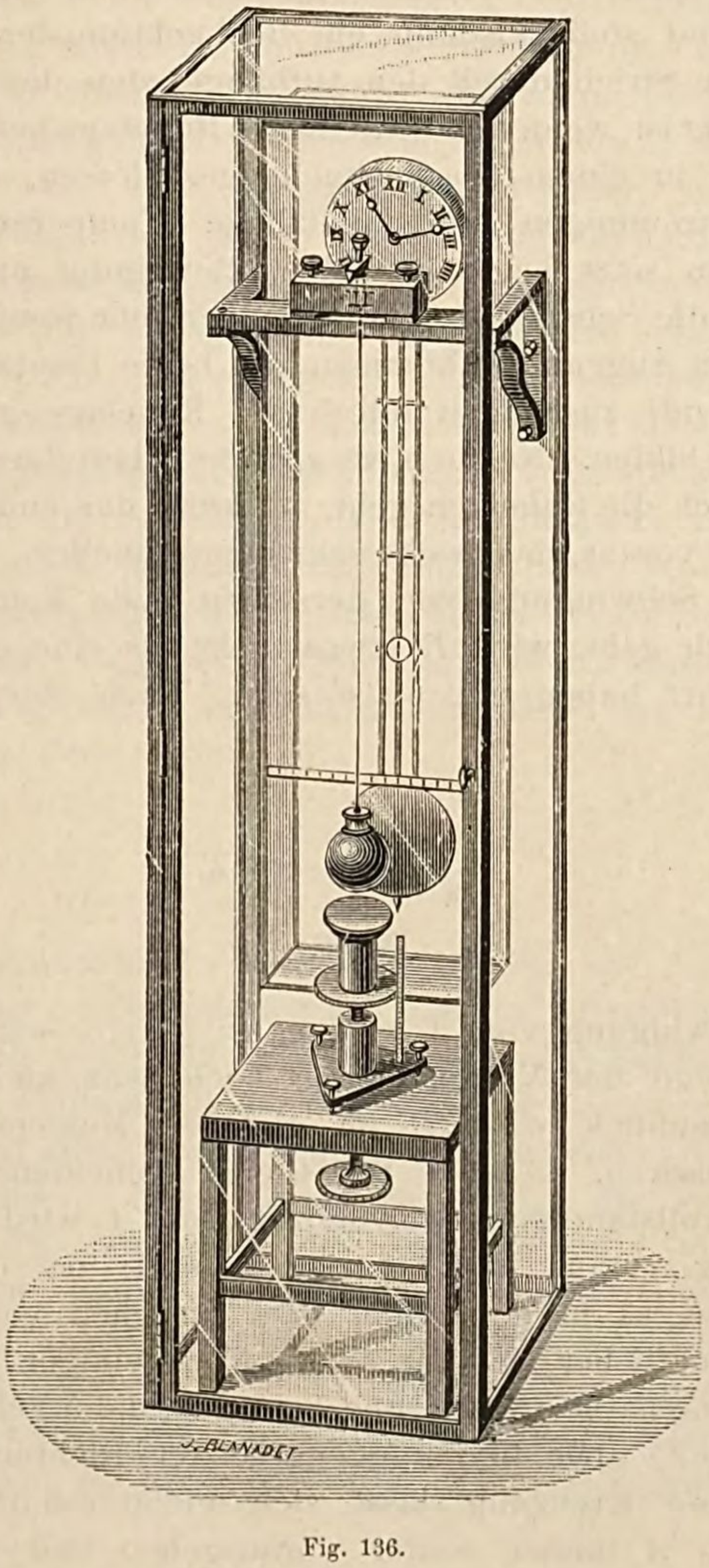


Fig. 136.

und leicht zu Irrthümern Veranlassung giebt, zieht man die von de Mairan[2]) angegebenen *Methode der Coincidenzen* vor.

---

[2]) De Mairan beobachtete die Zeiten, zu denen beide Pendel zusammen umkehrten; die heute angewendete Methode der Coincidenz wurde von Boscovich (1785) angegeben. — K.

Man hängt hinter dem Pendel eine Uhr auf, deren Pendel sehr nahe dieselbe Schwingungsdauer besitzt, wie das zu untersuchende. An diesem Uhrpendel befestigt man einen kleinen Kreis aus weissem Papier, auf welchem ein senkrechter schwarzer Strich gezogen ist und stellt alsdann ein Beobachtungsfernrohr so auf, dass darin der Strich durch den Aufhängefaden des Hauptpendels gerade verdeckt ist, wenn sich beide in der Ruhelage befinden. Pendel und Uhr sind in einem Glaskasten eingeschlossen, der sie gegen äussere Luftströmungen und plötzliche Temperaturänderungen schützt.[1]) Man setzt beide Pendel in Bewegung und wenn, wie angenommen, die Schwingungsdauer beider sehr wenig verschieden ist, so wird ein Augenblick kommen, wo beide Pendel, im gleichen Sinn schwingend, zusammen durch die Ruhelage gehen, und so eine *Coincidenz* bilden. Nehmen wir z. B. an, dass das eine Pendel A (Fig. 137) durch die Ruhelage geht, während das andere B in b ist, und setzen wir voraus, das zweite schwinge schneller. Wenn A nach einer ganzen Schwingung von derselben Seite kommend wieder durch das Loth geht, wird B etwas mehr als eine ganze Schwingung ausgeführt haben und in b' sein. Nach einer neuen voll-

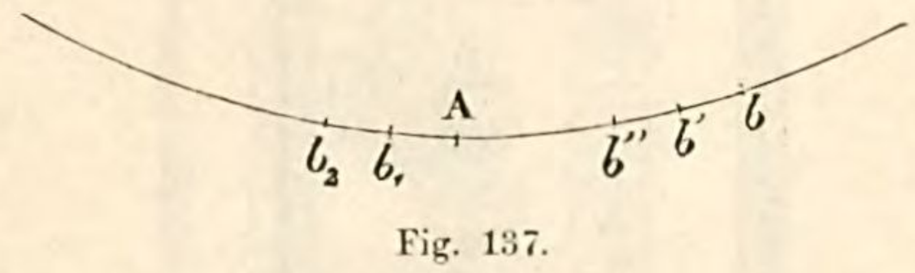


Fig. 137.

ständigen Schwingung von A wird es in b'' etc. sein. Die Bogen bb', $b'b''$, ... sind der Voraussetzung nach sehr klein. In einem gewissen Augenblick wird B im gleichen Momente mit A die Senkrechte passiren, d. h. es findet eine Coincidenz statt. Nach einer neuen vollständigen Schwingung von A wird B um einen kleinen Betrag voraus und etwa in b_1 sein; bei der folgenden Schwingung ist es in b_2... und das Vorgehen von B gegen A wird immer deutlicher sichtbar sein. Nach einiger Zeit wird der Unterschied eine halbe Schwingung betragen, dann gehen die Pendel zu gleicher Zeit, aber in entgegengesetzter Richtung, durch die Ruhelage; diese Kreuzung lässt sich nicht scharf beobachten. B wird gegen A immer weiter vorausgehen und wenn es eine ganze Schwingungsdauer vorgegangen ist, wird es wieder zu gleicher Zeit mit A und in derselben Richtung die Ruhelage passiren; es entsteht eine neue Coincidenz. Es möge nun A das Uhrpendel und

---

[1]) In Figur 136 ist die Uhr noch in einem zweiten Glaskasten eingeschlossen, wie es später Biot anordnete (**92**).

B das Borda'sche Pendel sein. Da das erstere seine Schwingungen selbst zählt, so genügt es, diese um eine zu vermehren, um die Anzahl der Schwingungen des Borda'schen Pendels zu bekommen. Man beobachtet nun bei zwei Pendeln von nahe gleicher Schwingungsdauer eine Reihe von Coincidenzen, wovon jede anzeigt, dass das schnellere Pendel um eine volle Schwingung vorgegangen ist. Wenn der Unterschied in der Schwingungsdauer ziemlich gross ist, so kann auch überhaupt keine Coincidenz eintreten; setzen wir aber voraus, dass eine erste Coincidenz stattfindet, die dann eine unbegrenzte Folge von neuen bedingt, und dass p der Unterschied der Schwingungszahlen beider Pendel zwischen zwei Coincidenzen ist, so wird p nur in speciellen Fällen gleich eins sein.[1]) Aber unter den wirklich vorkommenden Versuchsbedingungen mit dem Borda'schen Pendel wird sogar bei mehreren auf einander folgenden Schwingungen der Eindruck einer Coincidenz entstehen, unter denen man natürlich die mittelste, als der wirklichen Coincidenz am nächsten kommend, wählen wird. Durch öftere Wiederholung der Beobachtungen ergiebt sich aus deren Mittel die Zahl n der Secunden des Uhrpendels, während welcher das Borda'sche Pendel $n+1$ Schwingungen gemacht hat, mit grosser Genauigkeit; die Schwingungsdauer ist dann

$$t = \frac{n}{n+1}\ ^{2})$$

2. *Längenmessung des Pendels.* — Bevor wir die Methode der Längenmessung auseinandersetzen, müssen wir die geistreiche Art angeben, durch welche Borda den Einfluss der Schneide beseitigte. Man reguliert nämlich mit der oberen Schraube die Schneide derart, dass sie für sich allein die gleiche Schwingungsdauer hat, wie mit dem Pendel zusammen. Unter dieser Bedingung übt sie auch keinen Einfluss auf die Bewegung des Pendels aus. Borda bestätigte diese Thatsache, indem er n nacheinander unter Anwendung zweier Schneiden von sehr verschiedenem Gewicht maass, welche obige Bedingung erfüllten; er fand in beiden Fällen identische Zahlen. Man braucht daher nur das aus Faden, Kugelschale und Kugel gebildete System zu berücksichtigen, und die Aufgabe beschränkt

---

[1]) Bichat, Journal de physique III, 369; 1875.

[2]) Wenn das Borda'sche Pendel langsamer ginge als das Uhrpendel, so wäre eine Schwingungsdauer $t = \frac{n}{n-1}$, wenn n auch hier die Anzahl der vom Uhrpendel zwischen zwei Coincidenzen ausgeführten Secundenschläge bedeutet.

sich dadurch auf die Messung der Entfernung a zwischen Schwerpunkt und Schwingungsachse und die des Trägheitsmomentes MK^2 in Bezug auf eine zur Aufhängeachse parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse. Zur Messung der Entfernung a, stellt man unter dem Pendel eine kleine gut horizontale ebene Stahlfläche auf, die durch eine Mikrometerschraube gehoben und gesenkt werden kann, so dass sie die Kugel berührt, ohne dieselbe zu heben. Man schraubt die Fläche langsam in die Höhe, bis das Licht einer in einiger Entfernung hinter dem Pendel aufgestellten Kerze im Berührungspunkt verschwindet; lässt man dann das Pendel schwingen, so darf man nur ein leises Anstreifen gegen die Fläche hören, wenn die gesuchte Stellung nicht überschritten ist. Darauf wird der Schutzkasten des Apparates geschlossen, weil die Nähe des Beobachters die Temperatur etwas beeinflusst hat. Bleibt dann der Apparat zur Herstellung der normalen Temperatur, etwa 15 Minuten sich selbst überlassen, so wird man meistens finden, dass die Berührung nicht mehr stattfindet; die erneute Einstellung wird nur kurze Zeit beanspruchen. Eine nochmalige Prüfung braucht noch weniger Zeit, und man erhält nach mehreren Versuchen eine bleibende Berührung. Weicht die jetzt beobachtete Temperatur von der mittleren Temperatur ab, welche der Schutzkasten während der Coincidenzbeobachtungen besass, so giebt eine leicht anzubringende Correction die genaue Länge des Systemes während der Messungen. An die Stelle des Pendels wird dann ein getheilter Stab gebracht, der ebenfalls mit einer Schneide aufgehängt ist und an seinem unteren Ende eine bewegliche Zunge in Form eines Nonius trägt. Ist die Zunge mit der Stahlfläche in Berührung gebracht, so liest man am Nonius die Entfernung dieser Fläche von der Aufhängefläche ab und erhält damit die um den Durchmesser der Kugel vermehrte Fadenlänge. Darauf setzt man die Kugel auf die Stahlfläche, bringt die Zunge in Berührung mit dem oberen Ende des Kugeldurchmessers und liest wieder ab. Der Unterschied beider Ablesungen giebt den Durchmesser der Kugel. Aus der nunmehr bekannten Fadenlänge ergiebt sich durch Zufügung des Kugelradius r auch die Länge a.

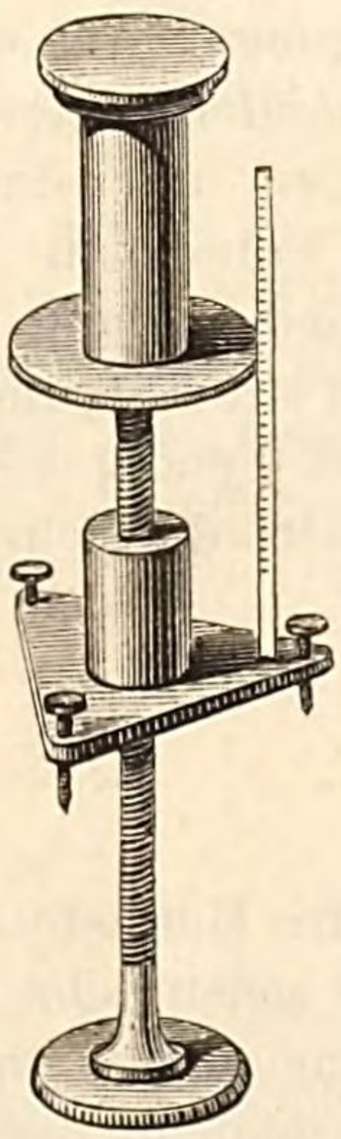


Fig. 138.

Das Trägheitsmoment des Systems setzt sich zusammen: 1. aus dem Trägheitsmoment der Kugel (**60**), $\frac{2}{5}mr^2$, wo m die Masse

der Kugel ist; 2. aus dem leicht zu berechnenden Trägheitsmoment des Fadens; 3. aus dem Trägheitsmoment der Kugelschale, deren Bestimmung ziemliche Schwierigkeiten bietet und etwas unsicher bleibt. Man kann nämlich hierbei nicht wie für die Kugel oder den Faden die Homogenität prüfen, ohne welche die Berechnung hinfällig wird. Für den Faden genügt es, ihn entzwei zu schneiden und jede Hälfte zu wägen; die beiden Gewichte müssen gleich sein. Die Fehler der Homogenität der Kugel sind durch Änderung der Aufhängestelle unschädlich zu machen, was sich bei der gewählten Verbindungsart ohne weiteres ausführen lässt. Es ist nothwendig, im Laufe jeder Versuchsreihe diese Vorsichtsmaassregel anzuwenden, indem man z. B. die Beobachtungen in zwei Gruppen theilt, bei denen die Kugel an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten befestigt ist.

Bei Berücksichtigung der Kugel allein wäre das Trägheitsmoment des Pendels

$$MK^2 = \frac{2}{5} m r^2,$$

und seine Länge l

$$l = a + \frac{K^2}{a} = (\lambda + r) + \frac{\frac{2}{5} r^2}{\lambda + r}.$$

Bei Berücksichtigung des Fadens und der Kugelschale muss an diesem angenäherten Werth eine kleine Correction $-Q$ angebracht werden, die wir als berechnet annehmen[1]), so dass die genaue Länge des dem physischen Pendel synchronen mathematischen Pendels folgendermaassen lautet:

$$l = \lambda + r + \frac{\frac{2}{5} r^2}{\lambda + r} - Q.$$

3. *Messung und Einfluss der Schwingungsweite.* — Man muss endlich auch die Ausschlagsweite der Schwingungen berücksichtigen, da dieselben nicht unendlich klein sind. Weil die beschriebenen Bogen aber auch keine beträchtliche Grösse haben, so genügt die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{a^2}{16}\right) \qquad (8)$$

---

[1]) Siehe Biot, *Astronomie physique*, III; Additions, 176; 1811.

um bei bekanntem α mit genügender Genauigkeit ihre Dauer darzustellen. Zu diesem Zwecke wird hinter dem Pendel eine wagrechte gleichmässige Teilung angebracht und ihr Abstand vom Aufhängemittelpunkt gemessen. Die Beobachtung der Umkehrpunkte des Pendels ergiebt den entsprechenden Winkel α.

Ist die ganze Versuchsdauer kurz, so misst man α am Anfang und am Ende der Beobachtungen und bringt die Correction mit dem Mittelwerth $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ an.

Dauert der Versuch sehr lange, so ist die Correction nicht mehr so einfach zu erhalten. Man geht dann von der durch Borda nachgewiesenen Thatsache aus, dass die Weite der Schwingungsbogen in geometrischem Verhältniss abnimmt, wenn die Zeit in arithmetischer Reihe fortschreitet, und berechnet die Correction wegen der Schwingungsweite nach Biots Vorgang in folgender Weise. Es seien

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n$$

die Schwingungsweiten, und

$$t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n$$

die auf einander folgenden Schwingungsdauern des Pendels; alsdann ist

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_1^2}{16}\right),$$

$$t_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_2^2}{16}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_n = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_n^2}{16}\right).$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen erhält man, wenn T die Gesammtdauer des Versuches und n die Anzahl aller Halbschwingungen des Pendels (n ist durch die Coincidenzmethode gegeben) bedeuten

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(n + \frac{\alpha_1^2}{16} + \frac{\alpha_2^2}{16} + \ldots\frac{\alpha_n^2}{16}\right).$$

Nach dem Borda'schen Gesetz ist aber

$$\alpha_2 = k\alpha_1,$$
$$\alpha_3 = k^2\alpha_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n = k^{n-1}\alpha_1.$$

Man hat daher, wenn Σ die Summe aller Correctionsglieder bezeichnet:

$$\Sigma = \frac{1}{16}(a_1{}^2 + k^2 a_1{}^2 + \ldots + k^{2(n-1)} a_1{}^2)$$

$$= \frac{1}{16} a_1{}^2 \frac{k^{2n} - 1}{k^2 - 1};$$

es ist aber

$$k = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

oder, da n sehr gross ist, mit grosser Annäherung

$$k = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}};$$

und folglich

$$\Sigma = \frac{1}{16} a_1{}^2 \frac{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{1}{16} \frac{a_n{}^2 - a_1{}^2}{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{2}{n}} - 1},$$

oder nach Entwicklung des Nenners nach der bekannten Formel für a^x unter Fortlassung der Glieder zweiten und höheren Grades,

$$\Sigma = \frac{1}{16} \frac{a^2{}_n - a_1{}^2}{\left[1 + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{M} \cdot \log \frac{a_n}{a_1}\right] - 1},$$

worin $\frac{1}{M}$ den reciproken Modul der Briggs'schen Logarithmen (2,302 585) bedeutet.

Es ist also jetzt:

$$\Sigma = \frac{n}{32} \frac{(a_n + a_1)\ (a_n - a_1)}{\frac{1}{M} \log \frac{a_n}{a_1}},$$

und daher:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\, n \left(1 + \frac{1}{32} \frac{(a_n + a_1)\ (a_n - a_1)}{\frac{1}{M} \log \frac{a_n}{a_1}}\right),$$

oder, wenn t wie gewöhnlich die Dauer einer halben Schwingung bedeutet,

$$t = \frac{T}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{32} \frac{(a_n + a_1)\ (a_n - a_1)}{\frac{1}{M} \log \frac{a_n}{a_1}} \right).$$

Diese Formel wurde von Borda ohne Ableitung gegeben; sie gestattet die Berechnung von g.

Resultate. — Die von Borda gemeinschaftlich mit Cassini in der Sternwarte von Paris angestellten und mit der unvollständigen Correction von Bouguer ausgerechneten Messungen geben:

$$g = 9{,}808\ 82 \text{ m.}$$

Oft definirt man die Intensität der Schwere an einem Orte durch die Länge des Pendels, welches dort Secunden schlägt. Da diese Länge

$$L = \frac{g}{\pi^2}$$

der Beschleunigung g proportional ist, kann sie in der That als Maass von g dienen.

Die Länge des Secundenpendels in der Luft beträgt nach Borda in Paris

$$L = 993{,}827 \text{ mm.}^{1})$$

92. Versuche von Biot. — Biot[2]) nahm diese Messungen wieder auf und bestimmte mit Arago, Mathieu und Bouvard an verschiedenen Punkten des Meridians Formentera-Dunkerque die Grösse g. In Paris wurde als Länge des Secundenpendels in der Luft gefunden:

$$L = 993{,}845 \text{ mm.}$$

Mit Ausnahme einiger kleiner Verbesserungen (Anwendung von Achatplatten, Ersatz des eisernen Aufhängefadens des

---

[1]) Die erste Messung der Länge des Secundenpendels führte Mersenne (1644) aus, später unternahm Riccioli (1647) eine zweite; Picard verwendete zuerst (1669) auf die Messung grössere Sorgfalt. — K.

[2]) Biot, loc. cit.

Pendels durch einen unmagnetischen, Trennung des Schutzkastens in zwei Theile, um die durch die Luft übertragenen Störungen der beiden Pendel zu umgehen) wendete Biot die Methode von Borda an und beobachtete mit dessen Platinkugel. Er richtete sein Augenmerk besonders auf die genaue Messung der Länge. Dabei bediente er sich statt des mit Nonius versehenen Maasstabes eines Comparators. Nachdem die Berührung zwischen Zunge und Stahlplättchen hergestellt und geprüft war, stellte er mittelst einer Schraube die Zunge fest, legte das Ganze unter den Comparator und maass die Entfernung zwischen der oberen Schneide des Maassstabes[1]) und dem unteren Ende der Zunge. Auf diese Weise konnte Biot auch die Länge des Pendels von 4 Metern, die Borda dem seinen gegeben hatte, auf 75 cm vermindern. Diese kleinere Länge war nothwendig, um das Pendel zum Reise-Instrument tauglich zu machen.

93. Reversionspendel von Kater. — Das Kater'sche[2]) Reversionspendel ist als Reise-Instrument viel bequemer. Seine Construction beruht auf der Vertauschbarkeit des Aufhänge- und des Schwingungsmittelpunktes (**87**), die schon Bohnenberger[3]) zu benützen versuchte, um durch Probiren die Pendellänge zu bestimmen.[4]) Auf einen Messingstab, der an einem Ende eine schwere Linse trägt, setzt man zwei gegen einander gerichtete Schneiden in solcher Lage, dass das Pendel um jede der Schneiden ungefähr gleiche Schwingungsdauer hat. Dann handelt es sich nur noch darum, die Gleichheit streng herzustellen, damit die Entfernung

---

[1]) Obwohl Borda mit Recht die Aufhängung mittels einer Schneide statt der Klemmaufhängung wählte, „weil bei dieser immer einige Unsicherheit über den wahren Punkt herrscht, um den die Schwingungen ausgeführt werden", so kann doch auch die Schneide niemals scharf genug sein um eine mathematische Linie zu bilden. Sie muss vielmehr als ein kleiner Cylinder angesehen werden, dessen Achse höher liegt als die Berührungslinie, so dass es scheint, als müsse der Radius dieses Cylinders zur Länge des Pendels, wie man sie gewöhnlich misst, hinzugefügt werden. Laplace hat den Fall berechnet und gefunden, dass dieser Radius im Gegentheil von der beobachteten Länge abzuziehen ist. (*Mémoires de l'Académie des sciences*, 1, III; 1816). Jedenfalls bildet dieser Umstand eine für sehr kurze Pendel nicht zu vernachlässigende Fehlerquelle.

[2]) Kater, Philosophical Transactions; 1818.

[3]) Bohnenberger, Lehrbuch der Astronomie; 1811.

[4]) De Prony hatte die Construction eines derartigen Pendels schon 1792 vorgeschlagen. — K.

der beiden Schneiden die Länge des synchronen mathematischen Pendels liefert. Der Schwerpunkt des Ganzen ist in Folge der Linse sicher nicht in der Mitte jener Entfernung. Auf dem Messingstab ist zwischen den beiden Schneiden ein aus zwei Theilen bestehender Schlitten angebracht, von denen der schwerere Theil mit einer Druckschraube versehen ist, während der leichtere durch eine Regulirschraube mit dem schwereren in Verbindung steht. Stellt man zuerst den ganzen Schlitten nahezu richtig ein und hebt oder senkt dann, während der grössere Theil mit der Druck schraube festgeklemmt bleibt, den kleineren vorsichtig solange, bis die Schwingungsdauer um eine der beiden Schneiden genau so gross ist wie um die andere, so ist l genau bekannt. Um t zu messen wird man immer die Coincidenzmethode verwenden. Zu diesem Zwecke ist an jedem Ende des Pendels eine lange feine Nadel angebracht, die α auf die gewöhnliche Weise zu messen erlaubt.

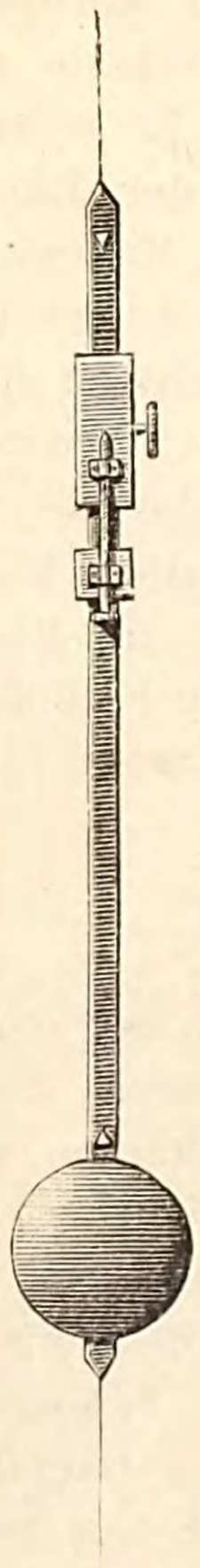


Fig. 139.

Wenn wir aus der Londoner Messung von Kater und den von ihm mit seinem Apparat unter verschiedenen Breiten gefundenen Zahlen die Länge des Secundenpendels in der Luft für Paris ableiten, so finden wir

$$L = 993{,}867 \text{ mm}.$$

94. Vergleichung der verschiedenen Messungsresultate von g. — Die Zusammenstellung der Werthe von Borda, Biot und Kater ergiebt:

Borda	$L =$	993,827	mm
Biot	„	„ 845	„
Kater	„	„ 867	„

Die Übereinstimmung ist bemerkenswerth; allerdings ist noch keine der Zahlen wegen des Einflusses der Luft corrigirt.

Einfluss der Luft. — Dieser Einfluss ist vielseitig:

1. Die Luft wirkt auf das Pendel, wie auf jeden anderen Körper, durch den Auftrieb, welcher gleich der Grösse des Gewichtes der verdrängten Luft ist. Es mögen P das Gewicht des

Pendes, D die Dichte der Masse, aus dem es besteht, a die Dichte der Luft sein, dann ist

$$P\left(1 - \frac{a}{D}\right)$$

die wirklich auf das in der Luft befindliche Pendel wirkende Kraft.

Nennen wir g die in der Luft beobachtete Beschleunigung, g' die im leeren Raum, so ist

$$\frac{g}{g'} = \frac{P\left(1 - \frac{a}{D}\right)}{P};$$

daraus folgt:

$$g' = g\,\frac{1}{1 - \frac{a}{D}};$$

diese Correction rührt von Bouguer[1]) her.

Wenn das Pendel in Ruhe wäre, würde die Luft keine andere Wirkung darauf ausüben. Aber das Pendel ist in Bewegung, und

2. Die Luft leistet dieser Bewegung Widerstand. Wir haben den Einfluss dieses Widerstandes (**86**), der im allgemeinen vollkommen zu vernachlässigen ist, ausgerechnet.

3. Die Luft wird durch das Pendel mehr oder weniger mitgenommen. Bessel[2]) hat zuerst gezeigt, dass man darauf Rücksicht nehmen muss; er fand durch Beobachtungen mit zwei Pendeln von gleichem Volumen, aber verschiedener Masse, dass man die Correction wegen des Gewichtsverlustes in der Luft fast verdoppeln muss. Etwas später stellte Sabine[3]) in England Beobachtungen bei verschiedenen Drucken der das Pendel umgebenden Luft an. Seine Messungen bestätigten die von Bessel aufgestellte Correction, nur ergaben sie einen etwas kleineren Werth (1,66 statt 1,95) des Factors, mit dem man die Correction wegen des Gewichtsverlustes in der Ruhe multipliciren muss, um die Correction während der Bewegung zu erhalten. In seinem „Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant" zeigte Poisson,[4]) dass man in der That dem Einfluss der mitgerissenen Luft Rechnung tragen kann, indem man den Ausdruck $P\,\frac{a}{D}$,[5]) der den

---

[1]) Bouguer stellte zuerst die Formel auf, aber Newton hatte schon den Einfluss des Luftgewichtes auf das Pendel erkannt. — K.

[2]) Bessel, Abhandlungen der Berliner Academie; 1828.

[3]) Sabine, Phil. Trans.; 1829.

[4]) Poisson, Mémoires de l'Académie des sciences, XI; 1832.

[5]) Man sieht, dass es in jeder Beziehung vortheilhaft ist, wenn das Verhältnis $\frac{a}{D}$ möglichst klein ist; bei Anwendung von Platin wird dieses Verhältniss gleich 0,000060.

Gewichtsverlust im Zustand der Ruhe ausdrückt, mit einem Factor f multiplicirt, der vom Schwingungskörper und vom umgebenden Mittel unabhängig ist, aber von der Form des Pendels abhängt. Poisson giebt diesem Factor für das Pendel von Borda den Werth $\frac{3}{2}$; die freilich nur rohen Werthe mit einem nach einander in Wasser und Luft schwingenden Pendel bestätigen diesen Werth von f.

4. Die Luft wirkt endlich durch ihre *Viscosität*. Stokes[1]) gab Formeln an, die diesen neuen Einfluss berücksichtigen; nimmt man für die Viscosität den von Maxwell gegebenen Werth, so kann man die Wirkung annähernd berechnen, welche auf ein aus Faden und Kugel bestehendes Pendel, so wie es Borda anwendete, ausgeübt wird.

Aus all dem geht hervor, bemerkt Faye,[2]) dass man seit den Beobachtungen von Bessel die Versuche hätte im leeren Raum anstellen müssen. „Ausserdem hat man zuletzt noch gefunden, dass die Lager eines schweren Pendels von diesem mitbewegt werden, so dass die Schwere nicht nur dazu dient die Schwingungen des Pendels zu unterhalten, sondern dass ein merklicher Theil der Kraft zu den Schwingungen der Lager verbraucht wird. Man hätte daraus schliessen sollen, dass man ein recht leichtes Pendel verwenden muss.“[3])

Man hat aber zur Überwindung des Luftwiderstandes den Pendeln gerade im Gegentheil eine recht grosse Masse gegeben und die Festigkeit der Aufhängevorrichtung verringert, um das Instrument leicht transportabel zu machen. In Folge dessen wurde der zweite bei den Borda'schen Versuchen zu vernachlässigende Störungsgrund immer merkbarer (die von Borda verwendeten Unterstützungen waren nach seiner Beschreibung recht fest; andererseits wächst die wegen der Schwingungen der Lager nöthige Correction umgekehrt mit der Pendellänge, das Borda'sche war aber sehr lang) und konnte den Beobachtern nicht mehr entgehen. Hirsch machte diese Bewegung der Unterlage durch bedeutende optische Vergrösserung deutlich sichtbar, und Plantamour stellte mit Hülfe desselben Verfahrens beweiskräftige Versuche an; Célerier

---

[1]) Stokes, Transactions of the Cambridge philosophical society, IX; 1851.

[2]) Faye, Comptes Rendus, XC, 1463; 1880.

[3]) Zum ersten Mal wurde dieser störende Einfluss wohl von Huyghens (1665) beobachtet; er fand, dass zwei Pendel von nahe gleicher Schwingungsdauer, die auf demselben Lager befestigt sind, im gleichen Tacte schwingen. Die Erklärung dieser Erscheinung gaben aber erst Ellicott (1739), Savart (1839), Poisson (1830), Resal (1873). — K.

und Peirce endlich gelangten unabhängig von einander durch theoretische Betrachtungen zu einer praktischen Correctionsformel.

Peirce[1]) nahm die vorzüglichen Versuche von Borda und Biot wieder auf, um die heute durch die Theorie geforderten Correctionen wegen des Gewichtes und der Viscosität der Luft und wegen des (in den Biot'schen Versuchen merkbaren) Mitschwingens der Lagerpfeiler anzubringen. Er musste die Versuche von Kater, dessen Pendel eine Reduction auf den leeren Raum wegen seiner unregelmässigen Form nicht zuliess, unberücksichtigt lassen. Dagegen hat er eine neue Bestimmung unternommen, so dass wir, wenn wir sie auf gleiche Linie mit den corrigirten Resultaten von Borda und Biot stellen, die Zusammenstellung bekommen:

	Länge des Sec.-Pendels in Paris	Höhe
Borda	$L = 993{,}918$ mm	67 m
Biot	„ „ 913 „	74 „
Peirce	„ „ 917 „	74 „

Das Mittel

$$L = 993{,}92 \text{ mm}$$

giebt die Länge des Secundenpendels im leeren Raume für Paris in der Höhe von etwa 72 m über dem Meere auf $\frac{1}{100}$ mm sicher an.

Werth von g in Paris. — Aus der angegebenen Pendellänge ergiebt sich für Paris $g = \pi^2 \,.\, 0{,}99392 = 9{,}8096$ m, oder in C.-G.-S.-Einheiten

$$g = 980{,}96.\ ^{2})$$

Werth von g an verschiedenen Punkten der Erde und in Meereshöhe. — Wenn man die Werthe von g an verschiedenen Stellen der Erde mit einander vergleichen will, so genügt es nicht, sie auf den leeren Raum zu reduciren. Man muss dieselben ausserdem auf Meereshöhe beziehen, weil g, wie wir später sehen werden (**103**), mit der Höhe abnimmt.

Man hat die auf Meereshöhe reducirten Werthe von g in eine Formel zusammenzufassen gesucht. Aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz und der Rotation der Erde geht hervor, dass die Beschleunigung g_λ in irgend einer Breite λ zu der Beschleunigung g_{45} unter 45^0 Breite in der Beziehung steht:

$$g_\lambda = g_{45}\,(1 - a \cos 2\lambda).$$

---

[1]) Peirce, C. R., XC, 1401; 1880.

[2]) Defforges erhielt 1889 für Paris 980, 96; Bessel fand für Königsberg ($55^0\,42' = \lambda$) im Niveau der Ostsee $g = 981{,}44$; für Berlin ($\lambda = 52^0\,30'$) $g = 981{,}28$. — K.

Die Beobachtungen bestätigen im allgemeinen diese Beziehung recht gut und geben[1])

$$a = 0{,}00259,$$

und

$$g_{45} = 980{,}61.$$

---

[1]) Die Länge $l\varphi$ des Secundenpendels für einen Ort von der Breite φ wird nach Newton gegeben durch

$$l_\varphi = l_0\ (1 + m \sin^2 \varphi)$$
$$l_\varphi = l_{45}\ (1 - m' \cos 2\varphi).$$

Darin bedeuten m und m' $\left(m' = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{m}}{1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{m}} \right)$ durch die Beobachtung zu ermittelnde Constante, l_0 und l_{45} die Pendellänge am Äquator und unter 45° Breite. C. Wolf giebt in der Einleitung zu der Collection de Mémoires relatifs à la Physique, Band IV, eine Zusammenstellung der Werthe von m, m' und l_0; dieselben sind von den in erster Colonne aufgeführten Autoren aus allen zu ihrer Zeit bekannten Beobachtungen gerechnet.

		m	m'	l_0
Newton	1713	0,0043667	0,002179	991,352 mm
Maupertuis . .	1738	49369	2462	991,076
Laplace	1799	5690	2838	990,631
Mathieu	1816	55174	2751	990,744
Kater	1819	55585	2772	990,769
Bowditch . . .	1818	51797	2583	991,000
Biot	1821	53605	2683	990,902
Sabine	1825	51941	2590	990,981
Airy	1826	51329	2560	991,017
E. Schmidt . .	1829	52004	2593	990,982
Baily	1834	51449	2566	991,013
Hansteen . . .	1837	51956	2591	991,013
Borenius . . .	1841—42	51624	2574	991,016
Saigey	1842	52327	2610	991,072
Pouillet	1853	50674	2527	991,026
Von Paucker . .	1854	52091	2598	991,013
Ph. Fischer . .	1868	51851	2596	991,011
Listing	1878	52015	2594	990,995
Savitch	1879	51375	2562	991,031
Clarke	1880	52286	2607	991,031
Peirce	1881	52375	2612	990,974
Faye	1881	5244	2615	991,006
Helmert	1884	5310	2648	990,918

Daraus geht hervor, dass man ohne zu grosse Unsicherheit annehmen darf

$$l_\varphi = 991{,}000\ [1 + 0{,}00520 \sin^2 \varphi]$$
$$l_\varphi = 993{,}577\ [1 - 0{,}00259 \cos 2\varphi].$$

Dies entspricht 980,619 für g_{45}. — K.

95. Anwendung des Pendels zur Regulirung der Uhren. — In jeder Uhr muss man, ganz gleichgültig ob ein Gewicht oder eine Feder als bewegende Kraft das Rädersystem treibt, diese bewegende Kraft reguliren; diese Regulirung geschieht sehr häufig durch ein Pendel. Am Ende des Rädersystemes ist nämlich ein Mechanismus angebracht, den man *Hemmung* nennt. Betrachten wir z. B. eine *Ankerhemmung*: Ein durch die bewegende Kraft angetriebenes Steigrad besitzt lauter gleiche, im gleichen

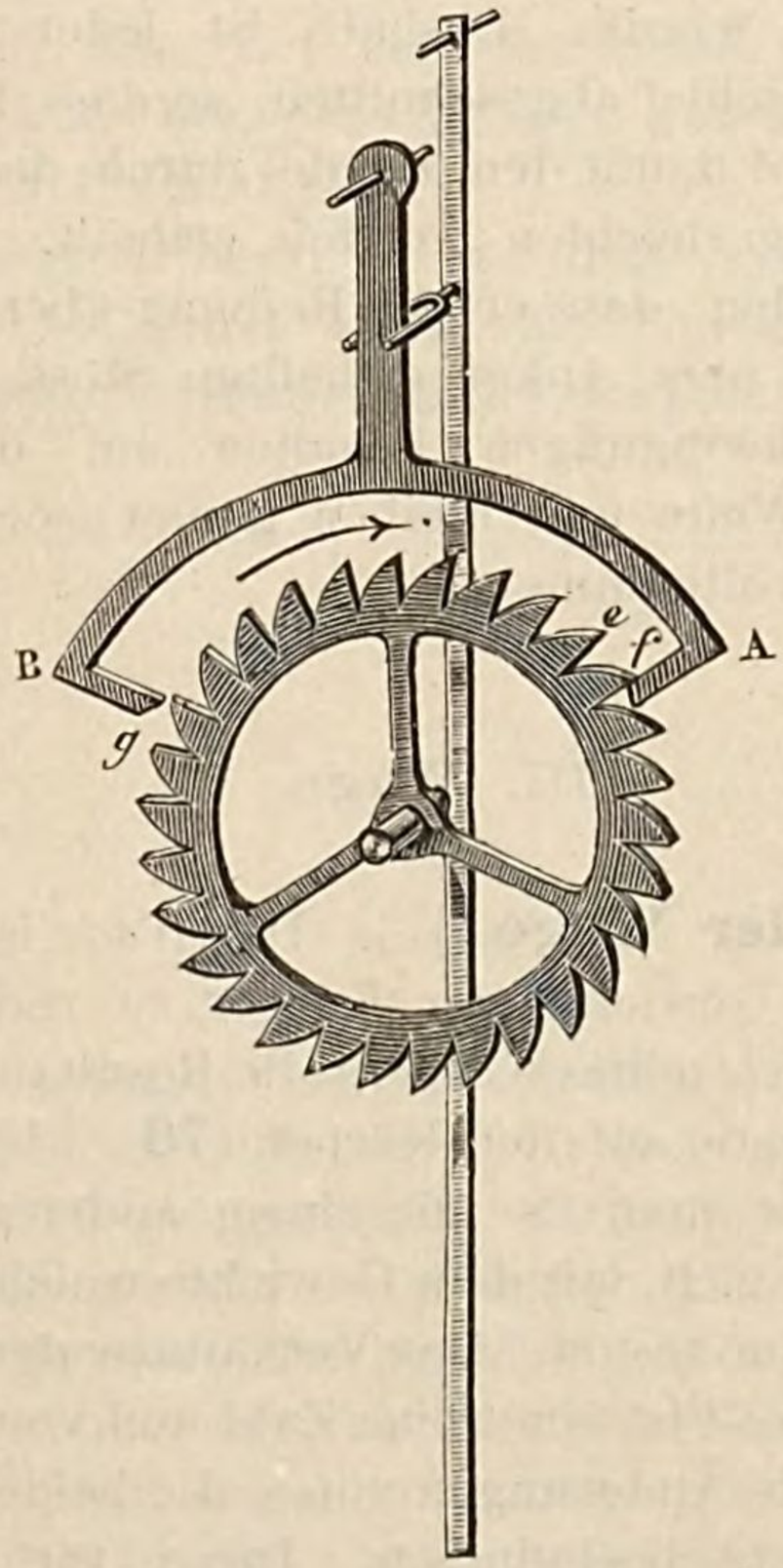


Fig. 140.

Sinn geneigte Zähne; über diesem Rad sitzt der Anker, ein um einen festen Punkt drehbarer metallener Bogen, der in zwei Vorsprünge endigt, welche sich abwechselnd zwischen die Zähne des Rades stellen. Wenn der Anker die in der Figur angenommene Stellung einnimmt, ist das Steigrad und daher auch das ganze Räderwerk angehalten. Bewegen wir den Anker in *A* so, dass der Zahn *f* frei wird, so dreht sich das Rad, bis das andere Ende *B* den Zahn *g* anhält; dann hat das Rad die Hälfte der Entfernung zwischen zwei Zähnen zurückgelegt, und das Ende *A* ist

mitten zwischen den Zähnen *f* und *e*. Verschieben wir jetzt den Anker im anderen Sinne, so wird der Zahn *g* frei und der Zahn *e* stösst gegen das Ende *A*. Wenn die abwechselnden Bewegungen des Ankers isochron sind, so dreht sich das Rad in gleichen Zeiten um gleiche Winkel, es wird eine sprungweise, aber vollkommen regelmässige Bewegung besitzen. Um diesen Isochronismus herzustellen, verbindet man mit dem Anker ein Pendel. Dasselbe würde aber bald still stehen, wenn man nicht dafür Sorge trüge, dass die fortwährend abgegebene Energie durch den Motor der Uhr wieder ersetzt würde. Deshalb ist jeder der beiden Vorsprünge des Ankers schief abgeschnitten, so dass der vorbeigehende Zahn dem Anker und damit dem Pendel durch das Gleiten auf der schiefen Fläche einen leichten Antrieb ertheilt. Der Motor muss derart gewählt werden, dass er alle Reibung überwindet, ohne den bei jeder Hemmung dem Anker ertheilten Stoss zu stark werden zu lassen. Die Schwingungen behalten auf die Weise immer *nahezu* die gleiche Weite und bleiben genau isochron; die Regelmässigkeit ist also vollkommen.[1])

III. Wage.

96. Theorie der Wage.[2]) — Die *Wage* ist ein Instrument, das dazu dient, die Gewichte der Körper zu vergleichen.

Man nennt *Gewicht* eines Körpers die Resultante der Elementarwirkungen der Schwere auf den Körper (**76**). Um dieses Gewicht zu messen, vergleicht man es mit einem anderen als Einheit angesehenen Gewichte, z. B. mit dem Gewichte welches 1 Liter Wasser von 4^0 im leeren Raum besitzt. Das Verhältniss der beiden Gewichte oder das *relative Gewicht* ist eine reine Zahl und von dem Werthe von *g* unabhängig, da die Änderungen von *g* die beiden Theile des Verhältnisses gleichmässig beeinflussen. Diese, für einen gegebenen Körper vollkommen constante Zahl bestimmt man durch die Wage.

Die Wage besteht im wesentlichen aus einem festen Hebel oder „*Balken*“, der um seine Mitte drehbar ist und an seinen Enden *Schalen* trägt, in welche die zu vergleichenden Gewichte gelegt werden.

---

[1]) Picard bemerkte 1669 den Einfluss der Temperatur auf den Gang der Pendeluhren, die im Sommer langsamer, im Winter schneller gingen. Zur Vermeidung dieser auf der Ausdehnung beruhenden Erscheinung erfand Harrison (1725) das Rostpendel, Graham (1726) die Quecksilber-Compensation. — K.

[2]) Siehe M. Thiesen, Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures V, 1886.

Betrachten wir zunächst den Balken allein. Derselbe wird sich so stellen, dass sein Schwerpunkt G auf der durch den Aufhängepunkt C gehenden Senkrechten liegt, d. h. so, dass die Linie CG vertikal ist; sind ausserdem die beiden Hebelarme vollkommen gleich, so wird die Achse AB des Wagebalkens horizontal sein. Wenn man an die beiden Enden des Balkens gleich schwere Schalen hängt, so muss der Balken horizontal bleiben. Legen wir auf diese Schalen zwei gleich schwere Massen, so wird ebenfalls die horizontale Lage des Balkens nicht verändert. Um eine Wägung zu machen, genügt es also, auf eine der Schalen den zu wägenden Körper zu legen, und bekannte Massen auf die andere, bis der Wagebalken sich horizontal stellt.

Würde der Schwerpunkt G mit dem Unterstützungspunkt C zusammen fallen, so könnte man das Gewicht des Balkens als durch den Widerstand dieses Punktes aufgehoben betrachten und

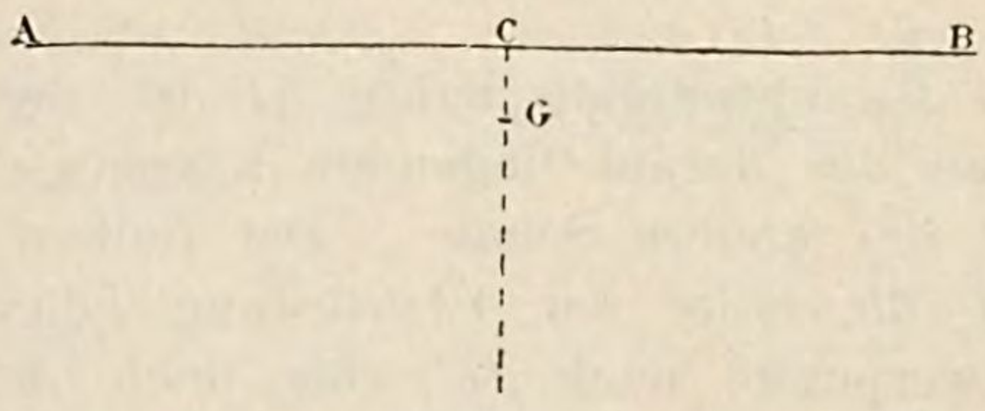


Fig. 141.

der Balken allein wäre auf seiner Unterlage in jeder Stellung im Gleichgewicht. Zwei an beiden Enden angehängte gleiche Gewichte würden diese Verhältnisse gar nicht stören; es gäbe also keine bestimmte, dem Gleichgewicht des Ganzen entsprechende Lage: die Wage wäre in *indifferentem* Gleichgewicht; aber die kleinste Mehrbelastung auf der einen oder anderen Seite würde den Balken vollständig auf die schwerere Seite umschlagen lassen, indem der Balken sich senkrecht einzustellen strebte, und der Apparat wäre in Folge dessen recht unbequem. Läge der Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkt, so gäbe es allerdings auch eine bestimmte Gleichgewichtslage des Balkens, sowohl im unbelasteten, als auch im belasteten Zustande, aber das Gleichgewicht wäre labil und daher praktisch nicht benutzbar. Verlegt man aber den Schwerpunkt unterhalb des Unterstützungspunktes, so giebt es immer eine stabile Gleichgewichtslage, und zwar neigt sich der Balken um so mehr, je mehr eine der Schalen überlastet wird; das Eigengewicht des Balkens wirkt dann der Mehrbelastung immer entgegen.

AB Fig. 142 sei ein schwerer Hebel, dessen Schwerpunkt in der durch den Unterstützungspunkt C gehenden Vertikalen und etwas

unterhalb desselben liegen möge. Sind die beiden Wagearme gut symmetrisch in Bezug auf eine in C senkrecht auf sie gelegte Ebene, so wird auch CG senkrecht auf AB sein. Setzen wir zunächst voraus, die drei Punkte A, B, C (die Punkte, an denen Gewichte angehängt werden, und der Unterstützungspunkt) liegen in einer geraden Linie; l sei die Länge jedes Armes CA und CB, $d = CG$ sei die Entfernung des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkt und ω das Gewicht des Balkens; es seien ferner P und $P + p$

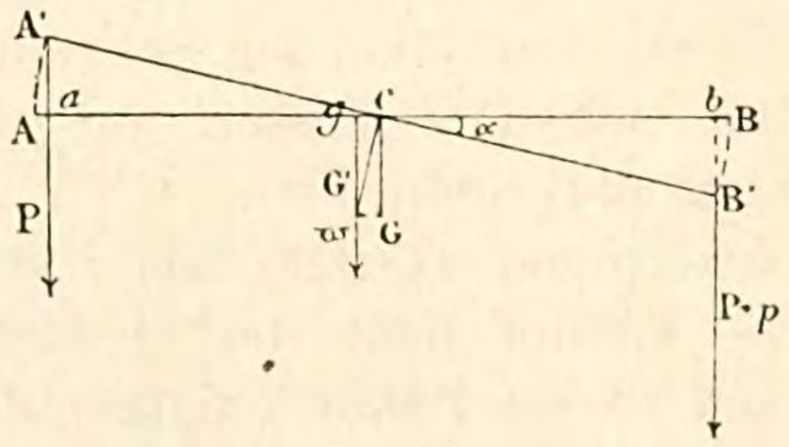


Fig. 142.

zwei in A und B angreifende Kräfte (P ist das Gewicht einer der Schalen und des darauf liegenden Körpers, $P + p$ das Entsprechende bei der andern Schale). Der Balken wird sich dann nach $A'B'$ auf die Seite der Überlastung neigen, dabei hebt sich sein Schwerpunkt nach G', bis nach der Neigung des Balkens um einen gewissen Winkel α das Gleichgewicht durch das Gewicht ω wieder hergestellt wird. Die auf den Balken wirkenden Kräfte liegen alle in derselben zur Drehungsachse senkrechten Ebene. Die Gleichgewichtsbedingungen beschränken sich auf eine einzige: die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf C muss Null sein; das giebt

$$(P + p)\ Cb - P \,.\, Ca - \omega Cg = 0,$$

oder

$$pl \cos \alpha - \omega d \sin \alpha = 0,$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{\omega d} \,.^{1})$$

Die *Empfindlichkeit* einer Wage wird durch den Winkel bestimmt, um den sie sich durch eine gegebene geringe einseitige Mehrbelastung neigt.

---

[1]) Wenn die Hebelarme ungleich wären, hätte man doch dieselbe Formel; wäre l die Länge des Armes, der sich auf der Seite der Überlastung befindet, und p die zu P gelegte Überlastung, so würde das Gewicht P' auf der anderen Seite die Bedingung $P'l' = Pl$ erfüllen.

Die Formel zeigt, dass die Empfindlichkeit der Länge des Balkens direct, seinem Gewicht und der Entfernung von Aufhänge- und Schwerpunkt umgekehrt proportional ist. Daraus folgt der wichtige Schluss, dass *die Empfindlichkeit von der Belastung unabhängig ist, wenn die drei Punkte A, C, B in einer Geraden liegen.*

Das gilt nicht mehr, wenn die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Nehmen wir nämlich wieder an, der Balken sei zu der durch die Achse C und den Schwerpunkt G gehenden Ebene symmetrisch, und es sei

$l = CA = CB$,
$\beta = GCA = GCB$,
$d = CG$,
ω das Gewicht des Balkens,
P die in A angreifende Kraft,
$P + p$ die in B angreifende Kraft,
$\alpha = BCB'$ der Winkel, um den sich der Balken neigt, um die neue Gleichgewichtslage $A'CB'$ einzunehmen.

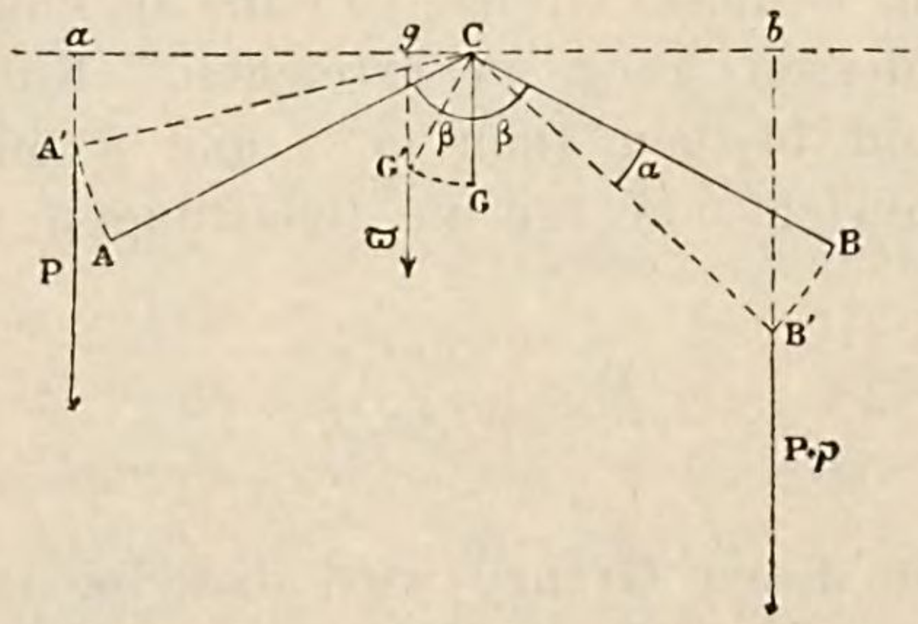


Fig. 143.

Dann ist die Gleichung für das Gleichgewicht der Momente

$$(P + p)\, l \sin(\beta - \alpha) - Pl \sin(\beta + \alpha) - \omega d \sin\alpha = 0,$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p l \sin\beta}{(2P + p) l \cos\beta + \omega d}.$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. *β ist spitz.* — Die Empfindlichkeit nimmt mit zunehmender Belastung ab.

Man sieht übrigens leicht, dass für $d \geqq 0$, d. h. für jede Lage des Schwerpunktes unterhalb oder in gleicher Höhe mit der Achse, immer eine Gleichgewichtslage möglich ist, da stets $\text{tg}\,\alpha < \text{tg}\,\beta$.

Wird $d < 0$, d. h. liegt der Schwerpunkt über der Achse, so ist α nur kleiner als β, wenn

$$2\,Pl\cos\beta - \omega\,d' > 0,$$

worin d' den absoluten Werth von d bezeichnet. Nimmt man an, die Entfernung d' sei bei constanten ω, l und β veränderlich, so müsste wegen der Bedingung

$$d' < \frac{2\,Pl\cos\beta}{\omega},$$

d' unter einer gewissen Grenze bleiben, um für eine gegebene Belastung P einen Gleichgewichtszustand zu ermöglichen. Für alle grösseren Werthe von d' wäre dann die Wage im labilen Gleichgewicht. Da die Empfindlichkeit übrigens um so grösser ist, je mehr sich der Nenner von $\text{tg}\,\alpha$ der Null nähert, so wird es vortheilhaft sein, d' dieser Grenze so nahe als möglich zu bringen, ohne dieselbe indessen ganz zu erreichen. Kann d' nicht verändert werden und bleiben auch ω, l und β unveränderlich, so wird das Gleichgewicht nur für die Belastungen

$$P > \frac{\omega\,d'}{2\,l\cos\beta}$$

möglich, unterhalb dieser Grenze wird dasselbe labil.

2. *β ist stumpf.* — Die Empfindlichkeit wächst mit der Belastung. Damit für eine bestimmte Belastung Gleichgewicht möglich sei, muss d über einer gewissen Grenze bleiben; unterhalb derselben ist die Wage im labilen Gleichgewicht und in der Nähe derselben hat die Empfindlichkeit ein Maximum. Ist auch d unveränderlich, so ist die Wage für alle Belastungen, welche eine bestimmte Grenze überschreiten, im labilen Gleichgewicht.

Fassen wir das Gesagte kurz zusammen: Eine Wage ist nur dann brauchbar, wenn der Schwerpunkt nicht mit dem Aufhängepunkt zusammen fällt, sondern unterhalb desselben liegt; damit sie richtige Angaben liefere, müssen die beiden Hebelarme gleich und unveränderlich sein; soll ihre Empfindlichkeit bedeutend und constant sein, so müssen die Aufhängepunkte der Schalen und der Unterstützungspunkt des Balkens in gerader Linie liegen, die

Hebelarme müssen lang sein, ohne die Leichtigkeit und Festigkeit des Balkens zu beeinträchtigen, und endlich muss die Entfernung zwischen Schwerpunkt und Aufhängepunkt möglichst klein sein.

Sehen wir nun zu, wie diese Bedingungen bei einer Präcisionswage erreicht werden.

97. Präcisionswage. — *Beschreibung.* Der aus einem Broncestück[1]) angefertigte Balken hat die Form einer sehr verlängerten Raute. Um die wesentlichen, anscheinend sich widersprechenden, Bedingungen der Leichtigkeit, Festigkeit und Länge möglichst zu erfüllen, nimmt man einen durchbrochenen Balken, bei dem nur einige passend vertheilte Querleisten stehen bleiben. Die Aufhängeachse wird durch die in die Mitte des Balkens eingesetzte Stahlschneide C gebildet, welche mit ihrer ganzen Länge auf einer in die Mittelsäule MN eingelassenen Achatplatte ruht. Es ist offenbar vortheilhaft, die ganze Länge der Schneide zu benutzen, da sie in jedem Punkte weniger angestrengt wird, wenn die Belastung auf ihre ganze Ausdehnung gleichmässig vertheilt ist. Die Schneide bildet fast eine mathematische Achse ohne merkliche Reibung (**92**, Anmerk.).

Die Aufhängeachsen der Gehänge müssen in festen (möglichst gleichen) Abständen von der Achse des Balkens und in derselben Ebene mit ihr liegen. Zu diesem Zwecke sind zwei nach oben gerichtete Stahlschneiden in den Balken eingelassen, die mit der nach unten gerichteten Mittelschneide in gleicher Ebene liegen. Auf jeder dieser Endschneiden ruht eine ebene oder schwach cylindrisch gekrümmte Achatplatte, welche an den umgekehrten Bügeln E, E' befestigt sind. Am unteren Ende dieses Bügels sitzt ein Querstück; darauf liegt in einer zur ersten senkrechten Ebene ein zweiter Bügel e, e', welcher die Schalen trägt. Durch diese Aufhängeart ist die Schale um zwei zu einander rechtwinklige Achsen drehbar; sie wird sich daher bei jeder Lage des aufgesetzten Körpers derart stellen, dass das durch den Schwerpunkt des ganzen Systems gehende Loth auch die Endschneide trifft. Die Länge des Hebelarmes, auf welchen die Last wirkt, ist daher für jede beliebige Lage des auf die Schale gesetzten Körpers constant.[2]) Diese äusserst wichtige Bedingung wird nur durch An-

---

[1]) Aluminiumbronce ist wegen ihrer Leichtigkeit recht geeignet.

[2]) Man wird sich übrigens doch bestreben, bei jeder Wägung die Belastung derart aufzulegen, dass sich die Schale immer in derselben Stellung über einer auf dem Boden der Wage angebrachten Marke befindet.

wendung zweier Schneiden erfüllt. In gewöhnlichen Wagen wird ihr durch einen doppelten Haken und eine biegsame Schnur annähernd Rechnung getragen.

Mit dem Balken ist ein zu ihm senkrechter nach unten gerichteter Zeiger *ab* verbunden, der sich vor einer Theilung bewegt

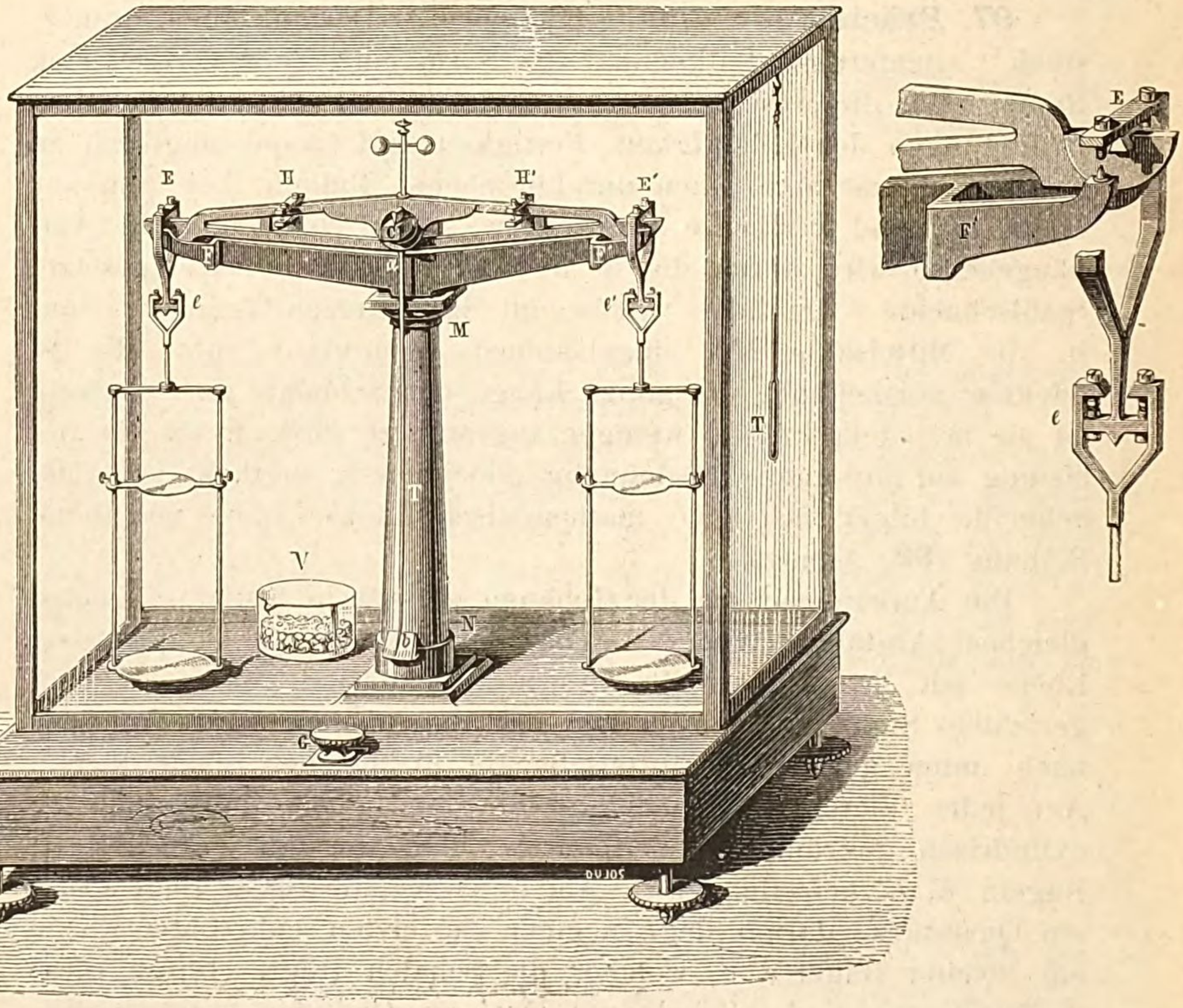


Fig. 144.

und dadurch auch die geringste Neigung anzeigt. Oben wird er durch eine drahtförmige Spindel überragt, auf welcher zwei Schraubenmuttern laufen. Die eine besteht aus einer excentrischen Masse, die es ermöglicht, den Schwerpunkt des Balkens genau in die durch die Achse gehende Senkrechte zu verlegen, während die andere zur Regulirung der Empfindlichkeit dient. Der Nutzen dieser letzteren Schraubenmutter ist klar. Wenn es nämlich auch dem Constructeur gelungen ist, alle drei Schneiden genau in eine Ebene zu bringen, so wird dieser Zustand nicht mehr bestehen, wenn die Schalen belastet, und dadurch unvermeidlicher Weise der

Balken ein wenig durchgebogen ist. Um dann die ganze Empfindlichkeit, deren der Apparat fähig ist, zu erlangen, verstellt man die Schraubenmutter so lange, bis labiles Gleichgewicht der Wage eintritt; durch eine kleine Verstellung in entgegengesetztem Sinne wird das Gleichgewicht wieder stabil, ohne sich viel von der Grenze zu entfernen.

Um die aus der fortwährenden Berührung von Schneide und Lager bedingte Abnutzung zu verhindern und die bei dem Auflegen oder Abnehmen der Belastung unvermeidlichen Stösse unschädlich zu machen, ist unter dem Balken eine Gabel FF' angebracht, die ihn mittels der Stücke H, H' von dem Achatlager abhebt und zu gleicher Zeit auch die Gehänge von den Endschneiden abnimmt. Der senkrechte Stiel der Gabel liegt im Innern der Säule und ruht dort mittels einer Walze auf einer excentrischen Scheibe, welche durch den vorn am Wagekasten befindlichen Knopf G gedreht wird.

Der Wagekasten ist mit Thüren versehen, die nur zum Auflegen oder Wegnehmen der Belastung geöffnet werden. Wenn die Wage nicht benützt wird, ist ein Trockenmittel im Innern von Vortheil. Ein Thermometer T und ein Hygrometer geben Temperatur und Feuchtigkeit der Luft an. Die Wage steht mit drei Stellschrauben auf einer in die Mauer eingelassenen Platte und besitzt eine Libelle, mittelst deren sie stets richtig eingestellt werden kann; der Zeiger muss in der Ruhe senkrecht stehen; man bringt ihn bei jeder Wägung in diese Lage zurück.

Doppelwägung; Tarirmethode. — Eine der am schwierigsten zu erfüllenden zahlreichen Bedingungen, denen eine gute Wage genügen muss, ist die vollständige Gleichheit der beiden Hebelarme; selbst wenn diese bei einer gewissen Temperatur erfüllt ist, besteht sie möglicherweise bei einer anderen nicht mehr. Man nimmt daher darauf gar keine Rücksicht und wendet die *Tarirmethode* von Borda, oder die Gauss'sche *Doppelwägung* an.

Bei der Tarirmethode wird der in einer Schale liegende, zu wägende Körper auf der anderen Schale durch Schrotkörner tarirt, dann weggenommen und durch bekannte Massenstücke (Gewichtstücke) so ersetzt, dass wieder Gleichgewicht eintritt. Es ist klar, dass die bekannten Massenstücke, welche so auf dieselbe Schale an Stelle des Körpers gesetzt, der gleichen Tara das Gleichgewicht halten und am Ende des gleichen Hebelarmes dieselbe Wirkung ausüben, auch das gleiche Gewicht haben. Das Gewicht der bekannten Massenstücke giebt demnach in der Borda'schen Tarirmethode das Gewicht des Körpers.

Bei der Gauss'schen Doppelwägung liegt während der ersten Vergleichung der Körper auf der einen Wagschale, auf der anderen wirkt das bekannte Gewicht P; nach Vertauschung auf den Wagschalen wird eine zweite Vergleichung vorgenommen, bei der P im allgemeinen durch ein sehr wenig davon verschiedenes Gewicht P' ersetzt werden muss. Das Gewicht des Körpers ist dann $\sqrt{PP'}$.

Gewichtssätze (Massensätze).[1]) — Zur Wägung sind vor allem genau bekannte Gewichte (Massen) nöthig; die im Handel vorkommenden sind häufig fehlerhaft. Es ist übrigens leicht, die Unterabtheilung des Grammes selbst herzustellen. Man nimmt dazu einen Platindraht von solchem Durchmesser, dass ein Meter desselben ungefähr ein Gramm wiegt, und schneidet davon genau ein Gramm ab. Nachdem die ganze Länge in zehn gleiche Theile getheilt ist, wird der Draht in fünf Stücke von bez. $\frac{5}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ geschnitten, die nahezu 5, 2, 1, 1, 1 Decigramm wiegen werden. Das letzte Zehntel wird in einem Zieheisen auf die zehnfache Länge gebracht, und hiervon wieder genau der zehnte Theil abgemessen; dann werden wie oben daraus fünf Stücke von $\frac{5}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ der ganzen Länge geschnitten; diese Theile bilden die Centigramme. Auf dieselbe Weise erhält man noch 5, 2, 2, 1 mg. Man hat darauf zu achten, dass die Gewichte für den leeren Raum gelten sollen; alle Wägungen in der Luft erhalten deshalb eine Correction, auf die wir später zurück kommen.[2])

Wägung. — Bei der Ausführung einer Wägung legt man auf eine der Schalen den zu wägenden Körper, auf die andere ein

---

[1]) Als bestes Material zu Massensätzen gilt heute die von dem internationalen Maass- und Gewichtsbureau verwendete Legirung von 90 Theilen Platin mit 10 Theilen Iridium. Auch Sätze aus Bergkrystall sind vielfach mit gutem Erfolg in Gebrauch. — K.

[2]) In neuerer Zeit hat M. Thiesen für Präcisionsgewichtssätze eine andere Stückelung (5, 4, 3, 2, 1) vorgeschlagen, mit der man in jeder Decade zwölf Vergleichungen ausführen kann, nämlich:

10 + 2	mit 5 + 4 + 3	5 + 1	mit 4 + 2
10 + 1	„ 5 + 4 + 2	5	„ 4 + 1
10	mit 5 + 4 + 1	5	„ 3 + 2
10	„ 5 + 3 + 2	4 + 1	„ 3 + 2
10	„ 4 + 3 + 2 + 1	4	„ 3 + 1
5 + 2	mit 4 + 3	3	„ 2 + 1

Diese zwölf Wägungen zur Bestimmung der fünf Unbekannten lassen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate sehr leicht ausgleichen. — K.

Gewichtstück, beruhigt dann die pendelnde Bewegung der Schalen (eine schwingende Schale zieht stärker als eine ruhende), und lässt die Wage mittels der vorn angebrachten Kurbel los. Die Wage wird sich nach einer Richtung neigen, weshalb man die Gabel wieder hebt und die Wage arretirt. Jetzt wird das Gewicht in dem richtigen Sinn geändert, die Schwingungen beruhigt, und die Wage wieder durch Senken der Gabel losgelassen und so fort, bis bei frei schwingender Wage der Zeiger auf Null steht, oder vielmehr kleine Schwingungen nach beiden Seiten des Nullpunktes ausführt. Die Wage ist nämlich nichts anderes als ein zusammengesetztes Pendel, dessen zugehöriges synchrones einfaches Pendel im allgemeinen recht lang ist. Es ist daher nicht nothwendig, die Beruhigung der Schwingungen abzuwarten, es genügt, die Nadel zu beiden Seiten des Nullpunktes gleiche Ausschläge machen zu lassen, um sicher zu sein, dass die entsprechende Gleichgewichtslage wirklich mit dem Nullpunkt zusammenfällt. Darauf werden Körper und Gewichte auf den Schalen vertauscht, und die Gewichte (wenn nöthig) von neuem so regulirt, dass der Zeiger wiederum um den Nullpunkt gleiche Schwingungen nach beiden Seiten ausführt.

Man braucht die letzten Bruchtheile des Grammes nicht mehr anzuwenden, wenn man entweder *bewegliche Reiter* auf dem Wagebalken verschiebt, oder wenn die Wage einen beweglichen Zeiger besitzt, dessen Drehungsebene senkrecht zu der des Balkens ist.

Der auf einem Arme des Wagebalkens verschiebbare Reiter übt einen Druck aus, welcher seiner Entfernung von der Mittelschneide proportional ist. Wiegt er ein Centigramm und sitzt er genau über der Endschneide, so wird er die gleiche Wirkung haben, wie wenn er auf der Schale läge; in der Hälfte der Entfernung entspricht er nur noch fünf Milligramm Belastung der Schale und so weiter. Durch Anbringung einer Theilung auf dem Balken ist es möglich, ein Milligramm oder auch Bruchtheile eines Milligrammes mit Hülfe eines Centigrammreiters zu erhalten, wenn die Empfindlichkeit der Wage gross genug ist. Diese Reiter werden von aussen durch seitlich eingeführte Stangen aufgesetzt und abgenommen.

Ein bei C an dem Balken angebrachter Zeiger CE, der sich in einer horizontalen Ebene drehen kann, ist ohne Einfluss auf die Wage, wenn er senkrecht zu AB (nach CE) gerichtet ist. Bringt man ihn in die Stellung CE', die mit CE den Winkel ω einschliesst, so kommt auf der Seite CA ein Gewicht b dazu, das in einem Abstande $Cg' = \varrho$ angreift, und dessen Moment in Bezug auf die Mittelachse der Wage $b \,.\, \varrho \sin \omega$ ist. Bringt man also auf dem Kreise von E aus Theilstriche an, deren Entfernung bez.

$\text{arc}\,.\,\sin\frac{1}{10}$, $\text{arc}\,.\,\sin\frac{2}{10}$, ... beträgt, so wird der auf diesen Strichen stehende Zeiger dieselbe Wirkung haben, wie eine Mehrbelastung der Schale von 1, 2 ... Milligramm, wenn $b\,.\,\varrho = l\,.\,1$ Centigramm ist.

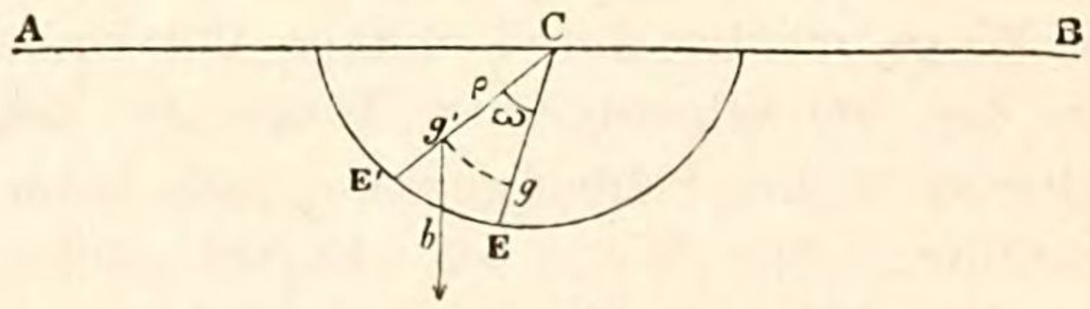


Fig. 145.

Statt die absolute Gleichheit der Wirkung auf beide Wagebalken herzustellen, misst man besser die Differenz zwischen den vorhandenen, annähernd gleichen Wirkungen, durch die *Schwingungsmethode*: wenn die Gleichheit nahezu erreicht ist, lässt man die Wage schwingen und schreibt drei auf einander folgende Ausschläge l_1, l_2, l_3 auf. Der Theilstrich

$$a = \frac{1}{4}(l_1 + 2l_2 + l_3)$$

entspricht dann der Ruhelage.[1]) Nach Zulegung eines Milligrammes auf der Schale mit den Gewichten, bestimmt man wiederum den der neuen Ruhelage des Balkens entsprechenden Theilstrich und hat jetzt den Werth eines Scalentheiles in Milligramm für die betreffende Belastung und Zeit. Daraus berechnet man in einfacher Weise, wieviel Gewicht zuzufügen wäre, um die Ruhelage des Zeigers von a nach dem Nullpunkt zu bringen.

Genauigkeitsgrad der Wage. — Die Wage ist vor allen anderen Apparaten ein Präcisionsinstrument. Eine Wage, die für eine Belastung von einem Kilogramm noch das Milligramm giebt, misst noch ein Millionstel des Ganzen. Solche Wagen sind aber noch nichts Aussergewöhnliches; die Präcisionswagen geben gewöhnlich für eine Belastung von einem halben, einem oder zwei Kilogramm noch ein oder selbst ein halbes Milligramm. Deleuil construirte

---

[1]) Bei guten Wägungen ist es vortheihaft, vier Umkehrpunkte zu beobachten, und daraus die Ruhelage wie folgt zu berechnen

$$a = \frac{1}{8}(l_1 + 3l_2 + 3l_3 + l_4).$$

Siehe M. Thiesen, *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*, V, 2, p. 22. — K.

früher eine Wage für Regnault, die für eine Belastung von zehn Kilogramm noch ein Milligramm gab.

Heute geht man viel weiter. Bei wiederholt vorgenommenen Doppelwägungen unter steter Berücksichtigung der meteorologischen Zustände[1]) und bei Beobachtung der stets geschlossenen Wage aus der Entfernung[2]) erreicht man noch etwa $\frac{3}{1000}$[3]) des Milligrammes; *bei der Wägung eines Kilogrammes ist ein Dreihundertmillionstel erreichbar.*[4])

98. Laboratoriumswagen. — Ausser den Präcisionswagen seien noch einige Formen erwähnt, die gewöhnlich in Laboratorien angewendet werden.

Die älteste Form der genauen Wage ist die von *Fortin.* Sie besitzt einen langen, vollen Balken aus gehärtetem Stahl; durch dessen Mitte geht eine Schneide, die mit ihren äusseren Theilen auf zwei in horizontaler Ebene liegenden Achatplatten ruht. An den beiden Enden sind zwei Schneiden angebracht, auf welchen an einem doppelten Haken die Schalen hängen. Eine aussen mit einem Knopf verbundene Gabel kann den Balken abheben und trägt ihn bei Nichtbenutzung. Diese mit Schutzkasten versehene Wage muss senkrecht zum magnetischen Meridian aufgestellt werden, um den Einfluss des Erdmagnetismus auf den Balken zu vermeiden.

Eine von Deleuil gebaute Wage giebt bei einer Belastung von drei Kilogramm noch fünf Milligramm. Der Balken ist von derselben Form wie in seinen Präcisionswagen, die Schalen bieten Platz für recht umfangreiche Körper. Ein aussen an der Vorderseite des Kastens angebrachtes Rad lässt durch ein Hebelsystem die Gehänge abheben und aufsetzen.

---

[1]) Deville und Mascart, *Annales de l'Ecole normale supérieure* (2), VIII, 20; 1879. Vacuumwagen bieten in dieser Beziehung enorme Vortheile; siehe M. Thiesen, *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*, Band IX. — K.

[2]) Siehe in den *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*, I, D, 53, Marek, die Beschreibung und Anwendung einer Rueprecht'schen Wage mit Umsetzungsmechanismus von Schorss in Wien.

[3]) Conférence Générale des poids et mesures. Sept. 1889. Rapport sur la construction etc. p. 107. — K.

[4]) Für Belastungen bis zu fünf Gramm baut Stückrath in Berlin Spitzenwagen, mit denen bei vorsichtiger Behandlung auf ungefähr $\frac{1}{3000}$ Milligramm gewogen werden kann. M. Thiesen, *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures* Band XII. — K.

In der Bockholtz'schen Wage trägt einer der Balkenarme statt der Schale eine Stange mit verschiedenen Messingscheiben, die eine constante Belastung bilden. Am anderen Arm befinden sich zwei Schalen, von welchen die eine zur Aufnahme des Körpers bestimmt ist, während die andere nach Auflegung des Körpers solange beschwert wird, bis der Balken horizontal geworden ist. Darauf ersetzt man den Körper durch bekannte Gewichtstücke. Diese Wage hat immer die gleiche Belastung und daher auch constante Empfindlichkeit.

Die Goldwage der Chemiker ist klein, mit langem leichtem Balken (System Fortin); sie liegt im Ruhezustande auf einer festen Gabel, welche die Mittelschneide über ihrer Auflagefläche hält. Diese Fläche ist auf einem senkrechten Stift befestigt, welcher im Innern der Mittelsäule (Fuss) liegt und durch einen Hebel gehoben werden kann; geschieht dies, so setzt sich die Mittelschneide auf die Auflagefläche und das Spiel der Wage beginnt. Diese kleinen Instrumente geben oft bei einer Belastung von zwanzig bis dreissig Gramm noch das Milligramm.

Berzelius setzte, um die beiden Arme des Balkens vollkommen gleich zu machen, an jedes Ende ein Stahlband in Form eines umgekehrten U; in den äusseren Theil des U war eine kleine Öffnung geschnitten, in dessen unteren geschärften Rand der Haken der Schale eingehängt wurde. Durch eine Verbindungsschraube zwischen den beiden Armen des U konnte die Länge jeder Hälfte des Balkens genau abgeglichen werden. Diese Anordnung ist aber nur bei leichten Wagen verwendbar, und selbst dann leidet sie an dem Übelstand, dass die Achsen nicht vollkommen fest sind. Es ist viel vortheilhafter, die Schneiden unveränderlich einzulassen und Doppelwägungen auszuführen.

99. Gewöhnliche Wagen. — Viele der im Verkehr ge-

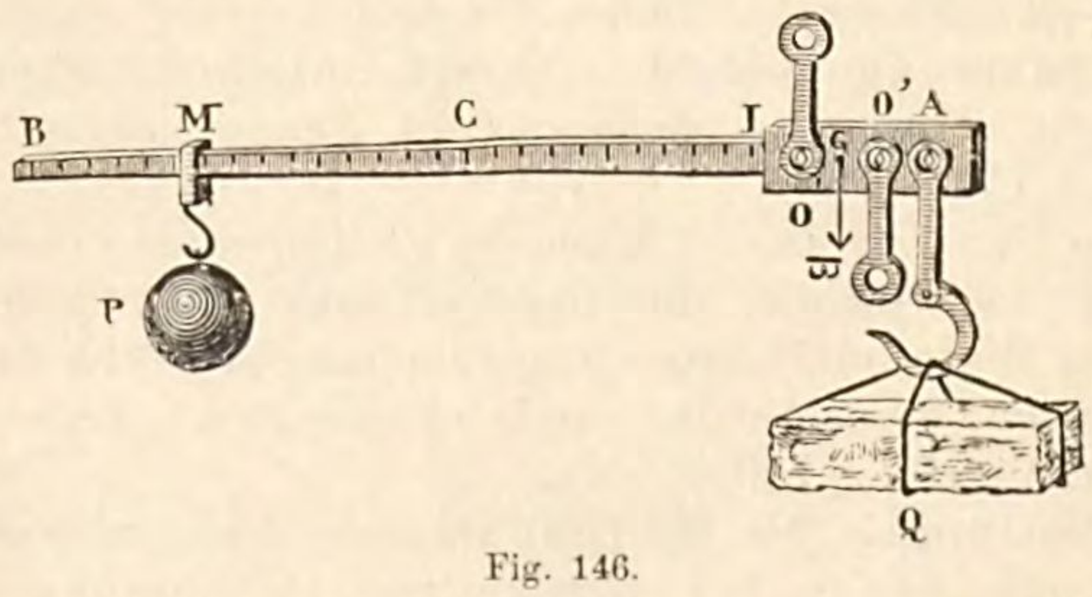


Fig. 146.

bräuchlichen Wagen sind der Präcisionswage mehr oder weniger ähnlich; principiell von ihr verschieden ist die *römische Schnellwage.*

Die Wägung mit derselben, zu welcher nur ein einziges Gewicht nöthig ist, lässt sich in sehr kurzer Zeit ausführen, aber die erreichte Genauigkeit ist nur eine geringe. Die Wage besteht aus einem ungleicharmigen Hebel AB, der in O (oder O') durch eine Stahlschneide unterstützt ist; bei A befindet sich eine zweite in entgegengesetztem Sinn gerichtete Schneide, welche den zu wägenden Körper trägt. Das constante Gewicht P wird bei jeder Wägung so lange verschoben, bis der Hebel in wagrechter Lage bleibt. Bedeutet ω das im Punkte G angreifende Gewicht des Hebels, so lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$P \,.\, OM - Q \,.\, OA - \omega \,.\, OG = 0.$$

Es sei ferner I der Punkt, in welchem das Gewicht P bei unbelasteter Wage angehängt werden muss, um das Gleichgewicht herzustellen, so ist

$$P \,.\, OI - \omega \,.\, OG = 0.$$

Wir ziehen diese Gleichung von der vorhergehenden ab, und erhalten

$$P \,.\, IM = Q \,.\, OA,$$

oder

$$Q = \frac{P}{OA} \cdot IM.$$

Das gesuchte Gewicht des angehängten Körpers Q ist demnach der Entfernung IM proportional. Um das Instrument zu aichen, ermittelt man zuerst den Punkt I und dann den einer bekannten Belastung, z. B. $Q = 10$ Kilogramm, entsprechenden Punkt C; die Strecke IC wird in zehn gleiche Theile getheilt und die Theilung über C hinaus verlängert.

Die *Decimalwage (Brückenwage)* von Quintenz wird im Handel häufig angewendet, um beträchtliche Lasten zu wägen. Die zur

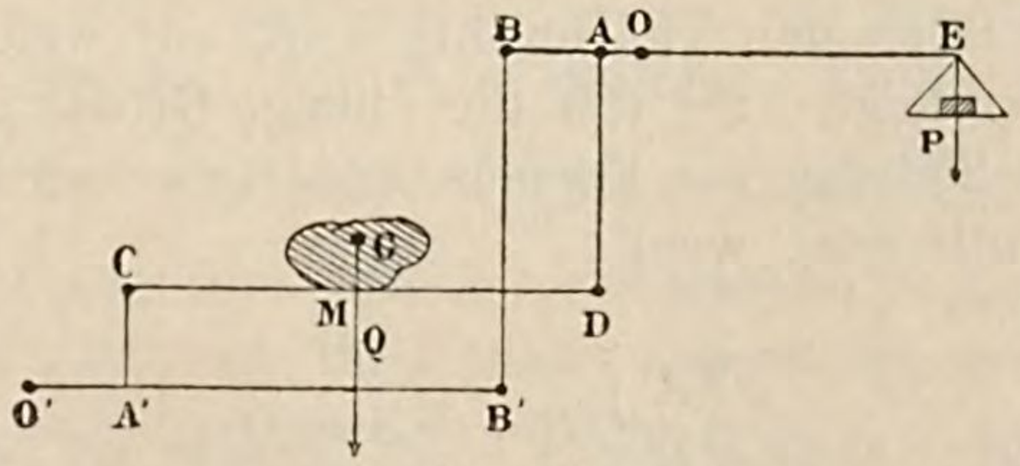


Fig. 147.

Aufnahme des zu wägenden Körpers Q bestimmte Brücke ruht auf einem Hebel CD; dieser ist um eine horizontale Achse C drehbar,

und durch eine vertikale Stange DA im Punkte A mit einem zweiten, um den festen Punkt O drehbaren, Hebel BE verbunden. Die Achse C wird von einer bei A' senkrecht mit einem dritten Hebel $O'B'$ verbundenen Stange CA' getragen; $O'B'$ ist um eine feste Achse O' drehbar und hängt mit dem Hebel BE durch die vertikale Stange $B'B$ zusammen. Das bei M angreifende Gewicht Q zerlegt sich in zwei Theile, von welchen der eine $Q \cdot \frac{CM}{CD}$ in D angreift und durch die senkrechte Stange AD nach A übertragen wird; der andere $Q - Q \cdot \frac{CM}{CD} = Q'$ wirkt in C, und wird durch die Stange CA' nach A' übertragen. Dieses Gewicht Q' kann wiederum in zwei Gewichte zerlegt werden; das eine, $Q' \cdot \frac{A'B'}{O'B'}$, greift bei O' an und wird durch den Widerstand dieses festen Punktes aufgehoben; das andere, $Q \cdot \frac{O'A'}{O'B'}$, greift in B' an und wird durch die senkrechte Stange $B'B$ nach B übertragen. Auf den Hebel BE wirken daher in A das Gewicht $Q \cdot \frac{CM}{CD}$, in B das Gewicht $Q' \frac{O'A'}{O'B'}$, und in E das Gewicht P. Die Gleichgewichtsbedingung für diesen Hebel ist folglich

$$P \,.\, OE - Q \cdot \frac{CM}{CD} \cdot OA - Q' \cdot \frac{O'A'}{O'B'} \cdot OB = 0,$$

oder wenn Q' durch seinen Werth ersetzt wird,

$$P \,.\, OE - Q \frac{O'A'}{O'B'} \cdot OB + Q \frac{CM}{CD} \left(\frac{O'A'}{O'B'} \cdot OB - OA \right) = 0.$$

Es soll nun vollkommen gleichgültig sein, auf welchem Punkt der Brücke die Last liegt. Da CM die einzige Grösse ist, welche sich bei einer Verschiebung des Körpers ändert, so wird die verlangte Bedingung erfüllt sein, wenn

$$\frac{O'A'}{O'B'} OB - OA = 0$$

ist, oder

$$\frac{O'A'}{O'B'} = \frac{OA}{OB};$$

es ergiebt sich daher endlich

$$\frac{P}{Q} = \frac{O'A'}{O'B'} \cdot \frac{OB}{OE} = \frac{OA}{OE},$$

das heisst, der Körper übt dieselbe Wirkung aus, als ob er in A angehängt wäre; hieraus folgt, dass das zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Gewicht P ein constanter Theil $\frac{OA}{OE}$ von dem Gewichte Q des Körpers ist. Wählen wir $\frac{OA}{OE} = \frac{1}{10}$, so ist auch Q zehnmal grösser als das Gewicht P, welches ihm das Gleichgewicht hält.

Die Schnellwage von *Béranger* besitzt im Vergleich zur vorigen wichtige Verbesserungen. Die Brücke $CDC'D'$ (Fig. 148) liegt auf vier Schneiden a, b, c, d, welche in Form eines Rechteckes auf zwei Hebel vertheilt sind. Der eine eIf ist um die horizontale Achse ef drehbar, der andere gIh um die horizontale Achse gh. Die beiden Hebel sind durch einen senkrechten Zapfen I verbunden, so dass sie sich nur gleichzeitig bewegen können. Eine horizontale Stange IB verbindet den Punkt I mit der senkrechten Stange BA, und diese letztere hängt an dem um die Achse O beweglichen Wagebalken AE. Dieser Wagebalken ist der Vorderkante DD' parallel und liegt nicht, wie bei der oben besprochenen Brückenwage in der Verlängerung der Brücke; hierdurch werden die Dimensionen der ganzen Wage bedeutend verringert. Um Lasten zwischen 0 und 100 kg rasch wägen zu können, besitzt der Wagebalken ein Laufgewicht V, mit Hülfe dessen man wie bei der römischen Schnellwage Wägungen ausführen kann; erst bei Gewichten über 100 kg ist es nöthig, Gewichtstücke auf die Schale P zu setzen.

Eine auf die Brücke gelegte Last vertheilt sich auf die vier Schneiden a, b, c, d in irgend einer Weise, die wir nicht zu kennen brauchen. Der auf den Punkt a wirkende Druck sei q; dieser wird in Bezug auf die Achse ef einer Last $q\frac{ae}{IK}$ gleichwerthig sein, welche in I angreift. Die anderen Drucke verhalten sich ganz analog, so dass alle vier im Punkte I vereinigt gedacht werden können, wo sie die Resultirende $Q \cdot \frac{ae}{IK}$ bilden. Dieselbe wirkt, mit Hülfe der Stange IB auf den Stab AB und zieht diesen mit einer Kraft abwärts, welche dadurch bestimmt ist, dass sie dasselbe Moment in Bezug auf die Achse ef haben muss wie jene.

Die Kraft beträgt also $Q \cdot \frac{ae}{IK} \cdot \frac{IK}{Be} = Q \cdot \frac{ae}{Be}$. Wenn demnach das Verhältniss $\frac{ae}{Be} = \frac{1}{10}$ ist, so wird sich alles so verhalten, als ob die

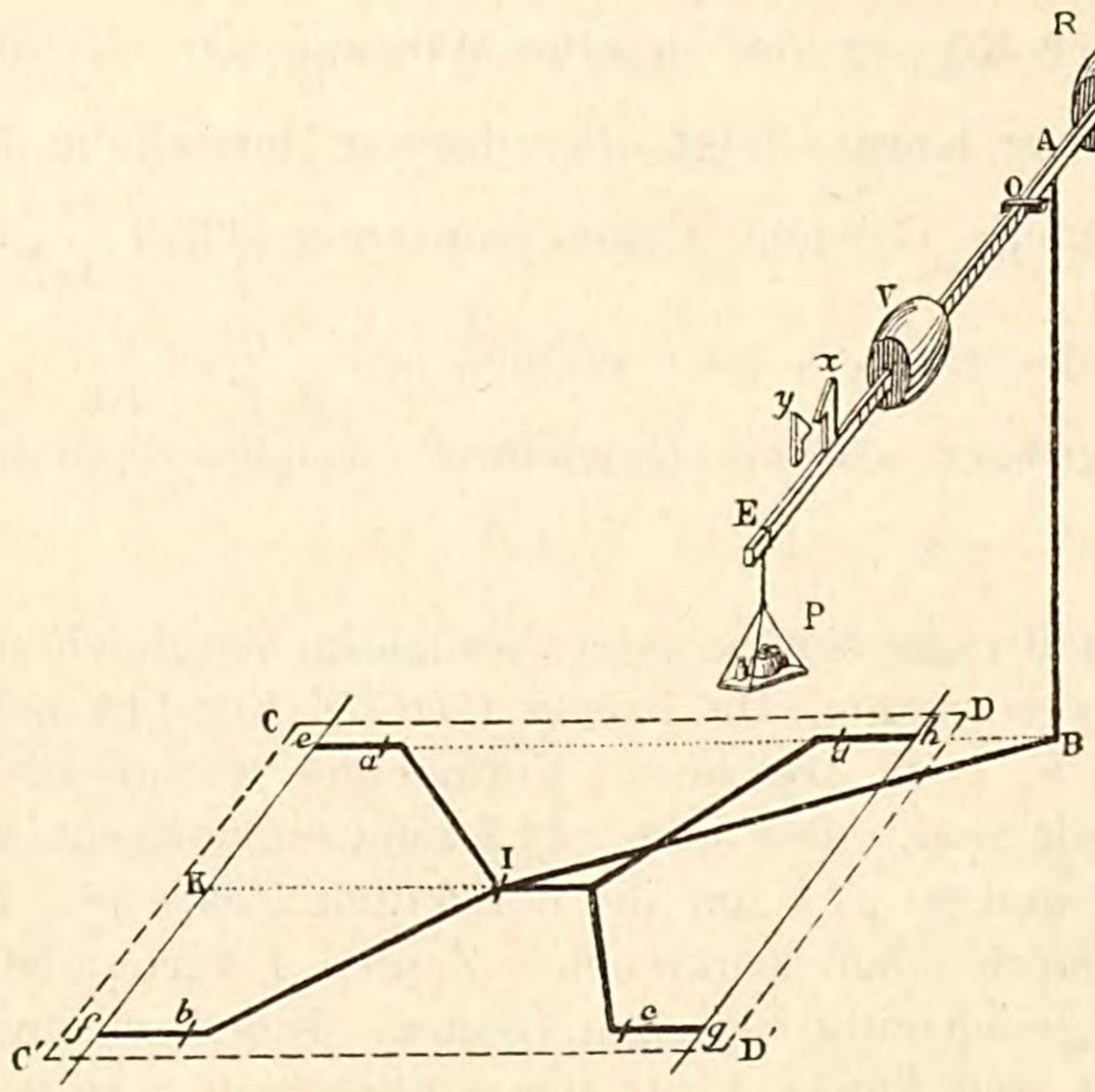


Fig. 148.

auf ihren zehnten Theil reducirte Last Q an der Stange AB aufgehängt wäre. Da das Verhältniss $\frac{AO}{OE}$ ebenfalls gleich $\frac{1}{10}$ gewählt ist, so muss das zur horizontalen Einstellung des Balkens nothwendige Gewicht P ein Hundertstel von Q sein.

Die auf die Wagschale aufzulegenden Gewichte P lassen sich offenbar durch ein Laufgewicht V ersetzen. Das Gegengewicht R muss so regulirt sein, dass sich die Brücke $CDC'D'$ und die Schale P bei unbelasteter Wage das Gleichgewicht halten, wenn das Laufgewicht V auf dem Nullpunkt der Theilung des Balkens steht. In diesem Fall muss die bewegliche Marke x der festen Marke y gerade gegenüber stehen.

Gut construirte Apparate dieser Art können auch zu wissenschaftlichen Zwecken werthvolle Dienste leisten. In Fig. 149 ist eine mit einem Registrirapparat HPR (Vgl. das Capitel über Barometer) versehene Brückenwage von Rédier abgebildet, welche bei einer Belastung von 300 Kilogramm noch Bruchtheile von einem Gramm zu wägen erlaubt. Es können damit z. B. die Gewichtsverluste gemessen werden, welche durch Verdampfung von Wasser

in einem Behälter, durch Wasserausscheidung der Pflanzen, durch Verbrennung einer Kerze u. s. w. entstehen.

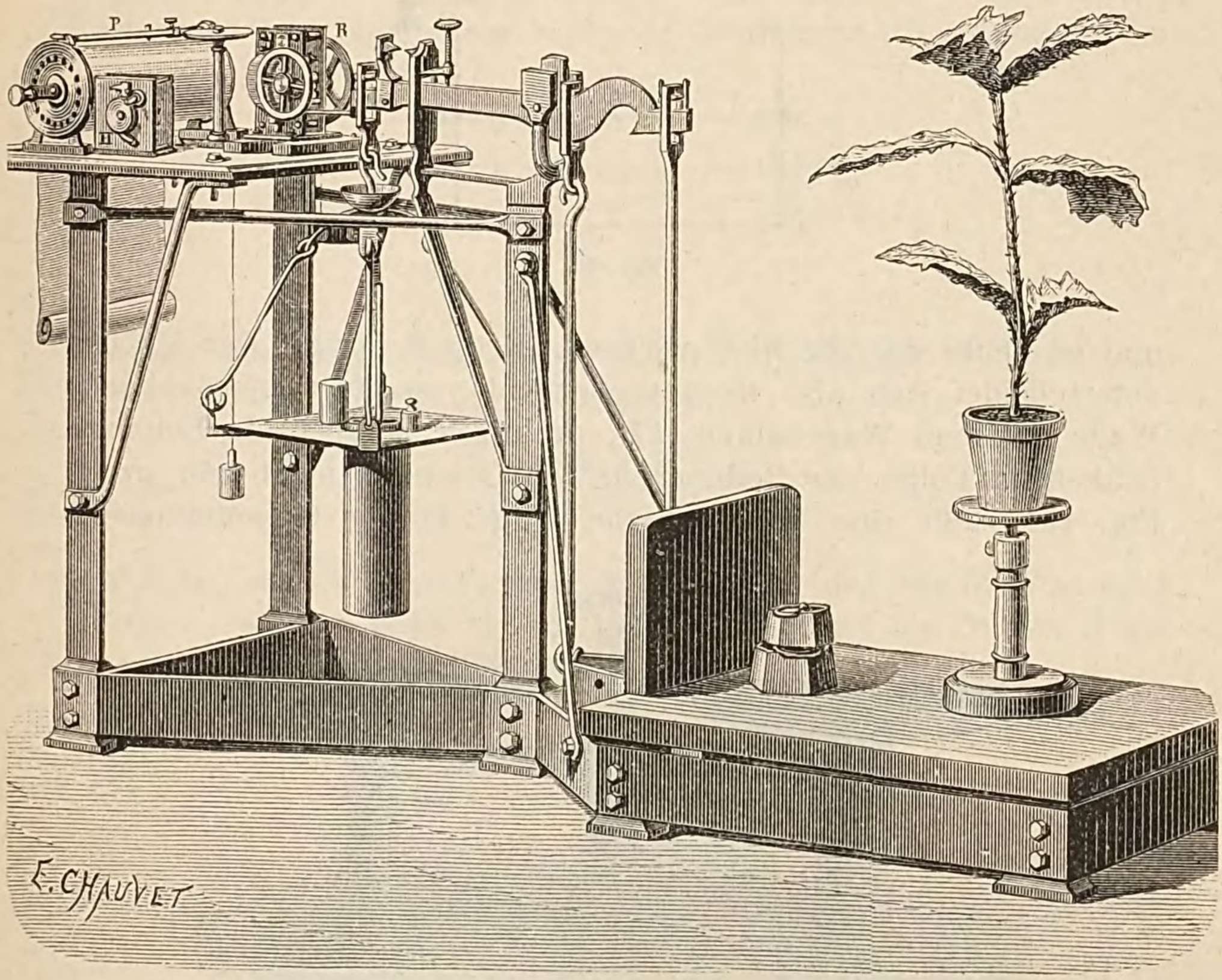


Fig. 149.

Seit einiger Zeit sind vielfach die von *Roberval* angegebenen Tafelwagen, bei welchen die Schalen oberhalb des Balkens angebracht sind, im Gebrauch.

Die Roberval'sche Wage besteht im wesentlichen aus zwei gleichen und parallelen Balken AB, $A'B'$, die um ihre Mittelpunkte O, O' drehbar und durch zwei senkrechte Stangen AA', BB' verbunden sind. Diese beiden in A, A' und B, B' beweglichen Stangen sind nach oben verlängert und tragen die Schalen. Ein Gewicht P an irgend einem Punkte M auf einer der beiden Schalen wirkt offenbar genau ebenso, als wenn es sich im Punkte C am Ende der Stange BB' befände. Denken wir uns nämlich in C die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte P und $-P$ angebracht, so haben wir ein Kräftepaar P, $-P$ mit dem Hebelarm

CM und eine in C angreifende Kraft P. Da die Schale mit der Stange BB' fest verbunden ist, so hat das Kräftepaar keine Wirkung,

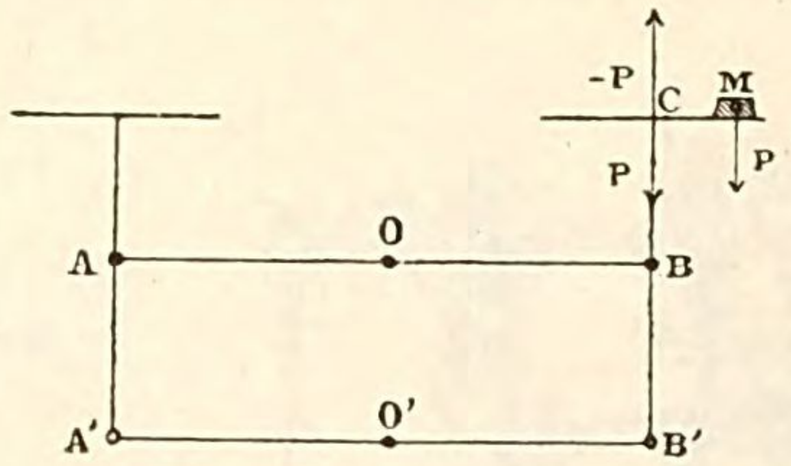


Fig. 150.

und es bleibt nur die in C wirkende Kraft P übrig. Der Apparat unterscheidet sich also theoretisch nicht von einer gewöhnlichen Wage mit dem Wagebalken AB; praktisch ist aber die Empfindlichkeit in Folge der Reibung in den Gelenken nicht sehr gross. Fig. 151 stellt eine Roberval'sche Wage in der Gesammtansicht

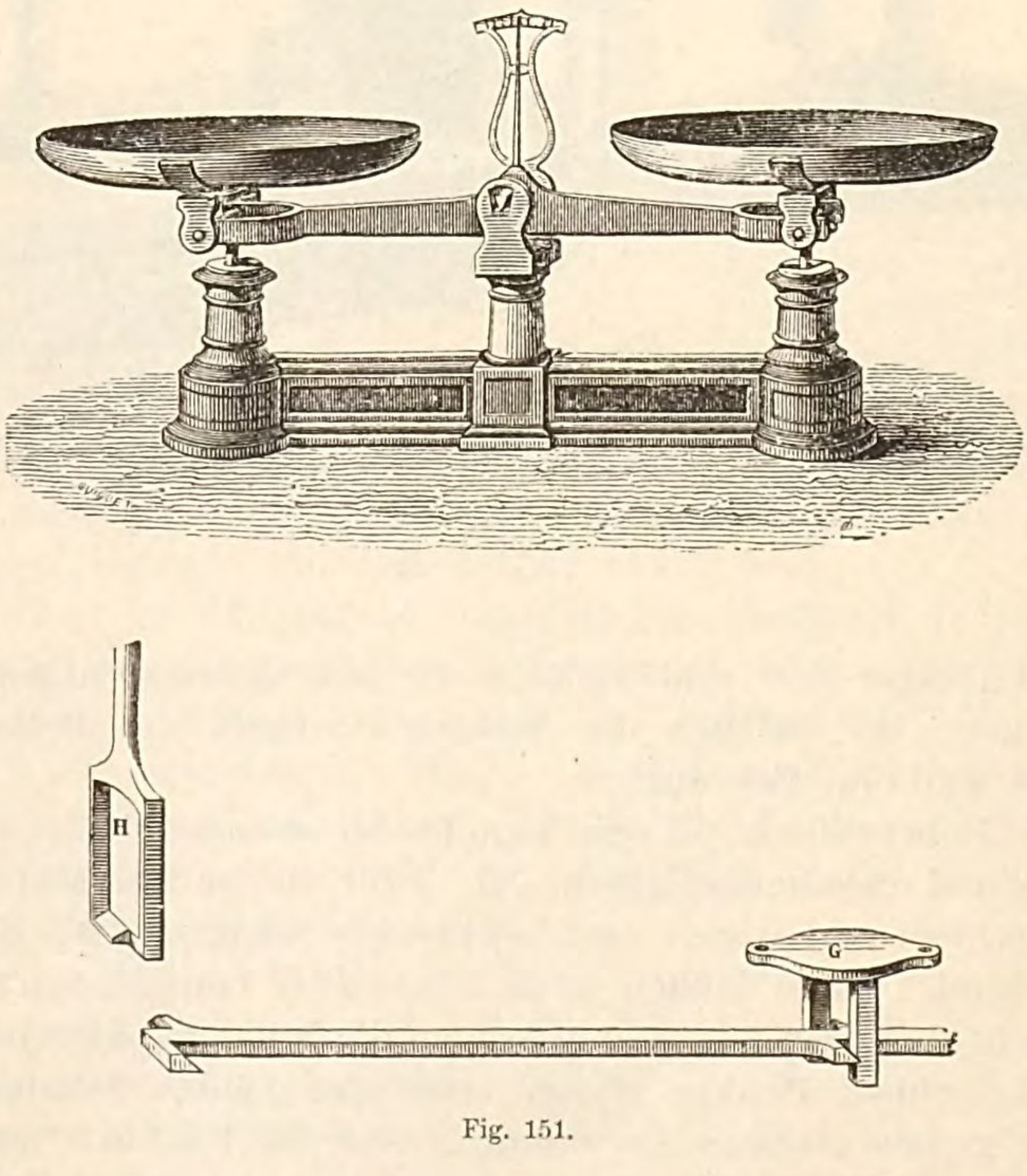


Fig. 151.

dar; ferner ist ein Theil des unteren Balkens $A'B'$, sowie ein Bügel H, wie sie sich an den unteren Enden der vertikalen Verbindungs-

stangen AA', BB' befinden, und das entsprechende feste Lager G, welches die Achse O' in einer horizontalen Ebene festhält, besonders abgebildet.

Der Apparat ist trotz aller die Beweglichkeit steigernder Verbesserungen noch unvollkommen; vielfach wird demselben die

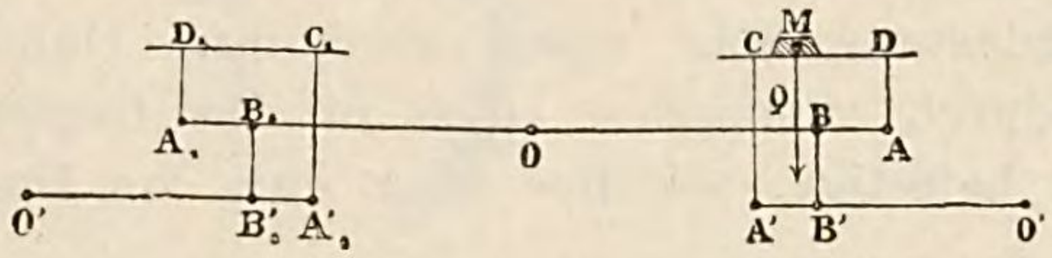


Fig. 152.

Béranger'sche Wage vorgezogen, welche eigentlich aus zwei Brückenwagen besteht. Wenn die Bedingung

$$\frac{O'A'}{O'B'} = \frac{OA}{OB}$$

erfüllt ist, so übt das in irgend einem Punkte der Schale aufgelegte Gewicht dieselbe Wirkung aus, als ob es direct im Punkte A an dem Wagebalken angreifen würde.

Figur 153 stellt das gegenwärtig von Trayvou construirte

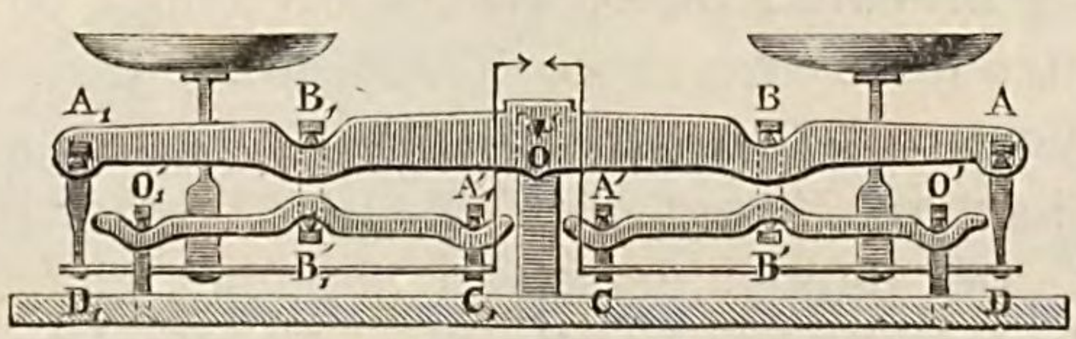


Fig. 153.

Modell dar, bei welchem jedes Gelenk aus einem beweglichen Lager besteht, in dessen Rinne die Schneide ruht.

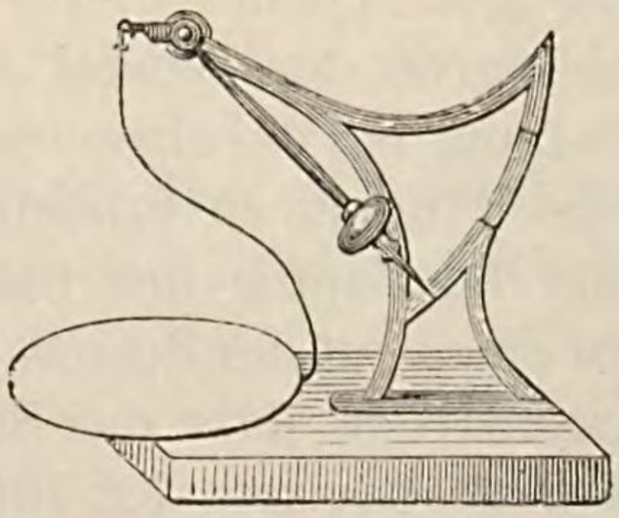


Fig. 154.

Allgemein bekannt ist auch die *Briefwage*, welche das Gewicht direct anzeigt. Dujour wendet das Princip derselben auch auf

grössere Wagen für Gepäckstücke im Post- und Bahnverkehr an. Nach der allgemeinen, oben entwickelten Formel ist die Tangente des Neigungswinkels dem Gewichtsunterschied auf beiden Wagschalen proportional. Auf der Scale des Apparates rücken daher die Theilstriche, welche gleichen Gewichtszulagen entsprechen, immer näher zusammen, so dass die Genauigkeit der Wägung bei wachsender Belastung sehr rasch abnimmt. Dujour hat diesen Übelstand dadurch vermieden, dass er das Gegengewicht P an ein Stahlband befestigt, welches über eine am Ende des langen

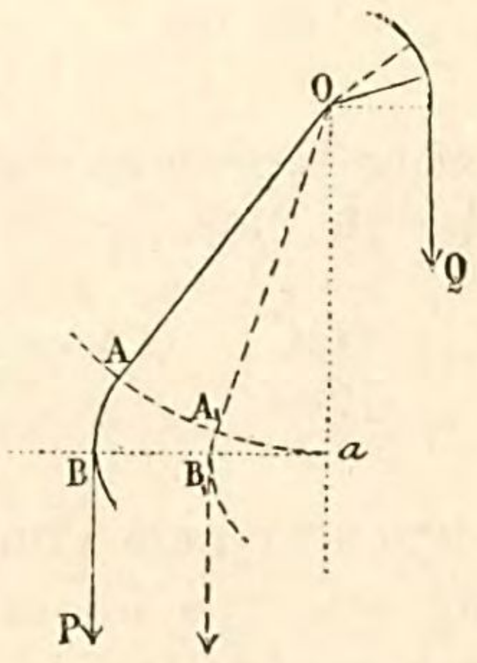


Fig. 155.

Hebelarmes angebrachte Kreisevolvente AB gelegt ist. Der kleine Hebelarm besitzt die Form eines Kreissectors, dessen Mittelpunkt im Drehpunkt liegt und über den ebenfalls ein Stahlband geschlungen ist. An dem letzteren hängt die Zugstange Q einer Béranger'schen Brückenwage. Der Balken derselben liegt mit einem beweglichen Hütchen auf einem cylindrischen Zapfen. Die Kreisform des kleinen Hebels hat zur Folge, dass der Arm desselben für jeden Neigungswinkel constant bleibt, und es muss daher auf dieser Seite das Moment stets proportional der Belastung sein. Der Hebelarm auf der anderen Seite ändert sich proportional dem Bogen, welchen das Ende A des geradlinigen Theiles dieses Balkens beschreibt.[1]) Die Last wird demnach durch den Winkel gemessen, um den sich der Balken von der Stellung bei unbelasteter Wage OA_1 aus dreht. Um die Ablesung dieses Winkels zu erleichtern, vergrössert man ihn mit Hülfe eines auf die Zapfen des Balkens aufgesetzten gezahnten Kreissectors und eines auf der Zeigerachse sitzenden Triebes. Es sei noch darauf hingewiesen, dass das Stahlband auf der Seite des Gegengewichtes sich in horizontaler Richtung wie das Laufgewicht einer gewöhnlichen römischen Schnellwage verschiebt; man

---

[1]) Da AB die Evolvente des Kreises aA_1A vorstellt, so ist nach der Definition $aB =$ Bogen Aa.

hat daher dieser Dujour'schen Wage auch den Namen automatische Schnellwage beigelegt.

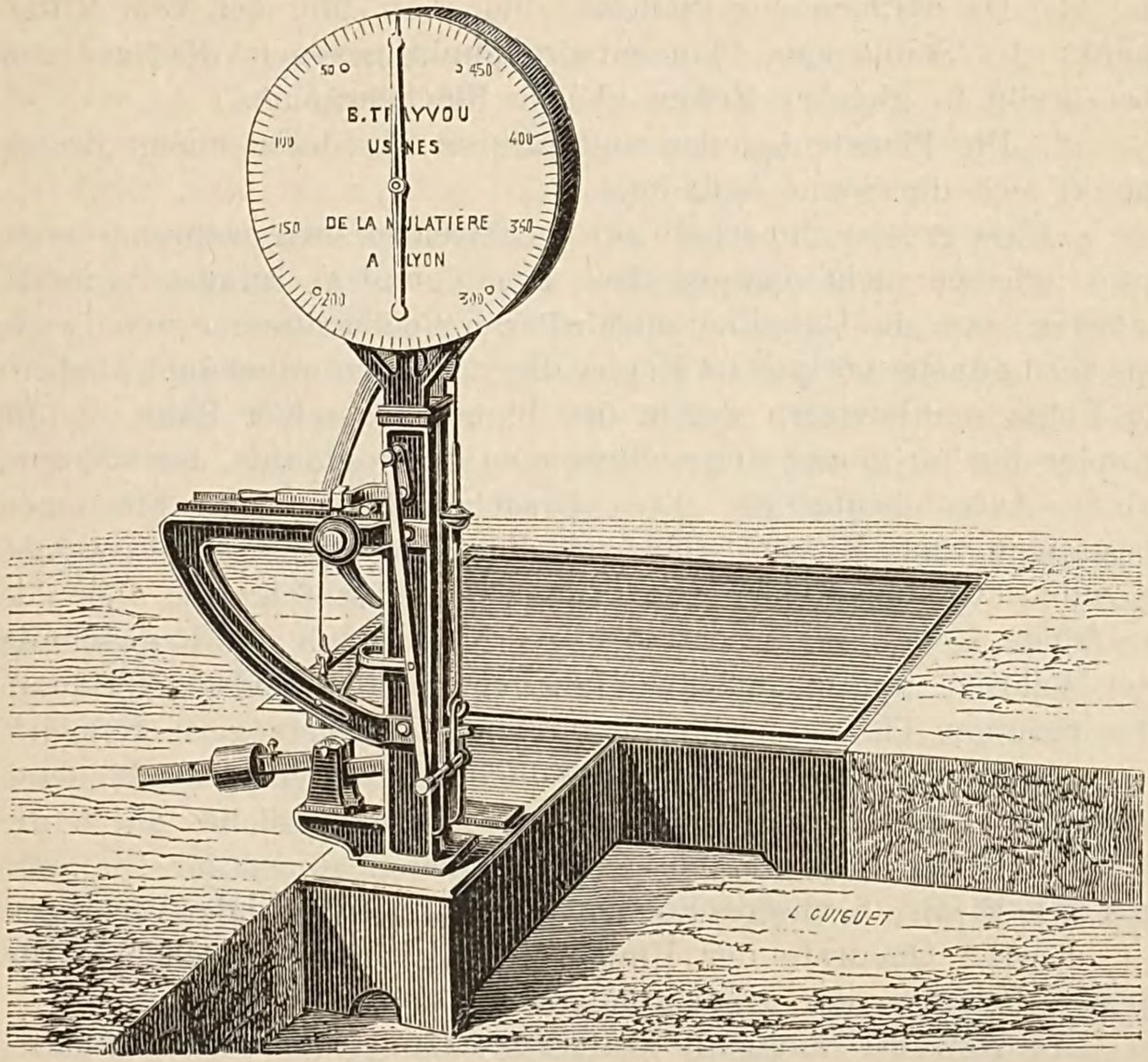


Fig. 156.

Alle diese Instrumente geben das relative Gewicht. Zur Bestimmung des absoluten Gewichtes müsste man irgend ein Dynamometer z. B. eine Federwage (**32**) verwenden.

IV. Allgemeine Gravitation.

100. Entdeckung der allgemeinen Gravitation. — Gestützt auf die mit grosser Geduld und Sorgfalt während 35 Jahren von Tycho-Brahe[1]) angestellten Beobachtungen gelangte Kepler[2]) nach neunjähriger unermüdlicher Thätigkeit dahin, die Bewegung

---

[1]) Tycho-Brahe, geb. 1546 in Knudstrup (Dänemark), gestorben 1601 in Prag. Gesammelte Werke, Prag 1611.

[2]) Kepler, geb. 1571 in Weil (Würtemberg), gest. 1630 in Regensburg; *Astronomia nova αἰτιολογητός, seu Physica cœlestis tradita commentariis de motibus stellæ Martis;* Pragæ, 1609.

des Planeten Mars[1]) durch zwei Gesetze darzustellen, von denen sich später zeigte, dass sie auch für die übrigen Planeten gelten.

1. Die Bahnen der Planeten sind eben, und der vom Mittelpunkt der Sonne zum Planetenmittelpunkt gezogene Radiusvector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

„Diese grossen, innerhalb gewisser Grenzen ewig wahren Gesetze sind indessen nicht mathematisch genau, und es ist äusserst merkwürdig, dass die Unvollkommenheit der Beobachtungen von Tycho insofern günstig wirkte, als Kepler die Störungen unbekannt blieben; in Folge der letzteren weicht der Planet aus seiner Bahn, in die Kepler ihn für immer eingeschlossen zu haben glaubte, fortwährend ab.[2]) Diese heute aus ihren Ursachen berechneten Störungen bestätigen ohne Zweifel glänzend die Gravitationstheorie, welche Newton aus den Kepler'schen Gesetzen selbst folgerte; aber die verfrühte Kenntniss dieser Störungen hätte doch der Erforschung der Wahrheit unlösliche Schwierigkeiten bereiten und den Triumph der richtigen Theorie vielleicht auf lange Zeit verzögern können".

Nach der Auffindung der individuellen Bewegung jedes Planeten entdeckte Kepler[3]) noch das berühmte Gesetz, welches durch die Beziehung der grossen Achsen der Planetenbahnen zur Umlaufszeit alle Elemente unseres Sonnensystems unter einander verbindet.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Achsen.

Als Newton[4]) kaum die Universität Cambridge verlassen hatte, suchte er schon zum ersten Mal die Kräfte zu messen, welche die Bewegung der Himmelskörper leiten, und von da ab beschäftigte er sich fortwährend mit dieser Frage. Als eines Tages ein Apfel vom Baume vor seine Füsse fiel, fragte er sich, ob die alle Körper nach dem Erdmittelpunkt treibende Kraft auch Grenzen habe. „Sie

---

[1]) Kopernikus, geb. 1473 in Thorn (Westpreussen), gest. 1543 in Frauenburg, hatte die doppelte Bewegung der Erde aus der daraus sich ergebenden Einfachheit und Regelmässigkeit der Erscheinungen gefolgert.

[2]) „Beim Versuch alle Stellungen des Mars auf einem Kreise anzuordnen erhielt Kepler Abweichungen von 7 bis 8 Minuten. Obgleich dies recht wenig war, zögerte Kepler doch nicht, den Kreis zu verwerfen und ihn durch eine Ellipse zu ersetzen: ‚Die göttliche Güte gab uns in Tycho einen so genauen Beobachter, dass ein Fehler von 8 Minuten unmöglich ist'. Dieses Vertrauen rettete alles; wenn aber Kepler von 8 Secunden hätte dasselbe sagen können wäre alles vergeblich gewesen".

[3]) Kepler, Harmonices mundi libri V; Lincii 1619.

[4]) Newton, geb. 1642 in Woolsthorpe (Lincoln'shire) gest. 1727 in Kensington; *Philosophiæ naturalis principia mathematica;* London 1687.

wirkt auf den höchsten Bergen, besteht sie auch noch in der zehn-, hundert-, tausendfachen Höhe derselben? Erstreckt sie sich bis zum Mond? Ein weniger durchdringender Geist hätte sofort die scheinbar berechtigte Antwort gegeben, dass der Mond, wenn er von der Erde angezogen würde, auch auf dieselbe fallen müsse, da er ja nicht unterstützt ist, und dass sich daher die Wirkungssphäre der Erde nicht bis zu ihm erstrecken könne. Newton kam gerade zum entgegengesetzten Schluss. Ist nicht aus der täglichen Erfahrung bekannt, dass ein horizontal geschleuderter Körper in um so grösserer Entfernung zur Erde fällt, je grösser seine anfängliche Höhe und Geschwindigkeit gewesen ist. Man denke sich auf die Spitze eines Thurmes von 90 000 Meilen Höhe (die Entfernung des Mondes von der Erde) versetzt und werfe einen Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit von einer Viertelmeile per Secunde in horizontaler Richtung fort (Geschwindigkeit des Mondes); wird derselbe nicht offenbar in einer grösseren Entfernung als die Länge des Erdradius, welche nur 1500 Meilen beträgt, herunterfallen? Da der Körper bei dieser Bewegung nichts von seiner Geschwindigkeit verliert, so erhält er gewissermaassen fortwährend einen Antrieb in horizontaler Richtung, und die gleiche Schwere, welche einen Apfel auf die Erdoberfläche zu fallen veranlasst, hält im Gegentheil den Mond in constanter Entfernung, ohne ihn jemals auf unsern Erdball, dessen Dimensionen zu gering sind, herunter ziehen zu können“.

Die nächste Ursache der Erscheinungen war entdeckt (1666); es blieb noch übrig, das Gefundene streng zu beweisen. Wenn aber die Sonne die Planeten anzieht, die Planeten sich wieder gegenseitig beeinflussen, wenn jeder Theil des Universum auf alle anderen einwirkt, wie soll man aus diesem Chaos die Rolle und Grösse jeder Kraft entwirren, und durch strenge Entwicklung trennen, was so enge zusammen hängt?

„Es wäre ein vergebliches Bemühen gewesen, ein derartiges Problem auf einmal lösen zu wollen, und Newton musste es vor allem vereinfachen. Er ersetzte zuerst die Planetenbahnen durch Kreise, in deren Centrum die Sonne steht, und die Mondbahn durch einen um die Erde beschriebenen, in Bezug auf dieselbe festen Kreis. Die Sätze von Huyghens erlauben, Grösse und Richtung derjenigen Kraft zu ermitteln, welche diese einfachen Bewegungen unterhalten kann; das dritte Kepler'sche Gesetz zeigt dann, in welchem Verhältniss diese Kraft sich mit der Entfernung verkleinern muss“.

Dieser erste Schritt bot nur geringe Schwierigkeiten. Drei hervorragende Londoner Gelehrte, Hooke, Wrenn und Halley, hatten

sich schon mit Erfolg in dieser Richtung versucht. Aber erst Newton konnte in seinem grossartigen Werke, *Principia* (welches in den Jahren 1684 und 1685 geschrieben zu sein scheint), zeigen, dass die allgemeine Anziehung das ganze Weltall umfasst, und eine Fülle von Erscheinungen auf sie zurückzuführen ist. Sie allein ordnet den Lauf der Gestirne, die wechselnden Erhebungen des Oceans „den ungleichmässigen Lauf des Mondes in seiner stets sich ändernden Bahn, die säcularen Schwankungen der Ebenen, in welchen sich die Planeten bewegen, die kaum merkliche, aber constante Veränderung ihrer Bahnen, und die langsame, regelmässige Bewegung der Erdachse, welche sich in Folge der Abplattung der Erde unmittelbar aus der allgemeinen Attraction ergiebt. Alle grossen Erscheinungen unseres Weltsystemes waren dadurch in eine bewunderungswürdige Einheitlichkeit gebracht, und die physikalische Theorie des Weltalls war auf ein einziges Princip zurückgeführt.[1])“

101. Herleitung des Newton'schen Gesetzes aus den Kepler'schen. — *Erste Annäherung.* — Die von den Planeten beschriebenen Ellipsen haben alle eine sehr geringe Excentricität. Wenn wir die Bahnen als Kreise betrachten, so fordert das erste Kepler'sche Gesetz, dass jeder Planet seinen Kreis um die Sonne mit gleichförmiger Bewegung beschreibe. Wir wissen aber (**22**), dass eine derartige Bewegung eine gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtete Kraft F gleich

$$F = m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

voraussetzt. Für einen zweiten Planeten besteht die Gleichung

$$F' = m' \frac{4\pi^2 r'}{T'^2};$$

hieraus folgt

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{r}{r'} \cdot \frac{T'^2}{T^2}.$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz ist aber

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{r'^3}{r^3};$$

---

[1]) Bertrand, *les Fondateurs de l'astronomie moderne.*

wir haben daher die Beziehung

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{r'^2}{r^2}$$

oder

$$\frac{F}{\frac{m}{r^2}} = \frac{F'}{\frac{m'}{r'^2}} = \mu,$$

wo μ eine für alle Planeten constante Grösse bedeutet. Es ist also endlich

$$F = \frac{m\mu}{r^2} \cdot = \frac{m \cdot 4\pi^2 r}{T^2}$$

Auf diese einfache Weise fand Newton zuerst das bekannte Gesetz, welches seinen Namen unsterblich gemacht hat.

Strenge Rechnung. — Newton nahm später die Frage unter Voraussetzung einer elliptischen Bewegung wieder auf; wir werden in dem Gang der Rechnung etwas von seinem Beweise abweichen.

Das erste Kepler'sche Gesetz bestimmt die Richtung der Kraft, welche den Planeten anzieht. Es sei nämlich MM' ein in der sehr

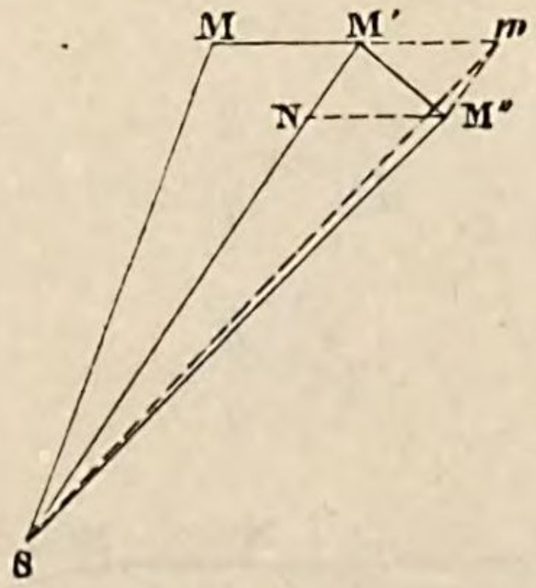


Fig. 157.

kleinen Zeit dt durchlaufenes Bahnelement; wenn keine Kraft auf den Planeten wirkte, so würde er in dem folgenden Zeitintervall dt in gerader Linie ein zweites Element $M'm = MM'$ zurücklegen. In Wirklichkeit beschreibt er das Element $M'M''$, und nach dem ersten Kepler'schen Gesetz ist die Fläche $SM'M''$ gleich der Fläche SMM'. Es ist aber Fläche $SM'm$ gleich Fläche SMM', da die beiden Dreiecke SMM' und $SM'm$ gleiche Basis $MM' = M'm$ und gleiche Höhe haben. Folglich ist auch Fläche $SM'M''$ gleich Fläche $SM'm$; die beiden Dreiecke $SM'M''$ und $SM'm$ haben aber

gleiche Basis SM' und es liegen deshalb ihre Spitzen M'' und m auf einer Parallelen zur Basis: die Gerade $M''m$ ist parallel zu SM'. Vervollständigen wir das Parallelogramm $M'mM''N$, so kann der in dem zweiten Zeitintervall dt wirklich zurückgelegte Weg $M'M''$ als geometrische Summe zweier Wege betrachtet werden; der eine, $M'm$, wird in Folge der erlangten Geschwindigkeit beschrieben, während der andere Weg, $M'N$, unter Einwirkung einer Kraft von der Richtung $M'S$ zurückgelegt wird. In dieser Weise folgt aus dem Gesetze der Flächen, dass die auf den Planeten wirkende Kraft gegen den Sonnenmittelpunkt gerichtet ist.

Das Flächengesetz kann auf verschiedene Arten umgeformt werden; wir wollen nur die folgende Form angeben, da dieselbe später von Nutzen sein wird. Es sei $\frac{k}{2}$ die in der Zeiteinheit beschriebene Fläche, dann ist das in der sehr kurzen Zeit dt zurückgelegte Flächenelement $MSM' = \frac{k}{2}dt$; diese Fläche ist aber auch gleich $ds\,\frac{q}{2}$, wenn man $MM' = ds$ setzt und mit q die Länge der vom Sonnenmittelpunkt S auf die Richtung MM' gefällten Senkrechten bezeichnet.

Es ist also

$$\frac{k}{2}\,dt = ds\,\frac{q}{2},$$

oder

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k}{q},$$

das heisst,

$$v = \frac{k}{q},$$

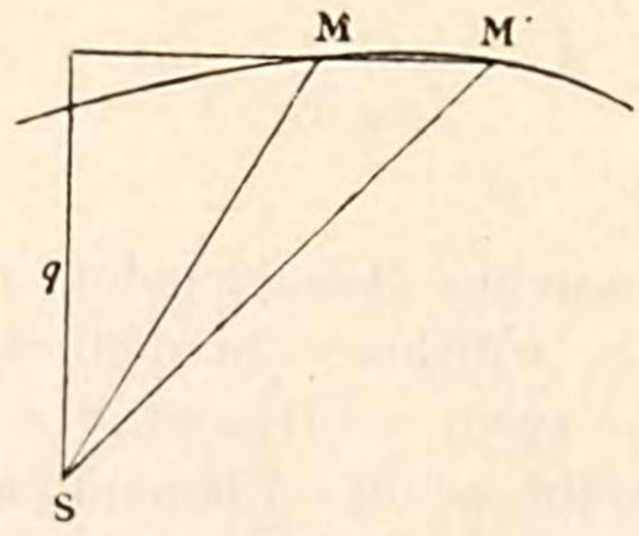


Fig. 158.

die Geschwindigkeit in einem Punkte der Bahn ist somit der vom Sonnenmittelpunkt auf die Tangente desselben Punktes gefällten Senkrechten umgekehrt proportional.

Das zweite Kepler'sche Gesetz liefert in jedem Augenblick die Grösse der Kraft. Der Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt S die Sonne steht. Es sei F' der andere Brennpunkt und q' die von diesem Brennpunkt auf die Tangente in einem Punkte M gefällte Senkrechte $F'C$, während q die vom

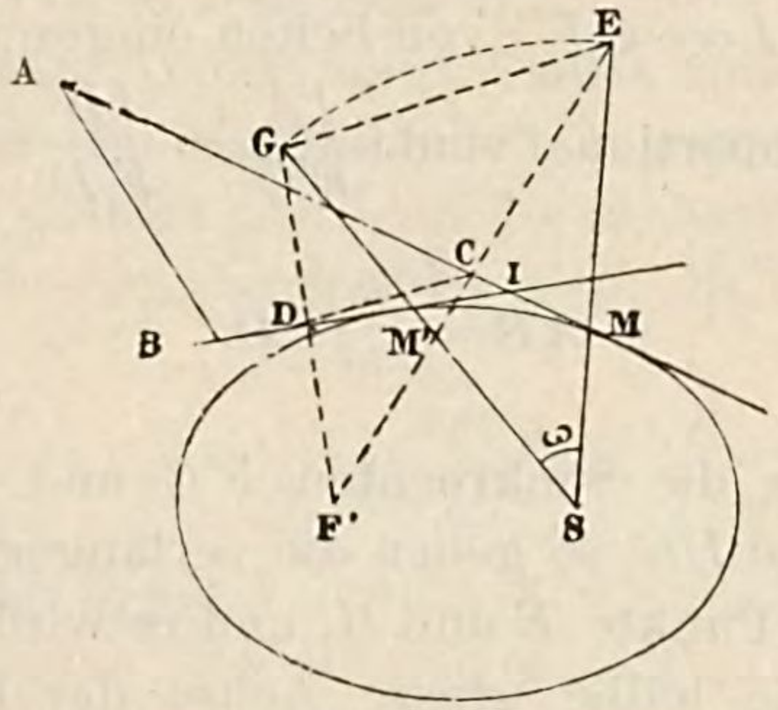


Fig. 159.

Brennpunkt S aus gefällte Senkrechte darstellt; dann ist bekanntlich

$$qq' = b^2,$$

wo b die halbe kleine Achse der Ellipse bedeutet. Die Beziehung

$$v = \frac{k}{q}$$

kann also geschrieben werden

$$v = \frac{kq'}{b^2}.$$

Betrachten wir einen dem Punkte M sehr nahe liegenden Punkt M',[1]) und tragen auf den Tangenten dieser beiden Punkte von ihrem Schnittpunkt I aus die Längen IA und IB ab, welche den Geschwindigkeiten in M und M' gleich sein sollen:

$$IA = \frac{k}{b^2} F'C,$$

$$IB = \frac{k}{b^2} F'D,$$

---

[1]) Um grössere Deutlichkeit zu gewinnen, mussten die Punkte M und M' weit auseinander gerückt werden.

wo $F'D$ die von F' auf die Tangente $M'B$ gefällte Senkrechte bedeutet; dann wird AB (cf. Anm. p. 261) die Änderung der Geschwindigkeit während der Zeit dt darstellen, und $\frac{AB}{dt}$ die Beschleunigung, deren Grösse wir bestimmen wollen.

Die beiden Dreiecke IAB und $F'CD$ sind ähnlich, da ein gleicher Winkel ($\sphericalangle I = \sphericalangle F'$) von Seiten eingeschlossen wird, deren Längen einander proportional sind $\left(\frac{IA}{F'C} = \frac{IB}{F'D} = \frac{k}{b^2}\right)$; es ist daher

$$AB = \frac{k}{b^2} CD.$$

Verlängern wir die Senkrechten $F'C$ und $F'D$, jede um die eigene Länge CE und DG, so gehen die verlängerten Leitstrahlen SM und SM' durch die Punkte E und G, und es wird $SE = SG = 2a$,[1]) wenn wir mit a die halbe grosse Achse der Ellipse bezeichnen. Es ist ferner

$$AB = \frac{k}{b^2} \frac{GE}{2}$$

oder, wenn ω den sehr kleinen Winkel MSM' bedeutet, und wenn man beachtet, dass in dem sehr kleinen Dreieck GES die Seite GE gleich $2a\omega$ ist,

$$AB = \frac{k}{b^2} a\omega.$$

Nach dem Flächensatz ist aber das Flächenelement MSM' oder $\frac{1}{2} r^2 \omega$ (r ist der Radiusvector SM) gleich $\frac{k}{2} dt$. Es ist daher

$$AB = \frac{k}{b^2} a \frac{k dt}{r^2};$$

und die gesuchte Beschleunigung wird somit

$$\gamma = \frac{AB}{dt} = \frac{k^2 a}{b^2} \frac{1}{r^2},$$

oder wenn man $\frac{k^2 a}{b^2} = \mu$ setzt,

$$\gamma = \frac{\mu}{r^2}.$$

---

[1]) $F'M' + SM' = F'M + SM = 2a$
$F'M' = M'G$; $F'M = ME$ und daher
$M'G + SM' = ME + SM = 2a$, oder $SG = SE = 2a$. — K.

Die auf den Planet von der Masse m wirkende Kraft F ist:

$$F = m\gamma = \frac{m\mu}{r^2};$$

dieselbe steht im umgekehrten Verhältniss zum Quadrat der Entfernung zwischen Planet und Sonne.

Aus dem dritten Kepler'schen Gesetz folgt, dass bei gleicher Entfernung die auf die Masseneinheit der verschiedenen Planeten wirkende Kraft die gleiche ist, denn die in der Zeit T eines Umlaufes beschriebene Ellipse hat die Fläche πab; in der Zeiteinheit wird die Fläche

$$\frac{k}{2} = \frac{\pi ab}{T}$$

zurückgelegt; es ist daher

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz ist aber das Verhältniss $\frac{a^3}{T^2}$ unveränderlich, und deshalb ist auch μ für alle Planeten constant. Die Sonne zieht also die Masseneinheit irgend eines Planeten in gleicher Entfernung mit der gleichen Kraft an.

Wenn wir das Gesagte zusammenfassen, so lassen sich die Himmelserscheinungen unter der Annahme erklären, dass die Sonne jeden Planet mit einer Kraft anzieht, die der Masse desselben direct und dem Quadrat seiner Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional ist.

Hypothese von Newton. — Nachdem Newton so ohne irgend eine Hypothese sein Gesetz gefunden hatte, nahm er ganz allgemein an, dass zwei materielle Punkte m und m' sich gegenseitig mit einer ihrer Masse proportionalen und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportionalen Kraft anziehen: die in der Verbindungslinie zweier solcher Punkte wirkende Kraft ist also

$$\frac{fmm'}{r^2},$$

wenn f eine Constante bezeichnet, nämlich die Kraft, mit der sich zwei in der Einheit der Entfernung befindliche, der Einheit gleiche Massen anziehen. Diese Hypothese erklärt die Bewegung der Himmelskörper vollkommen, sie hat aber zur Aufklärung der Molecular-Erscheinungen noch nichts beigetragen.

102. Identität der Schwere und der allgemeinen Massenanziehung. — Die Schwere an der Erdoberfläche ist als die Resultante der Anziehungen aller Molecüle der Erde auf die Molecüle der auf ihrer Oberfläche befindlichen Körper anzusehen; mit anderen Worten, es liegt nahe, die Schwere als besonderen Fall der allgemeinen Gravitation zu betrachten. Wir wollen jetzt untersuchen, wie es sich damit verhält.

Zu diesem Zwecke werden wir zuerst *die Wirkung einer sehr dünnen Kugelschale auf einen Punkt bestimmen.* Newton hat diese Frage zuerst, aber auf einem umständlichen Wege gelöst; wir verfolgen die später von Maupertuis eingeschlagene Methode.

Die Masse des Punktes sei m. Wir wollen zuerst die Anziehung berechnen, welche eine Zone ausübt, die von dem Bogen zwischen zwei unendlich benachbarten Radien CM und CN begrenzt wird. Es soll $R = CM$ den Radius der Schale, $dR = MP$ ihre sehr geringe Dicke bezeichnen; denken wir uns die Zone in sehr kleine Elemente getheilt, so übt jedes Element in der Richtung

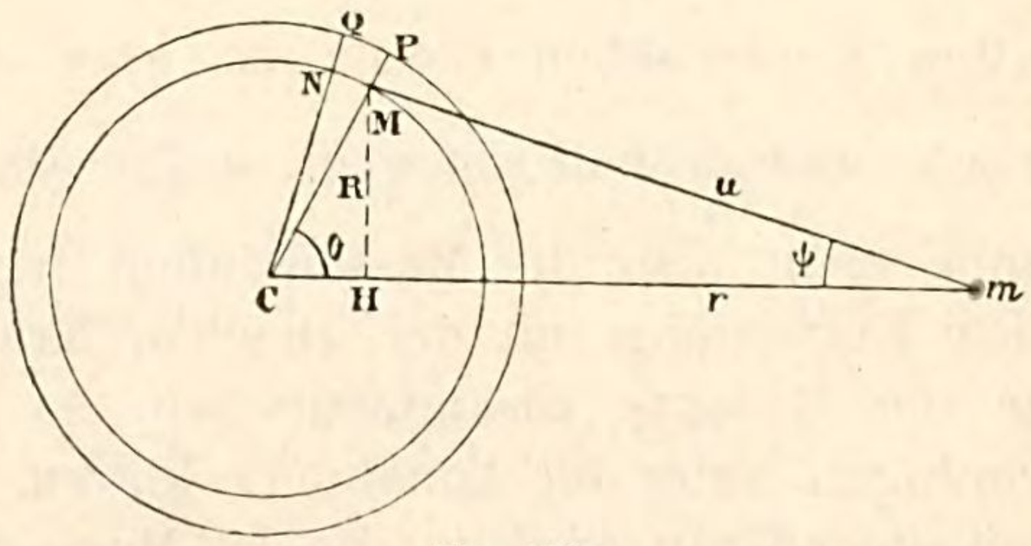


Fig. 160.

seiner Verbindungslinie mit dem Punkte m die Anziehung

$$\frac{fmm'}{u^2}$$

aus, wo m' die Masse des Elementes und u seine Entfernung Mm vom Punkte m bedeutet. Diese Kraft kann in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in der Richtung Cm, die andere senkrecht zu dieser Linie liegt. Für die ganze Zone kommt die erstere allein in Betracht, und die Anziehung derselben ist die Summe der Componenten aller Elementaranziehungen in der Richtung Cm, also

$$\frac{fmM'}{u^2}\cos\psi,$$

wenn wir mit M' die Masse der Zone und mit ψ den Winkel zwischen

dem Radiusvector mM und Cm bezeichnen. Nach dem Satze von Guldin ist aber das Volumen der Zone gleich der Fläche des Rechteckes $MNPQ$, multiplicirt mit dem Umfang desjenigen Kreises, welchen der Schwerpunkt des Rechteckes beschreibt, wenn man ihn um die Achse Cm rotiren lässt, folglich gleich

$$Rd\vartheta \,.\, dR \,.\, 2\pi R \sin \vartheta,$$

wo ϑ der Winkel MCm ist. Die Anziehung der Zone auf den Punkt m beträgt daher, wenn ϱ die Dichte der Kugelschale bedeutet,

$$\frac{fm\varrho 2\pi R^2 dR \sin\vartheta d\vartheta}{u^2} \cos\psi,$$

und die Anziehung der ganzen Kugelschale beträgt

$$A = fm\varrho 2\pi R^2 dR \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{u^2} \cos\psi.$$

Die Integration lässt sich sehr einfach ausführen, wenn man u als Veränderliche wählt. Setzen wir $Cm = r$, so ist

$$u^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta;$$

durch Differentiation erhalten wir,

$$udu = Rr\sin\vartheta d\vartheta,$$

folglich

$$\sin\vartheta d\vartheta = \frac{udu}{Rr}.$$

Andererseits ist

$$\cos\psi = \frac{Hm}{u} = \frac{r - R\cos\vartheta}{u} = \frac{r^2 - R^2 + u^2}{2ru}.$$

Wir erhalten also

$$\int \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{u^2}\cos\psi = \frac{1}{2Rr^2}\int \frac{du}{u^2}(r^2 - R^2 + u^2)$$

$$= \frac{1}{2Rr^2}\left\{(r^2 - R^2)\int\frac{du}{u^2} + \int du\right\}.$$

Das unbestimmte Integral dieses Ausdrucks ist

$$\frac{1}{2Rr^2}\left\{-\frac{r^2 - R^2}{u} + u + \text{Const.}\right\}.$$

Bei der Einführung von Grenzen muss man zwei Fälle unterscheiden.

1. *Der Punkt m liegt ausserhalb.*

Hier geht ϑ von 0 bis π, u ändert sich von $r - R$ bis $r + R$, und das bestimmte Integral ist $\frac{1}{2Rr^2} 4R$; folglich wird

$$A = \frac{fm\varrho 4\pi R^2 dR}{r^2},$$

das heisst, die von einer homogenen, sehr dünnen Kugelschale auf einen ausserhalb gelegenen Punkt ausgeübte Anziehung ist dieselbe, als ob die Masse $\varrho 4\pi R^2 dR$ der Schale in ihrem Mittelpunkt C concentrirt wäre. Man darf daraus unmittelbar schliessen, dass die Anziehung einer homogenen Kugel, die man sich aus vielen concentrischen Schalen zusammengesetzt denken kann, auf einen ausserhalb liegenden Punkt eben so gross ist, als ob die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt concentrirt wäre.

2. *Der Punkt m liegt innerhalb.* — In diesem Falle sind die Grenzen $R - r$ und $R + r$; das bestimmte Integral ist Null, also

$$A = 0.$$

Die Wirkung einer homogenen, sehr dünnen Kugelschale auf einen im Inneren liegenden Punkt ist Null.

Dieser Satz ergiebt sich auch direct durch die sehr einfache Überlegung von Chasles, welche sich auch auf eine zwischen zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen, concentrischen Ellipsoiden eingeschlossene Schale anwenden lässt, wenn diese sehr dünn und homogen ist. Der Punkt m liege innerhalb einer solchen Schale. Wir zerschneiden den Raum in eine sehr grosse Anzahl von Kegeln oder Pyramiden mit sehr kleinem Öffnungswinkel, deren gemeinsame Spitze der Punkt m ist. Die beiden sehr kleinen, von einem der Doppelkegel aus der Schale ausgeschnittenen Volumina, können wir als Prismen betrachten, deren Höhen die zwischen den beiden Ellipsoidenflächen liegenden gleichen Stücke der Normalen, und deren Basis die Flächenstücke ω und ω' bilden, welche auf der äusseren Fläche ausgeschnitten werden; die zwei Elementar-Volumina sind also $h\omega$ und $h\omega'$, und die von ihnen in entgegengesetztem Sinne ausgeübten Anziehungen auf den Punkt m betragen:

$$\frac{fm\varrho h\omega}{u^2} \text{ und } \frac{fm\varrho h\omega'}{u'^2}.$$

Es ist aber $\frac{\omega}{u^2} = \frac{\omega'}{u'^2}$, und es heben sich deshalb die beiden entgegengesetzten Wirkungen auf. Da dies bei allen Elementar-Prismen stattfindet, so muss auch die Resultante aller Kräfte gleich Null sein.

Die Anziehung einer homogenen oder aus concentrischen, homogenen Schichten zusammengesetzten Kugelschale von endlicher Dicke auf einen in ihrem Inneren gelegenen Punkt ist demnach Null.

Aus diesem Resultate folgt ohne weiteres, *dass die Schwere nur ein besonderer Fall der allgemeinen Gravitation ist.* Denn

1. Nach dem vorhergehenden Satz ist die Anziehung der Erde, wenn wir dieselbe als eine Kugel ansehen, auf einen ausserhalb gelegenen Punkt ebenso gross, als ob die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkt concentrirt wäre. In der That ist die Richtung der Schwere an irgend einem Punkte der Erdkugel senkrecht zur Oberfläche ruhender Flüssigkeiten und daher nach dem Erdmittelpunkt gerichtet.

2. Die Beschleunigung, welche Körpern von verschiedener Masse durch die Anziehung ertheilt wird, ist in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde gleich gross. Es steht fest, dass alle Körper an der Erdoberfläche unter dem Einfluss der Schwere gleich schnell fallen.

3. In verschiedenen Entfernungen vom Erdmittelpunkt ist die durch die Erde auf eine ausserhalb gelegene Masse ausgeübte Anziehung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional. Wir wollen, wie es Newton gethan hat, die Beschleunigung der Mondbewegung mit der Beschleunigung eines Körpers, der an der Erdoberfläche fällt, vergleichen. Newton stellte diese Rechnung sogleich, nachdem er das Anziehungsgesetz gefunden hatte, an, und setzte zu diesem Zwecke voraus, dass die Bewegung des Mondes um die Erde eine gleichförmige Kreisbewegung sei. Wir nehmen an, der von dem Mond um die Erde beschriebene Kreis besitze einen Radius von $60 \times 6\,360\,000$ Meter, und die Geschwindigkeit des Mondes betrage 1050 Meter in der Secunde; die Beschleunigung dieser Bewegung ist dann $\gamma = \frac{1\,050^2}{60 \times 6\,360\,000} = 0{,}002\,72.$

Wenn das allgemeine Gravitationsgesetz richtig ist, wenn also dieselbe Ursache den Fall eines Apfels auf der Erdoberfläche und die Bewegung des Mondes in einer Entfernung von 60 Erdradien hervorruft, so muss diese Beschleunigung 60^2 oder 3600 mal kleiner sein als die Beschleunigung $g = 9{,}8$ m an der Erdoberfläche; in der That ist diese Forderung, wie die Multiplication ergiebt, sehr nahe erfüllt.

Die gleiche Rechnung kann man auch unter der strengeren, wenn auch noch nicht ganz der Wirklichkeit entsprechenden Hypothese anstellen, dass die Mondbahn eine elliptische sei.[1]) Die Anziehung der Erde auf den Mond würde dann eine Beschleunigung

$$\gamma = \frac{\mu}{r^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}$$

erzeugen, wo a die halbe grosse Achse der Bahn des Mondes um die Erde, T die Dauer eines Umlaufes und r den Radiusvector bedeutet. Diese Beschleunigung muss aber gleich $g\frac{l^2}{r^2}$ sein, wenn l der Erdradius ist; es muss also die Gleichung

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{l^2}$$

bestehen. Führt man die Rechnung nach Einsetzung der Werthe von a, l und T aus, so findet man für g eine Zahl, die sich nicht merklich von derjenigen unterscheidet, welche durch die Messungen an der Erdoberfläche erhalten wird.

103. Änderungen der Schwere auf der Erdoberfläche. — Nachdem wir nun die Indentität der Schwere und der allgemeinen Gravitation festgestellt haben, können wir die Änderungen von g innerhalb und ausserhalb der Erde vorausberechnen.

Änderung mit der Höhe. — Es sei g die Beschleunigung an einem Punkte der Erde in Meereshöhe, g_1 die Beschleunigung an dem gleichen Orte, aber in der Höhe h. Betrachtet man die Erde als eine Kugel[2]) vom Radius R, so ist

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

oder

$$\frac{g_1}{g} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2};$$

---

[1]) Diese strengere Rechnung kann hier nicht gegeben werden.

[2]) Die Rechnungen lassen sich leicht auf elliptische Form ausdehnen. (Siehe *Résal, Mécanique céleste,* Attraction des sphéroïdes).

da aber an der Erdoberfläche $\frac{h}{R}$ immer sehr klein ist,[1]) so kann man das Glied $\frac{h^2}{R^2}$ vernachlässigen und schreiben

$$\frac{g_1}{g} = \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}},$$

oder mit demselben Grad der Annäherung

$$g_1 = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right),$$

d. h.

$$g_1 = g\ (1 - 0{,}000\,000\,314\,h).$$

Liegt der Punkt auf einer ausgedehnten Hochebene, deren Erdreich die Hälfte der mittleren Erddichte besitzen möge, so wird, unter Berücksichtigung der noch hinzukommenden Anziehung dieser Hochebene,

$$g_1 = g\left(\frac{\frac{8}{5}R}{\frac{8}{5}R + h}\right)^2,$$

oder

$$g_1 = g\left(1 - \frac{5h}{4R}\right),$$

d. h.

$$g_1 = g\,(1 - 0{,}000\,000\,196\,h).$$

Durch diese Formel wird die in einer ausgedehnten, in einer Höhe von h Meter beobachtete Beschleunigung g auf das Meeresniveau reducirt.[2])

Änderung mit der Breite. — Die Schwere muss sich mit der geographischen Breite aus zwei Ursachen ändern:

1. Durch die in Folge der Rotation der Erde um ihre Achse auftretende Centrifugalkraft (**52**).

---

[1]) Wenn man für R den mittleren Radius 6 371 000 m nimmt, ist $\frac{1}{R} = 0{,}000\,000\,16$.

[2]) Siehe Faye, C. R., XC, 1443; 1880.

2. Durch die Abplattung der Erde an den Polen, welche zwei einander entgegengesetzte Wirkungen im Gefolge hat; nämlich eine Verminderung der Anziehung auf einen Punkt in der Nähe des Äquators wegen der grösseren Entfernung vom Erdmittelpunkt, und eine Zunahme der Anziehung auf denselben Punkt, wegen der am Äquator wulstförmig angeordneten Masse.

Die durch die Centrifugalkraft verursachte Änderung der Beschleunigung, auf welche Huyghens zuerst aufmerksam machte, ist die wichtigste. Die Schwere g_0 am Äquator ist die Differenz

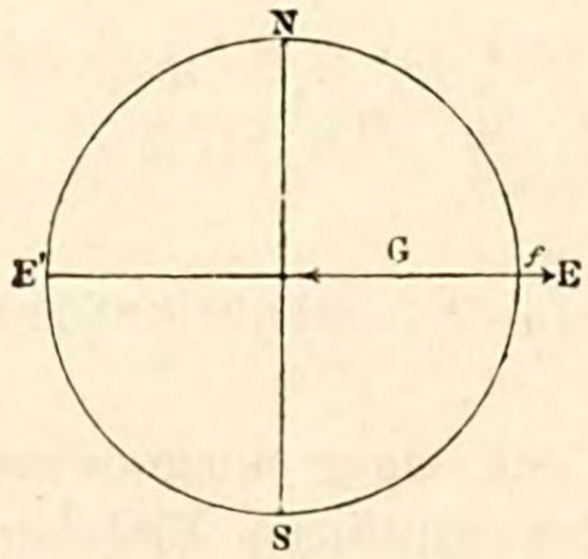


Fig. 161.

zwischen der Anziehung G und der ihr entgegenwirkenden Centrifugalkraft f. Es ist aber

$$f = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{2\pi . 40000000}{(86164)^2} = 0{,}0339 \text{ m};$$

demnach

$$g_0 = G - 0{,}0339 \text{ m}. \qquad (1)$$

Die Pendelbeobachtungen am Äquator ergeben[1])

$$g_0 = 9{,}7807 \text{ m}.$$

Nun ist nahezu

$$\frac{0{,}0339}{9{,}7807} = \frac{1}{289};$$

also beträgt die Centrifugalkraft am Äquator — und dort ist ihr Einfluss am grössten — $\frac{1}{289}$ der Schwere, oder auch sehr nahe[2])

---

[1]) Broch, *Accélération due à la pesanteur sous différentes latitudes et à différentes altitudes.* Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures. I, A. 1881.

[2]) Wenn $\frac{f}{g} = \frac{1}{289}$ wäre, würde $\frac{f}{G} = \frac{1}{290}$ sein.

$\frac{1}{289}$ der wirklichen Anziehung,

$$g_0 = G\left(1 - \frac{1}{289}\right); \qquad (2)$$

da $289 = 17^2$, so würde die Beschleunigung am Äquator Null werden, wenn sich die Erde siebzehnmal schneller drehte. Bei noch schnellerer Drehung würde die Centrifugalkraft überwiegen, und ein am Äquator liegender Körper würde von der Erde weggeschleudert.

Für andere Punkte der Erde können wir den Einfluss der Centrifugalkraft mit hinreichender Genauigkeit berechnen, wenn wir die Erde kugelförmig annehmen. Unter dieser Voraussetzung würde die Masseneinheit M in der geocentrischen Breite λ erstens durch die Anziehung $MA = G$ in der Richtung des Radius MO

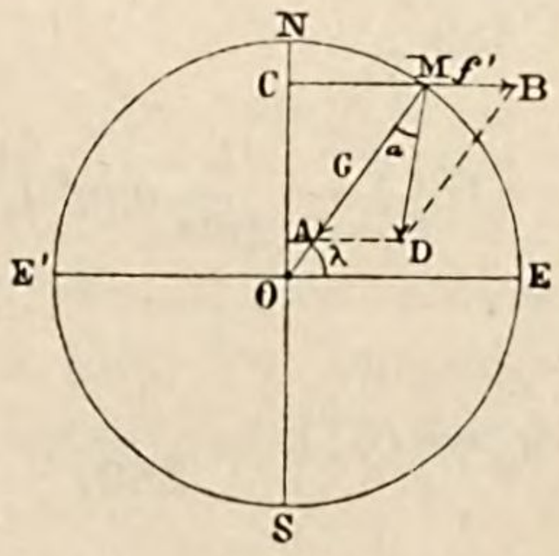


Fig. 162.

beeinflusst werden, zweitens durch die Centrifugalkraft $MB = f'$ in der Richtung des Radius CM eines vom Punkte M bei der Erdrotation beschriebenen Kreises; dieselbe hat die Grösse

$$f' = \frac{4\pi^2 R \cos\lambda}{T^2} = f\cos\lambda.$$

Die wirkliche Schwere g_λ, die Resultante MD dieser zwei Kräfte, ist die Ursache des *Gewichtes*; wir nennen demgemäss Gewicht eines Körpers diejenige Kraft, welche ihm die wirklich auftretende Beschleunigung g_λ mittheilt, und es sei daran erinnert, dass es bei allen Gleichgewichtsaufgaben nicht nöthig ist, auf die Centrifugalkraft Rücksicht zu nehmen, da das Gewicht schon die Resultante aus Anziehung und Centrifugalkraft ist. Das Loth MD an diesem Orte geht nicht mehr durch den Erdmittelpunkt; da nun die Oberfläche ruhender Flüssigkeiten an jedem Punkte nothwendigerweise senkrecht zum Lothe MD ist, so ist klar, dass die Kugelform wohl die Gleichgewichtsform für eine ruhende Masse, aber

nicht die Form der rotirenden Erde sein kann; aus diesem Grunde ist es verständlich, dass die Erde die Form eines linsenförmig abgeplatteten Rotationsellipsoides hat. Die geographische Breite des Punktes M ist der Winkel λ', den das Loth MD des Ortes mit dem Äquator EE' bildet; da MB sehr klein ist, so unterscheidet sich dieser Winkel nur unbedeutend von der geocentrischen Breite λ.

Wir wollen den Werth der Grösse $MD = g_\lambda$ zu bestimmen suchen. In dem Dreiecke MDA ist

$$g_\lambda = \sqrt{G^2 + f^2 \cos^2\lambda - 2Gf\cos^2\lambda}$$
$$= G\left(1 - 2\frac{f}{G}\cos^2\lambda + \frac{f^2}{G^2}\cos^2\lambda\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder, unter Vernachlässigung der zweiten und aller höheren Potenzen der kleinen Grösse $\frac{f}{G} = \frac{1}{289}$,

$$g_\lambda = G\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\lambda\right).$$

Nun haben wir aber

$$g_0 = G\left(1 - \frac{1}{289}\right);$$

es wird deshalb

$$g_\lambda = g_0\left(1 + \frac{1}{289}\sin^2\lambda\right). \qquad (3)$$

Den durch das Loth MD und den Radius MO in dem Dreieck MAD gebildeten Winkel α erhält man aus der Beziehung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} = \frac{AD}{MD} = \frac{f\cos\lambda}{g};$$

da α klein ist, kann man dafür schreiben

$$\alpha = \frac{f}{g}\sin\lambda\cos\lambda,$$

oder auch

$$\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{289}\sin 2\lambda,$$

und endlich

$$\alpha = \frac{1}{578}\sin 2\lambda. \qquad (4)$$

Der Winkel α ist am Äquator und am Pol Null, unter 45^0 hat er ein Maximum, nämlich $0^0\,11'\,30''$; wenn die geographische Breite λ' 45^0 beträgt, so ist die geocentrische Breite $\lambda = 44^0\,48'\,30''$.

Die Abplattung der Erde, d. h. ihre Form, welche nahezu die eines abgeplatteten Rotationsellipsoides ist, bewirkt, dass g vom Äquator zum Pol zunimmt. Diese Zunahme ist, wie oben erwähnt, die Differenz von zwei einander entgegengesetzten Wirkungen, und es ist bemerkenswerth, dass in dem mathematischen Ausdrucke einer jeden, ebenso wie bei der Gleichung, welche den Einfluss der Centrifugalkraft darstellt, das Glied $\sin^2\lambda$ vorkommt.[1]) Da also die Veränderung von g mit der Schwere die Summe von drei Ausdrücken mit $\sin^2\lambda$ ist, so kann dieselbe durch einen einzigen Ausdruck

$$g_\lambda = g_0\left(1 + \frac{1}{193}\sin^2\lambda\right) \qquad (5)$$

dargestellt werden; $\frac{1}{193}$ oder 0,005 19 ist die algebraische Summe der drei Coefficienten von $\sin^2\lambda$ in den drei genannten Correctionsgliedern. Das *absolute Gewicht* von einem Kilogramm vergrössert sich somit vom Äquator zum Pol um ungefähr fünf Gramm. Die gefundene Formel (5) kann auch in der Form

$$g_\lambda = 9{,}7807 + 0{,}0508\sin^2\lambda \qquad (5^a)$$

geschrieben werden.

Dieselben Resultate lassen sich durch die Länge des Secundenpendels $L = \frac{g}{\pi^2}$ ausdrücken. Wir erhalten dann

$$L_\lambda = L_0\left(1 + \frac{1}{193}\sin^2\lambda\right), \qquad (6)$$

oder

$$L_\lambda = 0{,}991\,00\text{ m} + 0{,}005\,14\sin^2\lambda. \qquad (6^a)$$

Demnach ändert sich die Länge des Secundenpendels vom Pol zum Äquator um ungefähr fünf Millimeter (**13**). Bezieht man alles auf

---

[1]) Der Einfluss des Wulstes am Äquator, insofern er die Entfernung der Körper vom Erdmittelpunkt vergrössert, kann leicht aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse bestimmt werden; etwas schwieriger ist die durch den Wulst bedingte Zunahme der Anziehung zu berechnen.

eine Breite von 45^0, so entsteht durch einfache Umformung die Gleichung

$$g_\lambda = g_{45}\left(1 - \frac{1}{386}\cos 2\lambda\right), \qquad (7)$$

oder

$$g_\lambda = 9{,}8061\,(1 - 0{,}002\,59\cos 2\lambda)\ \text{Meter}, \qquad (7^a)$$

und für die Pendellänge

$$L_\lambda = 0{,}993\,57\,(1 - 0{,}002\,59\cos 2\lambda)\ \text{Meter}. \qquad (8)$$

Der Einfluss der Abplattung der Erde wurde zuerst von Clairaut genau berechnet. Diese Abplattung μ wird durch die Excentricität $\frac{a-b}{a}$ der Ellipse eines Meridianschnittes ausgedrückt. Aus der Gesammtheit aller geodätischen Messungen ergiebt sich μ sehr nahe zu $\frac{1}{300}$. Clairaut berechnete die Anziehung eines aus concentrischen, homogenen Schichten von beliebiger Excentricität und Dichte gebildeten Sphäroides auf einen ausserhalb liegenden Punkt und fand, unter der Voraussetzung, dass das Sphäroid sich ursprünglich im flüssigen Zustand und im Gleichgewicht befand,

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} + \mu = \frac{5}{2}q, \qquad (9)$$

worin q das Verhältniss $\frac{f}{g_0}$ der Centrifugalkraft zur Schwere am Äquator bedeutet.

Aus dieser Gleichung kann $\frac{g_{90} - g_0}{g_0}$ gefunden werden, wenn μ bekannt ist.

Umgekehrt ergiebt sich aus ihr die Abplattung der Erde, wenn g in verschiedenen Breiten bestimmt wird. Die äusserst schwierigen geodätischen Messungen zur Ermittlung der Abplattung können also durch die Bestimmung der Länge des Secundenpendels ersetzt werden, und es wäre offenbar von grösstem Interesse, diesen kleinen Betrag von ungefähr fünf Millimeter, um welchen sich die Länge der Secundenpendel am Äquator und am Pol unterscheiden, recht genau zu messen.

Durch schliessliche Vereinigung der beiden Correctionen findet man als Werth von g am Punkte (λ, h) der Erdoberfläche in absolutem Maasse

$$g_{h,\lambda} = 980{,}61\,(1 - 0{,}002\,59\cos 2\lambda)\;(1 - 0{,}000\,000\,003\,14\,h),$$

oder

$$g_{\lambda.h} = 980{,}61 - 2{,}539\cos 2\lambda - 0{,}000\,003\,h; \qquad (10)$$

und die Länge des Secundenpendels an demselben Ort

$$L_{\lambda,h} = 99{,}357 - 0{,}257\,3\cos 2\lambda - 0{,}000\,000\,3\,h. \qquad (11)$$

104. Änderung von g im Innern der Erde. — Unter der Voraussetzung, dass die Erde homogen ist, lässt sich die Änderung von g im Innern der Erde leicht berechnen. Nehmen wir wieder an, die Erde sei eine Kugel, und legen wir durch den Punkt M im Innern eine zur Erdoberfläche concentrische Kugelfläche, so

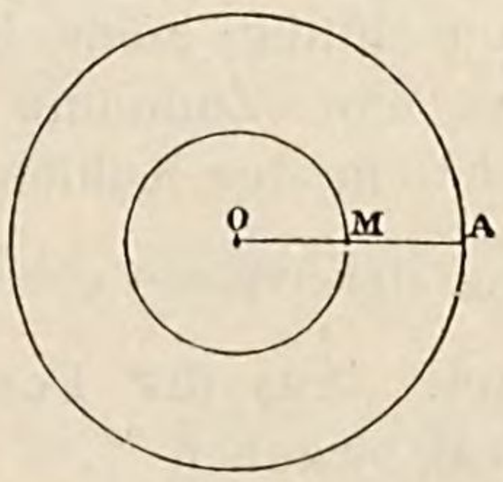


Fig. 163.

ist die Wirkung der Kugelschale MA auf den innerhalb derselben liegenden Punkt M gleich Null. Die Wirkung der Erde beschränkt sich auf den Kern OM, welcher sich so verhält, als ob seine ganze Masse im Punkt O vereinigt wäre. Bezeichen wir nun OM mit r, die Dichte der Erde mit D, und die Schwere mit g', so ist die Anziehung auf die Masseneinheit im Punkte M

$$g' = \frac{f\frac{4}{3}\pi r^3 D}{r^2} = \frac{4}{3} f\pi D r,$$

diese Anziehung ist also der Entfernung vom Mittelpunkt proportional. Denkt man sich einen Schacht durch die ganze Erde gelegt, und lassen wir an dem einen Ende einen schweren Körper fallen, so würde derselbe um den Erdmittelpunkt isochrone Schwingungen ausführen, wie ein Pendel bei geringer Schwingungsweite.

Die Erde ist aber durchaus nicht homogen; die Dichte der tieferen Schichten ist viel grösser als die Dichte der nahe an der Oberfläche gelegenen (**105**). Nimmt man an, dass die Erde aus homogenen, concentrischen Schichten bestehe, was nahezu der Fall sein wird, und setzt man weiter voraus, dass die Dichte dieser Schichten vom Mittelpunkt nach der Oberfläche mit dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte abnimmt, so wird nach der Berechnung von Roche

$$g' = g \,.\, 1{,}92\, r \left(1 - \frac{12}{25} r^2\right).$$

Daraus würde folgen, dass die Schwere bis zur Tiefe von $\frac{1}{6}$ des Erdradius zunehmen und dort den Werth $\frac{16}{15} g$ erreichen würde; von da ab nimmt sie wieder ab und in einer Entfernung von $\frac{1}{3}$ des Erdradius wäre die Schwere wieder gleich g.

Die tiefsten Schächte sind kaum einen Kilometer tief. Man kann daher aus der Beobachtung keine Bestätigung der Formel erwarten. Gleichwohl ist eine Zunahme von g mit der Tiefe nachgewiesen; so hat Airy[1]) in den Kohlenbergwerken von Harton in Cornwall eine Zunahme der Grösse g von $\frac{1}{19\,200}$ für eine Tiefe von 383 Meter beobachtet. Aus der Formel von Roche würde sich fast der gleiche Betrag ergeben.[2])

105. Messung der Dichte der Erde. — *Durch die Schwingungen eines abwechselnd an der Erdoberfläche und auf dem Boden eines Schachtes befindlichen Pendels.* — Die Beobachtungen von Airy bezweckten die Bestimmung der mittleren Erddichte. Auf dem Grunde des Schachtes wird nämlich das Pendel nur von dem inneren Kern mit der Dichte D und dem Radius r beeinflusst; an der Oberfläche dagegen unterliegt es der Anziehung des Kernes und der zwischen dem oberen und unteren Ende des Schachtes liegenden Kugelschale von der Dicke h und der Dichte d; man kann also offenbar aus dem Verhältniss der Schwere g an der Oberfläche, und derjenigen auf dem Grunde des Schachtes g' die Dichte D ableiten, wenn man jene (stets angenähert messbare) Dichte d kennt. Die Anziehung des Kernes und der Kugelschale

---

[1]) Airy, Phil. Trans. 146, 1856.

[2]) Eine ausführliche Bibliographie des Pendels von C. Wolf befindet sich in Band IV der Collection de Mém. relatifs à la Physique. — K.

auf die Masseneinheit ist so gross, als ob die Masse des Kernes $\frac{4}{3} r^3 \pi D$ und diejenige der Schale $\frac{4}{3}\pi\{(r+h)^3 - r^3\}\, d$ im Mittelpunkt vereinigt wären. Sie beträgt also auf die an der Erdoberfläche, in der Entfernung $r+h$ vom Mittelpunkt befindliche Masseneinheit

$$g = f\frac{\frac{4}{3}\pi\{r^3 D + [(r+h)^3 - r^3]\, d\}}{(r+h)^2}$$

$$= f\frac{4}{3}\pi\left[\frac{r(D-d)}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} + (r+h)\, d\right].$$

Unter Vernachlässigung der zweiten und aller höheren Potenzen von $\frac{h}{r}$ wird zunächst

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{2h}{r}} = 1 - \frac{2h}{r},$$

folglich

$$g = f\frac{4}{3}\pi\,[(r-2h)\,(D-d) + (r+h)d]$$

$$= f\frac{4}{3}\pi\,[(r-2h)\,D + 3hd].$$

Auf dem Grunde des Schachtes ist

$$g' = \frac{f\frac{4}{3}\pi r^3 D}{r^2}$$

$$= f\frac{4}{3}\pi r D.$$

Das Verhältniss beider Beschleunigungen beträgt

$$\frac{g}{g'} = \frac{1}{r}\left[(r-2h) + 3h\frac{d}{D}\right];$$

und wir erhalten endlich

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g'}\right)\frac{r}{3h}}.$$

Das den Schacht unmittelbar umgebende Erdreich ist offenbar für die Wirkung der Kugelschale von der Dicke h auf das oben schwingende Pendel von vorherrschendem Einfluss. Airy fand als mittleres specifisches Gewicht[1]) $d = 2{,}75$. Zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{g}{g'}$ beobachtete man die Schwingungsdauer eines Pendels zuerst an der Erdoberfläche und dann auf dem Boden des Schachtes, indem man die in einer bestimmten Zeit ausgeführten Schwingungen nach der Methode von Borda zählte. Zur Zeitmessung war auf dem Boden des Schachtes eine electrische Uhr aufgestellt, welche von einer auf der Erdoberfläche befindlichen regulirt wurde. Die Messungen ergaben, dass in 24 Stunden das Pendel auf der unteren Station dem Pendel auf der Oberfläche um $2\frac{1}{4}$ Secunden vorausgeeilt war.

Daraus ergab sich

$$\frac{g}{g'} = \left(\frac{86\,400}{86\,402{,}25}\right)^2$$

oder mit grosser Annäherung

$$1 - \frac{g}{g'} = \frac{2\,.\,2{,}25}{86\,402{,}25} = \frac{1}{19\,200}.$$

Das Verhältniss $\frac{r}{h}$ war gleich 16 600.

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formel erhält man

$$D = 6{,}57.$$

Durch die Lothabweichung in der Nähe eines Berges. Eine zweite Methode zur Messung von D beruht ebenfalls auf der Vergleichung der Anziehungen, welche einerseits durch einen bestimmten messbaren Theil der Erde, andererseits durch die ganze Erde ausgeübt werden. Bouguer und La Condamine machten zuerst darauf aufmerksam, dass die Richtung des Lothes durch die Nähe eines Berges geändert wird. Maskelyne[2]) leitete dann aus genauen Messungen einen angenäherten Werth für die Dichte der Erde ab. Der Berg Shehallien in Schottland eignete sich in Folge seiner isolirten Lage, seiner einfachen Form und Zusammensetzung recht

---

[1]) Da die Formel das Verhältniss $\frac{D}{d}$ enthält, können D und d durch die *spec. Gewichte* ersetzt werden.

[2]) Maskelyne, Phil. Trans. 1775 und 1778.

gut zu diesen Messungen. In der durch den Schwerpunkt gehenden Meridianebene wählte Maskelyne zwei Stationen A und B, die wir der Einfachheit halber in gleicher Höhe mit dem Schwerpunkt des Berges und gleich weit von demselben entfernt annehmen wollen. Wäre der Berg nicht vorhanden, so würde der Unterschied der an beiden Orten gemessenen Polhöhen PBH' und PAH gleich

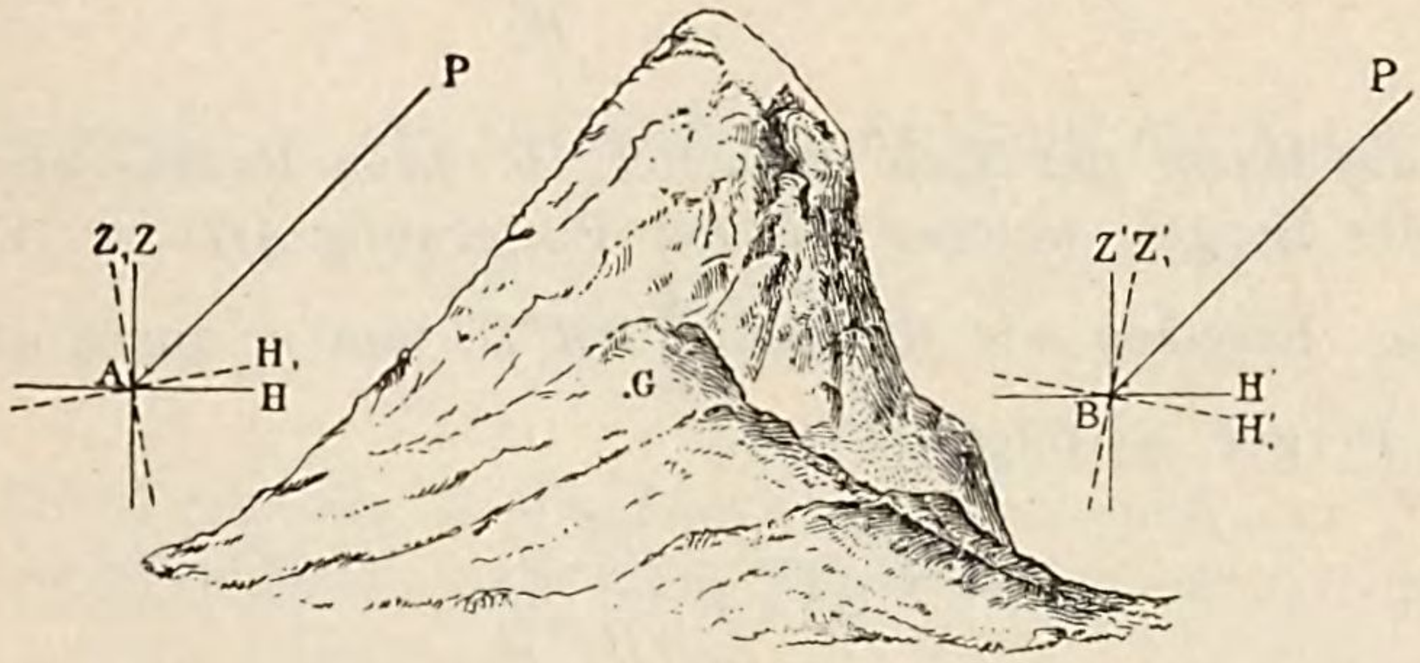


Fig. 164.

dem Unterschied ihrer geographischen Breiten $\lambda' - \lambda$ sein. In Folge der Anziehung des Berges neigen sich die beiden Lothe AZ und BZ' und nehmen die Richtung AZ_1 und BZ'_1 ein; die Polhöhe bei A wird dadurch auf PAH_1 vermindert und in B auf PBH'_1 vergrössert; der Unterschied der beiden Polhöhen beträgt also

$$PBH'_1 - PAH_1 = \lambda' - \lambda + \varepsilon.$$

Die Beobachtung liefert PBH'_1 und PAH_1 direct, da ferner λ' und λ bekannt sind, erhalten wir ε (Maskelyne fand $\varepsilon = 11{,}66''$).

Ist nun $A\zeta$ die Richtung, welche das Bleiloth im Punkte A eingenommen hätte, wenn der Berg nicht vorhanden wäre, und

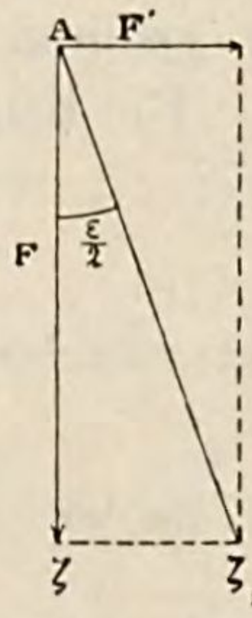


Fig. 165.

$A\zeta_1$ die wirklich beobachtete Richtung, so ist diese Gerade $A\zeta_1$ die Richtung der Resultante derjenigen beiden Kräfte, welche auf

die im Punkte A befindliche Masseneinheit einwirken. Die beiden Kräfte sind die Anziehung F der Erde und die des Berges F'. Es besteht daher die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{F'}{F}=\frac{\frac{fm}{r^2}}{\frac{fM}{R^2}},$$

wo M die Masse der Erde bedeutet, R ihren Radius und m die Masse des Berges, welcher aus der Entfernung $AG=r$ (Fig. 164) einwirkt. Ersetzen wir M durch $\frac{4}{3}\pi R^3 D$, und m durch die Masse Vd des Berges, so folgt

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{Vd}{\frac{4}{3}\pi R r^2 D};$$

hieraus lässt sich $\frac{D}{d}$, und daher auch D berechnen. Da aber die Grössen V und d nicht genau bekannt sind, so kann man mit dieser Methode nur angenäherte Werthe von D erhalten. Maskelyne fand ungefähr $D=5$.

Durch directe Messung der von einer bekannten Masse ausgeübten Wirkung.

Versuche von Cavendish.

Eine dritte Methode zur Bestimmung der Dichte der Erde gründete Cavendish[1]) auf einen durch Michell vorgeschlagenen Versuch.

Der Mittelpunkt c' einer Metallkugel von der Masse m' sei von dem Mittelpunkte c einer zweiten, ebenfalls homogenen Kugel m um die Strecke a entfernt. Die Kugel m wirkt auf jeden Punkt

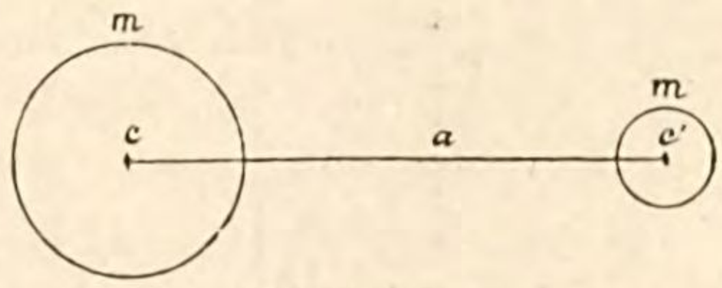


Fig. 166.

der Kugel m', und daher auch auf die ganze Kugel ebenso als ob die Masse von m im Mittelpunkt c concentrirt wäre. Die Wirkung

---

[1]) Cavendish, Phil. Trans. LXXXXIII, 388; 1798.

von m auf m' ist aber gleich der Wirkung von m' auf m, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen; dabei kann man sich wieder die Masse der Kugel m' nach c' verlegt denken. Die gegenseitige Anziehung beträgt deshalb

$$F = \frac{fmm'}{a^2}.$$

Andererseits ist die Wirkung der Erde auf die Kugel m'

$$m'g = \frac{fMm'}{R^2},$$

wenn wir wieder mit M die Masse der Erde und mit R ihren Halbmesser bezeichnen. Aus den beiden Beziehungen folgt

$$\frac{F}{m'g} = \frac{mR^2}{Ma^2}; \qquad (1)$$

mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich die Masse M, also auch die Dichte D berechnen, wenn die Grösse der Kraft F ermittelt werden kann.[1])

Ein gutes Mittel dazu bietet die Directionskraft eines langen, feinen Metalldrahtes. Die zahlreichen Versuche von Coulomb[2]) zeigen, dass die Torsion eines solchen Drahtes ein sehr schwaches Kräftepaar erzeugt, dessen Moment dem Drehungswinkel proportional ist. Hat man daher das Drehungsmoment dieses Kräftepaares für die Winkeleinheit gemessen, so ist auch das einer beliebigen Drehung entsprechende Moment ohne weiteres bekannt. Cavendish verwandte bei seinen Versuchen einen sehr feinen Silberdraht, der in dem oberen Theile des Apparates an einer von aussen drehbaren Welle befestigt war. An diesem Drahte hing in horizontaler Richtung ein sehr leichter langer Hebel aus Tannenholz,

---

[1]) Die Gleichung (1) kann man in der Form schreiben [siehe weiter unten Gleichung (4) und (6)]

$$\frac{F}{m'g} = \frac{r^3 d}{a^2 R D},$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist sehr klein; bei den Versuchen von Cavendish betrug sie z. B. nur 0,000 000 02, und F ist dieser kleine Bruchtheil von $m'g$.

[2]) Coulomb, *Mémoires de l'Académie des sciences;* 1784. Siehe unten im Capitel Elasticität fester Körper.

an dessen Enden sich zwei kleine, 730 Gramm schwere, Metallkugeln $m'm'$ befanden. Zwei grosse Bleikugeln mm von 158 Kilogramm waren auf einem drehbaren Gerüste aufgestellt, und konnten durch eine Transmission entweder den kleinen Kugeln gegenüber gestellt, oder von ihnen entfernt werden; der Beobachter brauchte deshalb in dem Raum, in welchem sich der Apparat befand,

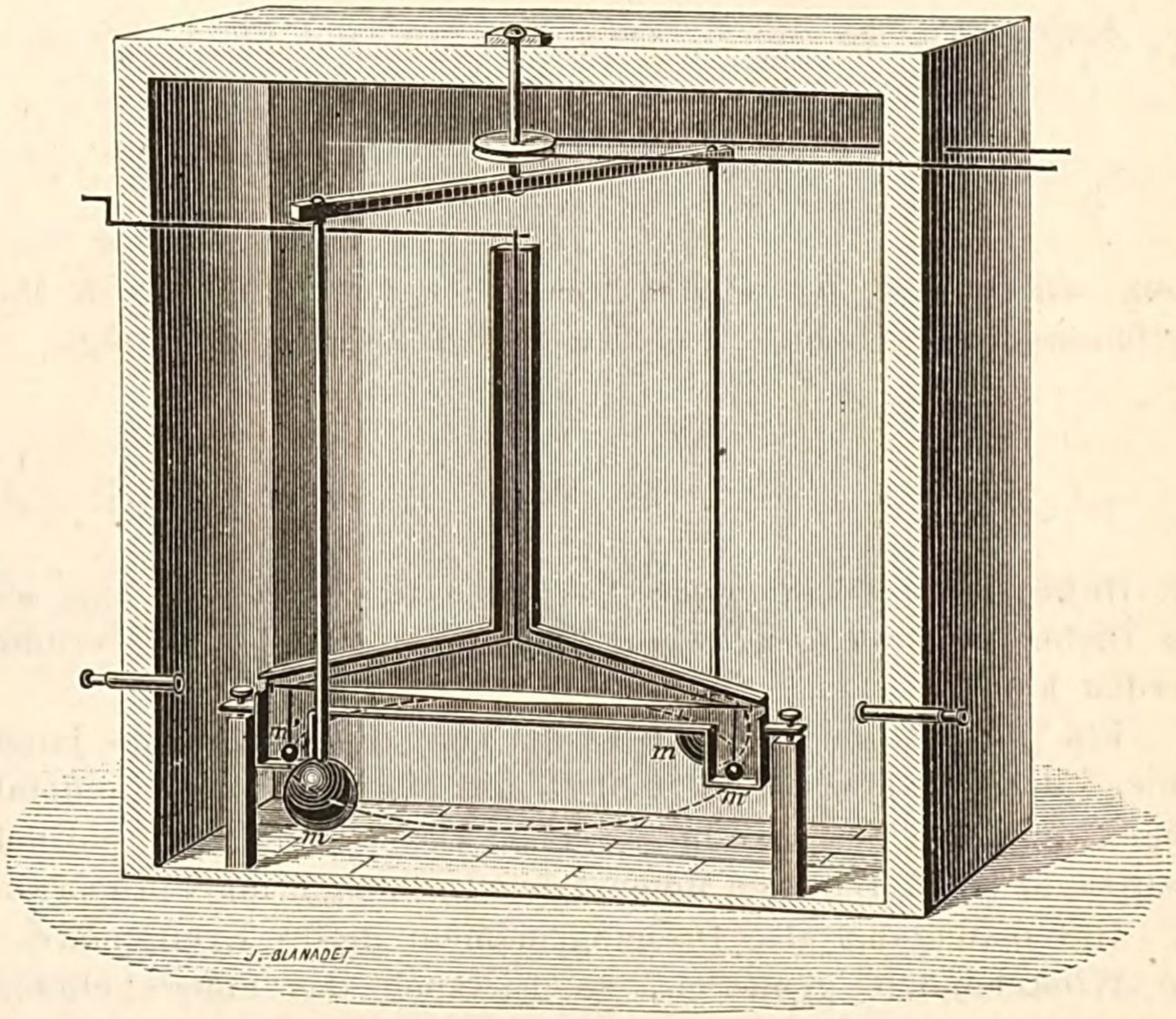


Fig. 167.

während der Messung nicht zu verweilen. Die eigentliche Drehwage (Silberdraht, Hebel mit den Kugeln) war ausserdem in einen Holzkasten eingeschlossen. Durch zwei einander gegenüberliegende Fenster konnte die durch die Anziehung der grossen und kleinen Kugeln erzeugte Ablenkung beobachtet werden. Zu diesem Zwecke befand sich an jedem Ende des Hebels eine Elfenbeinscale, welche durch ein in die Mauer eingelassenes Fernrohr aus einiger Entfernung abgelesen wurde. Da jeder Luftzug die Messungen unmöglich gemacht hätte, so mussten alle diese Vorsichtsmaassregeln angewendet werden.

Zuerst war das Drehungsmoment T des von dem Drahte erzeugten Kräftepaares für die Einheit des Ablenkungswinkels zu

ermitteln. Zu diesem Zwecke wurden die grossen Kugeln m in eine zum Hebel senkrechte Richtung gedreht, weil von da aus ihre Wirkungen auf die kleinen Kugeln m' sich aufhoben. Darauf lenkte man den Hebel aus seiner Gleichgewichtslage ab und liess ihn los; er führte dann in Folge der Torsionskraft des Drahtes isochrone Schwingungen aus, deren Dauer τ gemessen werden konnte. Es ist aber (**88**)

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Q}{T}},$$

worin Q das Trägheitsmoment des horizontalen Pendels bedeutet. Das Trägheitsmoment des leichten Hebels aus Tannenholz war nun so gering, dass es gegen dasjenige der übrigen Theile vernachlässigt werden durfte; die kleinen Kugeln konnte man ebenfalls ohne merkbaren Fehler als zwei materielle Punkte von der Masse m' betrachten, die sich in der Entfernung l von der Achse befinden, wenn $2l$ die Länge des Hebels ist. Q wird daher ganz einfach gleich $2m'l^2$ und

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{2m'l^2}{T}},$$

folglich

$$T = \frac{2\pi^2 m'l^2}{\tau^2}. \qquad (2)$$

Dieser Ausdruck enthält nur noch bekannte Grössen. Nachdem auf diese Weise T bestimmt ist, nähert man die grossen Kugeln bis auf die sehr geringe Entfernung A den kleinen derart, dass die vier Schwerpunkte in einer Ebene liegen. Die kleinen Kugeln werden sich dann nach den grossen hin bewegen und dem Aufhängedraht eine Torsion ertheilen. Der Hebel schwingt langsam um seine neue Gleichgewichtslage, und es wäre für das Resultat der Messung ungünstig, die Beruhigung desselben abzuwarten (bei dem Apparat von Cavendish trat niemals volle Ruhe ein); es ist

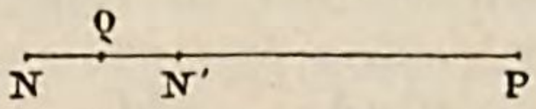


Fig. 168.

viel vortheilhafter, die äusserste Abweichung N nach links, dann die äusserste nach rechts P und darauf abermals die äusserste Abweichung nach links N' abzulesen. Der Mittelpunkt der Strecke

$PQ = \frac{PN + PN'}{2}$ ist die Gleichgewichtslage. Diese sei um n_1 Scalentheile von der Richtung des Hebels vor Einwirkung der Anziehungskraft verschieden. Hierauf bringt man die grossen Kugeln in eine in Bezug auf die ursprüngliche Gleichgewichtslage des Hebels symmetrische Stellung, liesst drei Umkehrpunkte ab, bildet dann wie oben die Abweichung n_2 und nimmt das Mittel $\frac{n_1 + n_2}{2} = n$. Ist δ der Abstand zweier Striche der Scale, so ist $n\delta$ die Verschiebung und $\frac{n\delta}{l}$ der Torsionswinkel; das Moment des Torsionskräftepaares hat also den Werth $T\frac{n\delta}{l}$. Das Moment der Anziehung ist $2Fl$, denn die Entfernung der Kugeln $a = A - n\delta$ ist so klein, dass man annehmen kann, die Richtung der Kraft F sei senkrecht zum Hebelarm. Es besteht daher die Gleichung

$$2Fl = T\frac{n\delta}{l}, \qquad (3)$$

aus welcher sich F ergiebt.

Setzt man in diese Gleichung den oben gefundenen (2) Werth von T ein, so entsteht

$$F = \frac{\pi^2 m' n\delta}{\tau^2}, \qquad (4)$$

wird dieser Werth in (1) eingeführt, so ergiebt sich die Beziehung

$$\frac{\pi^2 n\delta}{g\tau^2} = \frac{mR^2}{Ma^2}, \qquad (5)$$

woraus das Verhältniss der Masse der Erde M zur Masse m der grossen Bleikugel unmittelbar folgt.

Soll daraus die Dichte D der Erde abgeleitet werden, so ersetzt man M durch $\frac{4}{3}\pi R^3 D$, sowie m durch $\frac{4}{3}\pi r^3 d$, wenn r den Radius der Bleikugel und d die Dichte des Bleies bezeichnet. Obige Gleichung (5) geht dadurch über in folgende Form

$$\frac{\pi^2 n\delta}{g\tau^2} = \frac{r^3 d}{a^2 R D}; \qquad (6)$$

daraus findet man endlich

$$D = \frac{g\tau^2 r^3 d}{\pi^2 n\delta a^2 R}.$$

Die bei den Messungen von Cavendish benutzten Constanten waren in englischem Maass die folgenden:

$\frac{g}{\pi^2}$ = Länge des Secundenpendels . . . . = 39,14 Zoll
δ = Entfernung der Striche auf der Scale = 0,0479 „
r = Radius der Bleikugel . . . . . = 6 „
a = Abstand beider Kugeln . . . . = 8 „
R = Radius der Erde . . . . . = 21 000 000 Fuss
d = Dichte des Bleies . . . . . = 11,5

Cavendish stellte Versuche mit zwei verschiedenen Aufhängungsdrähten an. Bei Benutzung eines sehr dünnen Drahtes hatte der Hebel eine Schwingungsdauer von 14 Minuten und drehte sich in Folge der Anziehung durch die grossen Bleimassen um einen Winkel, der 16 Scalentheilen entsprach; demnach war

τ = Schwingungsdauer = 840 Sec.
$n\delta$ = Ablenkung = 16 . δ = 0,766 Zoll.

Bei Anwendung des dickeren Drahtes war

τ = 7 Min. = 420 Sec.
$n\delta$ = 5,7 . δ = 0,272 Zoll.

Aus 29 Versuchen fand Cavendish den Mittelwerth

$$D = 5{,}48.$$

Die Dichte der Stoffe (hauptsächlich Wasser und Gestein) an der Erdoberfläche ist viel geringer, sie beträgt ungefähr 2 bis 3. Die im Innern unserer Erde befindlichen Schichten haben also eine viel grössere Dichte als die Erdrinde.[1])

Messungen von Reich.

Reich[2]) stellte 40 Jahre später neue Messungen mit einer bifilaren Aufhängung an, bei der die Ablenkungen nach der

---

[1]) Nach Roche, welcher die Rechnungen von Legendre und Laplace über diesen Gegenstand wiederholte, ist die Dichte δ in einer Entfernung d vom Mittelpunkt, wenn d in Einheiten des Erdradius ausgedrückt wird,

$$\delta = 10{,}6\left(1 - \frac{4}{5}d^2\right);$$

nach dieser Formel wäre die mittlere Dichte an der Erdoberfläche 2,1 und im Mittelpunkt hätte man $\delta = 10{,}6$.

[2]) Reich, Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, I; 1852.

Poggendorff'schen Methode (**117**) mit Spiegel und Scale beobachtet wurden. Der Apparat stand in einem Bergwerke in Freiberg und war in Folge dessen den sehr störenden Temperatureinflüssen entzogen. Die erste Beobachtungreihe (1837) ergab 5,49, aus einer zweiten im Jahre 1849 angestellten fand er

$$D = 5{,}58.$$

Messungen von Baily.

Im Auftrage der Londoner astronomischen Gesellschaft wiederholte Baily[1]) die Versuche von Cavendish mit einem dem ursprünglichen völlig gleichen Apparat. Er stellte eine grosse Anzahl von Messungen an, die, abgesehen von einem sofort zu erörternden systematischen Fehler, sich durch grosse Sorgfalt auszeichnen. Aus mehr als zweitausend Messungen ergab sich als Mittel

$$D = 5{,}67.$$

Messungen von Cornu und Baille.

In neuester Zeit haben Cornu und Baille[2]) diese Messungen wieder aufgenommen. Sie untersuchten zuerst aufs sorgfältigste die Torsionswage. Es zeigte sich, dass das Dämpfungsgesetz kleiner Schwingungen, wonach die auf einander folgenden Ausschläge eine geometrische Reihe bilden sollen, dann vollkommen genau gültig ist, wenn man alle Störungen möglichst vermeidet. Daraus folgt, dass der Luftwiderstand innerhalb ziemlich weiter Grenzen der Geschwindigkeit proportional ist (**86**). Weiter kann man daraus schliessen, dass „bei Vermeidung aller störenden Einflüsse, die Regelmässigkeit der Schwingungen des Balkens ein Kriterium für die Vollkommenheit der Messungen ist".

Die Unterschiede der auf einander folgenden Ausschläge müssen bei jeder Schwingung langsam abnehmen und diese Abnahme muss sich regelmässig auf beide Seiten des Ausschlages vertheilen. Die Beobachtungen von Baily ergaben aber gerade eine sehr ungleichmässige Abnahme der Ablesungen zu beiden Seiten der Ruhelage. Die der Zeit nach erste war immer grösser als die zweite, daher musste auch die Gleichgewichtslage unrichtig und der daraus abgeleitete Wert von D zu gross sein. Diese Unregelmässigkeit ist darauf

---

[1]) Baily, Astron. Soc. Mem. XIV, 1843; Annales de chimie et de physique (3), V, 338; 1842.

[2]) Cornu et Baille, C. R. LXX, 1337; 1870; LXXVI, 954; 1873; LXXXVI, 699; 1878.

zurückzuführen, dass Baily (wie auch Reich) sofort nach Umstellung der grossen Kugeln eine neue Beobachtungsreihe begann und die letzte Elongation der vorhergehenden Reihe zugleich als erste der folgenden gelten liess. Die bei der Umstellung unvermeidlichen Stösse brachten Störungen hervor, welche sich in der ungleichförmigen Abnahme der Schwingungsbogen zu beiden Seiten äusserten. Cornu zeigte, dass durch Weglassen der ersten Zahl in jeder Reihe von Baily dieser systematische Fehler verschwand. Aus zehn beliebig herausgegriffenen Messungen ergab sich für die Grösse D im Vergleich zu der von Baily gefundenen Dichte ein um 0,116 kleinerer Werth. Bringt man diese Grösse auch für das Gesammtmittel der Messungen in Abzug, so folgt aus den Versuchen von Baily $D = 5{,}55$.

Die Apparate von Cornu und Baille sind in einem Keller der École Polytechnique aufgestellt. Der Balken der Drehwage besteht aus einem Aluminiumrohr von 50 cm Länge, an dessen beiden Enden zwei Kupferkugeln von je 109 g befestigt sind. In der Mitte dieses Balkens ist ein Planspiegel angebracht, in welchem man mittelst eines Fernrohres das Bild einer 5,60 m entfernten Scale beobachtet. Der Aufhängungsdraht, aus geglühtem Silber, hat eine Länge von 4,15 m, derselbe hing zur Zeit der ersten Beobactungen schon länger als ein Jahr im Apparat. Die anziehende Masse besteht aus Quecksilber, dass in vier gusseisernen Hohlkugeln von 12 cm Durchmesser enthalten ist. Da das Quecksilber aus einem Kugelpaar in das andere gesaugt wird, so sind dadurch alle Erschütterungen vollständig vermieden. Andererseits sind alle Theile des ganz aus Metall bestehenden Apparates mit der Erde in Verbindung, und deshalb keinen electrischen Störungen unterworfen.[1]) Jede Schwingung wird in ihrem ganzen Verlaufe electrisch registrirt. Die Beobachtungen sind vollkommen regelmässig, die 408 Secunden betragende Schwingungsdauer des Balkens ist z. B. während mehrerer Jahre auf einige Zehntel-Secunden constant geblieben. Als Endresultat hat sich ergeben

$$D = 5{,}50.$$

Zahlenwerth der Constanten der Anziehung. — Diese verschiedenen Messungen liefern den Beweis für die allgemeine Gültigkeit des

---

[1]) Der Einfluss der schwachen, unter $\frac{1}{5}$ Volt betragenden Spannungsdifferenz von Kupfer gegen Eisen in Luft ist bei den zwei sehr wenig verschiedenen Einstellungen der Kupfer-Kugeln zu vernachlässigen. — K.

Anziehungsgesetzes und ergeben zugleich den Werth der Constanten f, d. h. die Anziehung zweier Körper von der Masseneinheit in der Einheit der Entfernung.

Es ist nämlich

$$g = \frac{fM}{R^2} = \frac{f\frac{4}{3}\pi R^3 D}{R^2},$$

woraus folgt

$$f = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi R D}.$$

Im C.-G.-S.-System ergiebt sich

$$f = 6{,}70 \,.\, 10^{-8}.$$

Die Dimensionen von $f = \frac{R^2 g}{M}$ sind $L^3 M^{-1} T^{-2}$ (**72**).

Jetzt kann aus dem dritten Kepler'schen Gesetz unmittelbar der Werth der Masse zweier aufeinander wirkender Körper gefunden werden, wenn zwei Elemente ihrer relativen Bewegung a und T bekannt sind; es ist nämlich[1])

$$f(m + m') = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

---

[1]) Beim Übergang von den Kepler'schen auf das Newton'sche Gesetz wurde die Sonne als unbeweglich betrachtet. In Wirklichkeit ist das nicht der Fall. Auf der Verbindungslinie von der Sonne S nach dem Planet m' wirkt eine Anziehungskraft $\frac{fmm'}{r^2}$, welche beide Himmelskörper zugleich beeinflusst. Für den Planet ergiebt sich daraus eine

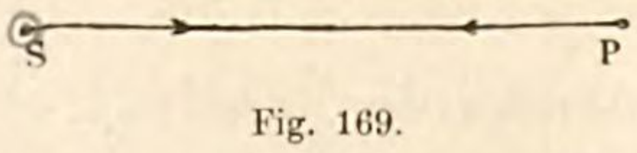


Fig. 169.

Beschleunigung $\gamma_1 = \frac{fm}{r^2}$ in der Richtung PS, für die Sonne eine Beschleunigung $\gamma_2 = \frac{fm'}{r^2}$ in der Richtung PS. Die Beschleunigung der relativen Bewegung des Planeten um die Sonne ist die Summe der Beschleunigung γ_1 und einer Beschleunigung, welche γ_2 numerisch gleich, aber

Da nun die Masse der Erde bekannt ist, kann man die Masse der Sonne und diejenige aller Körper unseres Sonnensystemes berechnen.[1])

Den Apparat von Cavendish hat man daher mit Recht eine „Weltenwage“ genannt.[2])

---

umgekehrt gerichtet ist, demnach eine Beschleunigung $\gamma = \frac{f(m+m')}{r^2}$ in der Richtung PS. Setzt man $\gamma = \frac{\mu}{r^2}$, $\mu = f(m+m')$ und wie immer $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, so entsteht

$$f(m+m') = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Da die Massen der Planeten verschieden gross sind, kann μ nicht für alle gleich sein; das Verhältniss $\frac{a^3}{T^2}$ ist deshalb nicht constant, wie Kepler annahm, sondern ändert sich etwas, aber wenig, da m gegen m' stets sehr gross ist.

[1]) Als der Werth von f noch mit grosser Unsicherheit behaftet war, konnten die Astronomen die Massen der verschiedenen Körper unseres Planetensystems nur dadurch ausdrücken, dass sie einen dieser Körper als Einheit annahmen, d. h. es war nur das Verhältniss ihrer Massen bekannt. Dieses Verhältniss ergab sich entweder durch doppelte Anwendung der obigen Formel auf die Planeten mit Satelliten, oder aus den gegenseitigen Störungen. Da nun die Grösse f mit ziemlich grosser Genauigkeit bestimmt ist, kann man auch die absolute Grösse der verschiedenen Massen unseres Sonnensystemes, und daher auch ihre Dichte berechnen.

[2]) Jolly änderte die Methode von Cavendish ab und benützte zur Messung der Anziehung zweier gegebener Massen eine Wage, welche in einem Thurm aufgestellt war. Eine mit Quecksilber gefüllte Glaskugel G wurde oben auf der Wagschale I gewogen, dann mit einem langen Draht an die Wage gehängt und unten in der Nähe des Bodens wieder gewogen. Darauf brachte man, senkrecht unter der Wagschale I, auf den Boden des Thurmes eine Bleikugel B von ungefähr 1 m Durchmesser und führte die Wägungen abwechselnd oben und unten aus wie zuvor. Aus der Differenz der Gewichte in beiden Fällen konnte in einfacher Weise die Anziehung der Kugeln G und B, und daraus die mittlere Dichte der Erde berechnet werden. Jolly fand aus seinen Versuchen $D = 5{,}69 \pm 0{,}07$. [Abh. d. Münch. Acad. XIV, 2]. A. König und F. Richarz vervollkommneten diese Methode noch bedeutend. Die Wage wird unmittelbar über einen parallelepipedischen Bleiklotz gestellt, welcher in der Verlängerung der beiden Wagschalen Öffnungen besitzt, um mittels feiner Drähte auch unterhalb des Bleiklotzes kugelförmige Massen an die Wage hängen zu können. Während nun auf der einen Seite der Wage die anzuhängende Masse über dem Bleiklotz befestigt wird, befindet sich eine ihr gleiche Masse auf der anderen Seite der Wage unter demselben und beim folgenden Versuch umgekehrt, so dass unter sonst gleichen Umständen gegenüber der Jolly'schen Anordnung nahe die vierfache Genauigkeit erreicht werden kann. [Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1884.] Wilsing benützte zur gleichen Messung einen ähnlichen Apparat. Man kann sich denselben am einfachsten schematisch als eine Wage mit langem,

106. Einfluss der Erdrotation auf den Fall der Körper. — Wenn man in statischen Aufgaben die Rotation der Erde berücksichtigen will, so genügt es, zu den vorhandenen Kräften die Centrifugalkraft hinzuzufügen. Betrachtet man aber die Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche, so müssen zu den dabei auftretenden Kräften zwei neue zugefügt werden, die Centrifugalkraft und die zusammengesetzte Centrifugalkraft (**53**).

Da die Centrifugalkraft schon in dem Gewicht inbegriffen ist, braucht man nur die zusammengesetzte Centrifugalkraft zu berücksichtigen.

Zur Untersuchung der Bewegung legen wir durch irgend einen Punkt O der Erdoberfläche drei auf einander senkrechte Coordinatenachsen, die sich mit der Erde drehen mögen. Eine dieser Achsen Ox sei die Richtung des Meridians gegen Norden, die zweite Oy liege in der horizontalen Ebene und sei östlich gerichtet, die dritte gehe senkrecht nach unten. Die gleichförmige Rotation der Erde um

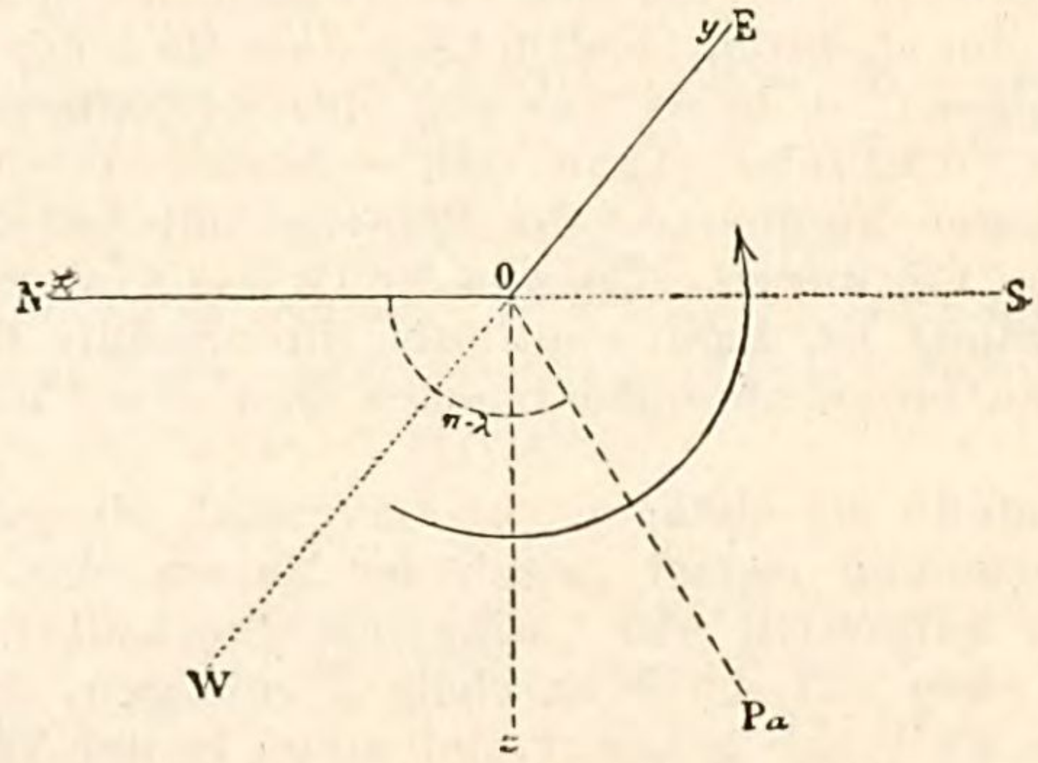


Fig. 170.

ihre Achse kann als die Resultante zweier Bewegungen angesehen werden. Davon ist die eine der Bewegung des Punktes O gleich und parallel (aber ohne Drehung), die andere besteht in einer Rotation gleich derjenigen der Erde, aber um eine zur Erdachse parallele Linie

---

vertikal gestelltem Wagebalken vorstellen, an dessen Enden Massen m von passender Grösse direct befestigt sind. Die Gehänge der gewöhnlichen Wage werden dadurch entbehrlich. Den Massen m werden in gleicher Höhe andere, weit grössere, m' gegenübergestellt, und zwar oben und unten zu verschiedenen Seiten des Balkens (Pendels). Die Massen m' können mittels eines um eine Rolle gehenden Drahtseiles so verschoben werden, dass sie abwechselnd z. B. zuerst rechts oben und links unten, dann rechts unten und links oben den Enden des Balkens gegenüberstehen. Aus den Versuchen von Wilsing ergiebt sich für die mittlere Dichte der Erde der Werth $D = 5{,}58 \pm 0{,}01$ [Public. d. Astrophys. Obs. zu Potsdam No. 22. VI, 2; 1887]. — K.

OP_a. Die Linie OP_a liegt in der Meridianebene xOz, ihre Neigung gegen den Horizont ist gleich der geographischen Breite λ. Die fortschreitende Bewegung von O ist auf die relative Bewegung ohne Einfluss, und nur die Rotation um OP_a wäre zu berücksichtigen. Diese Rotation geht in der Richtung von West nach Ost, d. h. in negativem Sinne vor sich, und muss, wie früher gezeigt wurde (**28**, 2), durch eine gewisse Länge ω auf der Südseite der Achse OP_a dargestellt werden. Die zusammengesetzte Centrifugalkraft $2m\omega v \sin(\omega, v)$ steht senkrecht auf der Ebene (ω, v) und ist der Richtung entgegengesetzt, nach welcher die Rotation diese Ebene zu treiben strebt. Fände z. B. die Bewegung mit der Geschwindigkeit v in der Meridian-Ebene statt, so würde sie scheinbar nach Westen abgelenkt werden und die zusammengesetzte Centrifugalkraft wäre nach Osten gerichtet. Da die Grösse ω sehr klein ist, so wird auch im allgemeinen die zusammengesetzte Centrifugalkraft selbst sehr klein sein, sie ist z. B. für eine Geschwindigkeit von 10 m in der Secunde kleiner als 0,002; für eine Geschwindigkeit von 500 m in der Secunde würde sie noch unter 0,1 bleiben. Gewöhnlich ist sie also vollständig zu vernachlässigen, obwohl sie durch feine Messungen deutlich sichtbar gemacht werden kann.

Wir wollen ihre Componenten zu bestimmen suchen. Bekanntlich ist die Richtung (α, β, γ), welche auf den beiden Richtungen (a, b, c), (a', b', c') senkrecht steht durch die Formeln gegeben

$$\frac{\alpha}{bc' - cb'} = \frac{\beta}{ca' - ac'} = \frac{\gamma}{ab' - ba'} = \frac{\pm 1}{\sin A},$$

wenn A der Winkel zwischen beiden angenommenen Richtungen ist.

Hier ist eine der Richtungen OP_a, also $a = -\cos\lambda$, $b = 0$, $c = \sin\lambda$; die andere Richtung ist diejenige der Geschwindigkeit, demnach $a' = \frac{dx}{dt}$, $b' = \frac{dy}{dt}$, $c' = \frac{dz}{dt}$; und das positive Zeichen ist gültig. Es wird deshalb

$$\alpha = \frac{-\sin\lambda \frac{dy}{dt}}{v \sin(\omega, v)},$$

$$\beta = \frac{\sin\lambda \frac{dx}{dt} + \cos\lambda \frac{dz}{dt}}{v \sin(\omega, v)},$$

$$\gamma = \frac{-\cos\lambda \frac{dy}{dt}}{v \sin(\omega, v)};$$

daraus ergeben sich die Componenten der zusammengesetzten Centrifugalkraft

$$X = -2m\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt},$$

$$Y = 2m\omega \left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} + \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right),$$

$$Z = -2m\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}.$$

Die Bewegungsgleichungen werden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} + \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt},$$

und deren Integrale sind

$$\frac{dx}{dt} = A - 2\omega y \sin\lambda,$$

$$\frac{dy}{dt} = B + 2\omega (x \sin\lambda + z \cos\lambda),$$

$$\frac{dz}{dt} = C + gt - 2\omega y \cos\lambda,$$

worin A, B, C die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit v_0 sind.

Ist diese Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, und der Körper fällt frei, so bewirkt die zusammengesetzte Centrifugalkraft eine sehr kleine Ablenkung nach Osten. Das Product dieser Ablenkung mit ω kann daher einfach vernachlässigt werden, und das Integral der letzten Gleichung wird

$$z = \frac{gt^2}{2}.$$

Ebenso reducirt sich die vorhergehende Gleichung auf

$$\frac{dy}{dt} = 2\omega z \cos\lambda = g\omega t^2 \cos\lambda;$$

daraus findet sich

$$y = \frac{g\omega t^3 \cos\lambda}{3}.$$

Die erste Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2g\omega^2 t^3 \sin\lambda\cos\lambda}{3},$$

woraus sich ergiebt

$$x = \frac{-g\omega^2 t^4 \sin 2\lambda}{12}.$$

Es existirt daher

1. eine Ablenkung y gegen Osten,
2. bei uns eine äusserst geringe Ablenkung gegen Süden, im allgemeinen gegen den Äquator, x.

Ersetzt man in dem Ausdruck für y die Grösse t durch den aus der Beziehung $h = \frac{gt^2}{2}$ folgenden Werth, so erhält man [1])

$$y = \frac{g\omega\cos\lambda}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Unter dieser Form ist sie dem Experiment direct zugänglich.

Reich stellte in den Bergwerken in Freiberg eine Messungsreihe an, indem er einen Körper aus der Höhe $h = 158{,}5$ m fallen liess, und fand $y = 0{,}0283$ m. Setzt man in der Formel $g = 9{,}81$ und $\lambda = 51$, so wird $y = 0{,}0276$ m.

Ein senkrecht nach oben geschleuderter Körper würde nicht zu seinem Ausgangspunkt zurückkommen, sondern würde an einem etwas westlich und nördlich gelegenen Punkte nieder fallen.

Schiesst man ein Geschoss unter einem Winkel ϑ ab, so ändert sich die Abweichung mit dem Azimuth der Zielebene. Fällt z. B. die senkrechte Ebene durch die Visir-Richtung mit dem Meridian zusammen, und ist $\vartheta < \lambda$, so wird das Geschoss nach Osten abgelenkt; für $\vartheta > \lambda$ geht das Geschoss zunächst westlich aus der Meridianebene und kommt nach der Zeit $t = \frac{3v\sin(\vartheta - \lambda)}{g\cos\lambda}$ dahin zurück. Soll also das Geschoss die Ebene passiren bevor es auf den Boden kommt, so muss $\operatorname{tg}\vartheta < 3\operatorname{tg}\lambda$ sein.

---

[1]) Bei Résal, Traité de mécanique générale I, 107, findet sich die directe Lösung der gleichen Aufgabe.

Bei einer abgeschlossenen Behandlung der Aufgaben über Gleichgewicht und Bewegung schwerer Körper würde noch berücksichtigt werden müssen, dass streng genommen die Intensität der Schwere von einem Ort zum andern sowohl der Grösse als der Richtung nach variirt; ausserdem ist die Richtung und Stärke der von der Sonne oder dem Mond auf irgend einen Punkt der Erdoberfläche ausgeübten Anziehung fortwährenden merklichen Änderungen unterworfen, wie aus der Erscheinung von Ebbe und Fluth hervorgeht. Alle diese kleinen Änderungen der Schwerkraft stören aber die Haupterscheinungen nur recht wenig. Es macht, um nur ein Beispiel anzuführen, in Paris ein 100 m langes Loth in Folge der Abplattung der Erde mit der Vertikalen einen Winkel von kaum 0,017 Secunden, der durch keine Messung nachgewiesen werden könnte. Es möge daher genügen, auf diese Störungen hingewiesen zu haben.[1])

---

[1]) Siehe Puiseux, Annales de l'école normale supérieure (2), I, 23; 1872.

Drittes Capitel.

Allgemeine Eigenschaften.

I. Undurchdringlichkeit.

107. Undurchdringlichkeit. — Der Begriff der Undurchdringlichkeit bedeutet, wenn man von der Bewegung absieht, den Widerstand der Materie gegen das Eindringen eines fremden Körpers.

Gewisse allgemein bekannte Thatsachen scheinen mit diesem Begriffe im Widerspruche zu stehen, und wenn auch der grösste Theil derselben, wie das Eindringen eines Nagels in ein Brett etc., kaum im Ernste als Gegenbeweis gegen die allgemeine Gültigkeit desselben aufgefasst werden dürfte, so scheinen doch andere, wie z. B. die Verminderung des Volumens eines Metalls unter dem Prägestocke der Münze, die Zusammenziehung einer Mischung von 50 Volumen-Einheiten Alkohol und 54 Volumen-Einheiten Wasser zu 100 Volumen-Einheiten u. s. w., in der That mit diesem Grundsatze unverträglich zu sein, nach welchem das Vorhandensein eines Körpers in einem gegebenen Raume jeden anderen Körper von diesem Raume ausschliesst. Um aber diese Thatsachen mit der nothwendigen Theorie der Undurchdringlichkeit in Übereinstimmung zu bringen, genügt es, die zuerst für den Körper selbst in Anspruch genommene Eigenschaft auf die den Körper zusammensetzenden kleinsten Theilchen zu übertragen, wie es bei der gewöhnlich angenommenen Hypothese über die Zusammensetzung der Materie zu geschehen pflegt.

II. Ausdehnung; Mess-Instrumente.

108. Ausdehnung. — Unter Ausdehnung versteht man die jedem Körper zukommende Eigenschaft, einen bestimmten Theil des

Raumes auszufüllen. So definirt, ist der Begriff der Ausdehnung nichts weiter, als einer Folge des Begriffes der Undurchdringlichkeit, und aus diesem Grunde haben wir auch nur eine einzige, wesentliche Eigenschaft der Materie angenommen (**17**).

Das Studium der Ausdehnung beruht auf Messungen, und zwar solchen von Volumen, Oberflächen und Linien. Geometrisch betrachtet, lässt sich Volumen und Oberfläche eines Körpers aus seinen linearen Dimensionen ableiten, gleichwohl ist es oft nützlich und bisweilen nothwendig, das Volumen direct zu bestimmen; wir werden auf diese Operation noch zurückkommen. Bisweilen ist es auch zweckmässig, eine Oberfläche direct zu messen, — man bedient sich hierzu eines Planimeters oder auch der Wage, da der Flächeninhalt irgend eines Theiles eines homogenen Blattes dem Gewichte desselben proportional ist.

Wir wollen uns hier nur mit der Messung von Längen, und speciell von kleinen Längen, beschäftigen.

109. Messung durch Abschätzen. — Misst man eine Länge mit Hülfe eines in Millimeter getheilten Maassstabes, so findet man im allgemeinen, dass die gesuchte Länge einer gewissen Anzahl von Millimetern und einem Reste gleich ist. Die Messung dieses Restes würde sich augenscheinlich nicht durch eine neue Unterabtheilung des Maassstabes bewerkstelligen lassen, denn schon das halbe Millimeter kann man nur mit Mühe direct ablesen. Freilich ist es richtig, dass man unmittelbar einen bestimmten Bruchtheil der Theilung eines Maassstabes schätzen kann, und mit einiger Übung schätzt der Physiker mit dem Auge das Zehntel des Millimeters ebenso genau, wie der Astronom mit dem Ohr das Zehntel der Secunde, aber dies Verfahren ist naturgemäss beschränkt. So hat man denn seit der Zeit, wo man die Nothwendigkeit genauer Messungen erkannte, nach Methoden gesucht, um die Bruchtheile der letzten, praktisch noch ausführbaren Unterabtheilungen indirect auszuwerthen.

Die zu diesem Zwecke construirten Apparate lassen sich auf drei Haupt-Typen zurückführen: den Vernier, die Mikrometer-Schraube und den Reflexions-Hebel.

1. Vernier.

110. Vernier. — Zuerst bemühte man sich, die Unterabtheilungen der Grade zu ermitteln. und bediente sich hierzu des Transversalmaassstabes. Gegen die Mitte des 16. Jahrhunderts kam

Nuñez oder Nonius,[1]) Professor zu Coimbra, auf die Idee, inmitten eines in Grade getheilten Quadranten eine Reihe von concentrischen Quadranten anzubringen, die bezw. in 89, 88, 87 etc. Theile getheilt waren. Die bewegliche Alhidade fiel immer sehr nahe mit einer der Theilungen der äusseren Kreise zusammen, und man hatte also damit einen Ausdruck für den Bogen, den man leicht in Grade und Bruchtheile eines Grades verwandeln konnte. Wesentlich einfacher und genauer ist die Lösung, die einige Jahre später durch Pierre Vernier,[2]) aus Ornans in der Franche-Comté, gegeben wurde, den Erfinder des Instrumentes, das auch heute noch fälschlicher Weise oft Nonius genannt wird.

Geradliniger Vernier. — Der Vernier ist ein Schieber, welcher längs der auf einem Maassstab angebrachten Theilung hingleitet. Er ist in n Theile getheilt, von denen jeder, wenn man noch $\frac{1}{n}$ der Theilung ablesen will, $\frac{n-1}{n}$ Theile des Maassstabes umfasst. Um beispielsweise das Zehntel des Millimeters zu erhalten, legt man an den in Millimeter getheilten Maassstab AB einen anderen,

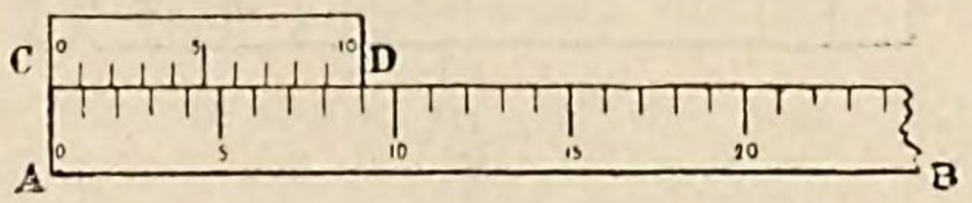


Fig. 171.

kleinen Maassstab CD von 9 mm Länge an, der seinerseits wieder in 10 Theile getheilt ist, und zwar beziffert man die Theilstriche des Vernier von 0 bis 10 nach derselben Richtung, wie die Theilstriche des Maassstabes. Gesetzt, man habe die Länge EC zu

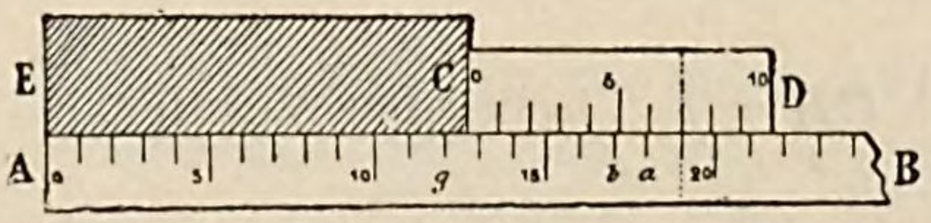


Fig. 172.

messen, dann giebt der Maassstab 12 mm plus einem Reste. An dem Ende C schiebt wir den Vernier an, und sehen zu, welcher seiner Theilstriche mit einem Theilstriche des Maassstabes zu-

---

[1]) Nuñez, De crepusculis liber unus; Lisabon 1542.

[2]) Vernier, La construction l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques; Bruxelles 1631.

sammenfällt; da dies beim 7. Theilstriche des Vernier der Fall ist, so schliessen wir daraus, dass der zu bestimmende Rest $\frac{7}{10}$ mm beträgt. Jeder Theil des Vernier ist nämlich gleich $\frac{9}{10}$ mm; der Theilstrich 6 liegt also um $\frac{1}{10}$ mm gegen den Theilstrich a des Maassstabes zurück, der Theilstrich 5 ebenso um $\frac{2}{10}$ mm gegen den Theilstrich b des Maassstabes, ... der Theilstrich 0 des Vernier ist demnach um $\frac{7}{10}$ mm gegen den Strich g des Maassstabes zurückgeblieben, folglich beträgt der zu messende Rest in der That $\frac{7}{10}$ mm.

Ganz allgemein wird man demnach, um noch $\frac{1}{n}$ mm ablesen zu können, eine Länge von $(n-1)$ mm des Maassstabes in n gleiche Theile theilen; man hat also einen $\frac{1}{n}$ - Vernier. Dann liefert

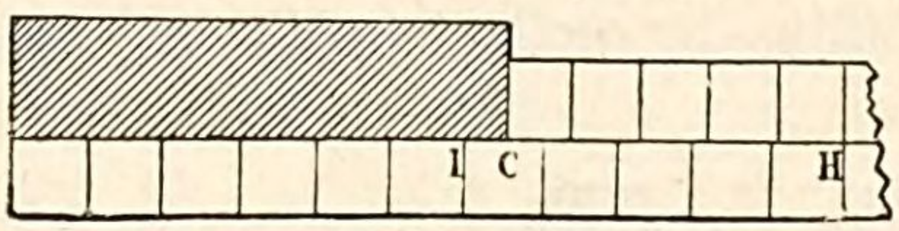


Fig. 173.

die Zahl k, welche dem mit einem Theilstriche des grossen Maassstabes zusammenfallenden Striche des Vernier zugehört, den Zähler desjenigen Bruches, welcher den gesuchten Rest angiebt. In der That gilt immer, wenn H den Punkt des Zusammenfallens beider Striche bezeichnet:

$$IC = IH - CH,$$

oder, da $IH = k$ Theile des Maassstabes, $= k$ mm

und $CH = k$ Theile des Vernier, $= k\left(\frac{n-1}{n}\right)$ mm

$$IC = k\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\text{mm} = \frac{k}{n}\text{mm}.$$

Wir haben vorausgesetzt, dass, wie in Deutschland und in Frankreich üblich, die Theilstriche des Vernier in demselben Sinne gezählt werden, wie diejenigen des Maassstabes; das umgekehrte ist meist in England gebräuchlich, aber da man dann $(n+1)$ Theile des Maassstabes in n gleiche Theile theilt, so dass ein Theil des Vernier gleich $\frac{n+1}{n}$ eines Maassstabtheiles ist, so erfolgt das

Ablesen genau ebenso.[1]) Beispielsweise würde man in dem beistehend abgebildeten Falle für $EC = 12{,}7$ mm ablesen.

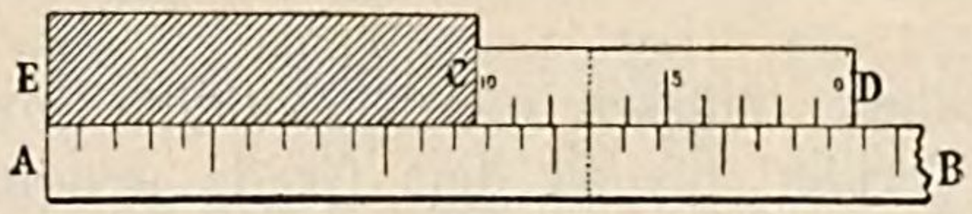


Fig. 174.

In beiden Fällen erlaubt der Vernier, — und darin gerade besteht sein Vorzug —, viel geringere Grössen als die letzten Unterabtheilungen des Maassstabes abzulesen, während man zu diesem Zwecke doch nur Unterabtheilungen in Anwendung zu bringen hat, welche an Grösse nahezu denjenigen dieses Maassstabes gleich sind.

Bisher hatten wir angenommen, dass ein Theilstrich besser als alle übrigen mit einem Theilstriche des Maassstabes zusammenfällt. Nun kann es aber vorkommen, dass zwei auf einander folgende Striche, z. B. die Theilstriche 7 und 8 des $\frac{1}{n}$-Vernier, sich gleich gut mit zwei Theilstrichen des Maassstabes zu decken scheinen, — man nimmt dann $\frac{15}{2n}$, d. h. das Mittel aus beiden Lesungen, als Werth des zu bestimmenden Restes. Diese doppelten Coincidenzen sind bei der Anwendung die Klippe für den Vernier, und sie begrenzen auch in der Praxis ziemlich schnell die theoretisch unbegrenzte Annäherung, welche dieser Apparat gewähren könnte. In der That setzt die Messung von $\frac{1}{n}$ mm nicht allein voraus, dass die Theilung des Maassstabes bis auf weniger als $\frac{1}{n}$ genau ist, sondern weiter, dass die Dicke der Striche von Maassstab und Vernier hinreichend gering ist, um nicht mehrfache Coincidenzen bei jeder Messung auftreten zu lassen; so kann man selbst mit Hülfe einer Lupe[2]) durch den Vernier kaum eine grössere Genauigkeit als $\frac{1}{50}$ mm erreichen. Endlich muss der Ver-

---

[1]) Den ersteren pflegt man *vorläufigen*, den anderen *rückläufigen* Vernier zu nennen. — G.

[2]) Man ermüdet das Auge weniger und erleichtert die Messung, wenn man vorher die Theilung des Maassstabes genau untersucht, und wenn man, wie es Mannheim vorgeschlagen, einen zweiten Vernier benützt: Auf einem ersten $\frac{1}{n}$-Vernier V_1 gleitet ein zweiter V_2, der mit

fertiger dafür gesorgt haben, dass der Vernier in die Ebene des ursprünglichen Maasstabes zu liegen kommt, und nicht, wie man es nur zu häufig findet, auf eine gegen den Maassstab schräg gerichtete Leiste.

Wie wir sahen, müssen die Theilungen sowohl von Maassstab wie von Vernier bis zu dem Grade genau sein, den man bei der Ablesung erreichen will. Man wird also vor allem festzustellen haben, ob dies wirklich der Fall ist, indem man ein und dieselbe Länge nach einander mit verschiedenen Stellen des Maassstabes misst. Auf diese Weise kann man die systematischen Fehler der Theilung bestimmen (die einzigen, die eine gut ausgeführte Theilung überhaupt noch zeigen darf), und demnach auch die Correctionen, die man zu den Lesungen an den verschiedenen Stellen des Maassstabes hinzuzufügen hat, um dieselben unter sich vergleichbar zu machen.

---

dem ersten bis auf $\frac{1}{10}$ übereinstimmt und sich in einer an der anderen Seite des Maassstabes R angebrachten Nuth verschiebt. Die Theilstriche von V_2 liegen denjenigen von V_1 direct gegenüber, mit Ausnahme der

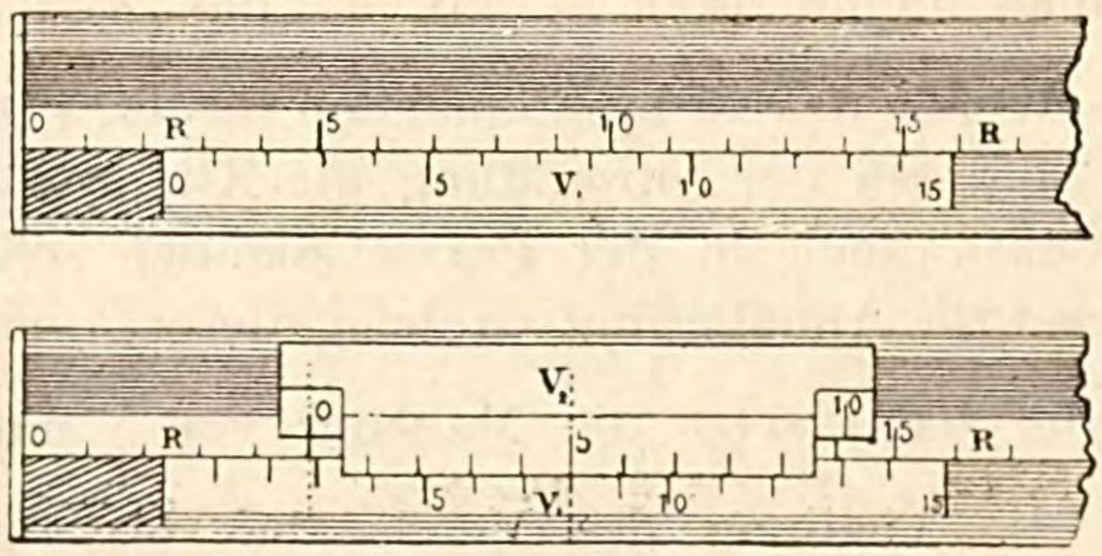


Fig. 175.

beiden äussersten Striche, welche weiter zurückstehen, so dass hier die Striche des Maassstabes R sichtbar werden. V_1 ist wie ein gewöhnlicher Vernier konstruirt, V_2 hat eine Länge von 9,1 Theilstrichen, und die Theilung von V_1 nnd V_2 verläuft im Sinne der Theilung des Maassstabes. Wenn nun beispielsweise der Vernier V_1 für die zu messende Länge angiebt: zwei ganze Maassstab-Einheiten plus einem Reste, der zwischen $\frac{3}{10}$ und $\frac{4}{10}$ liegt, so bringt man den Nullstrich des zweiten Vernier V_2 auf den Strich des Maassstabes, der dem Striche 3 von V_1 am nächsten liegt, und liest nun in der gewöhnlichen Weise den Vernier V_2 ab. Sei beispielsweise 5 die Nummer des Striches von V_2, der mit einem Theilstriche von V_1 zusammenfällt, so hat man zu den schon erhaltenen $\frac{3}{10}$ noch $\frac{5}{100}$ hinzuzufügen.

Kalibermaass. — Eine directe Anwendung des Vernier bietet sich uns in dem Kalibermaass: Der Gegenstand, dessen Dicke gemessen werden soll, wird zwischen zwei Ansätze geklemmt, von denen der eine an dem einen Ende des Maassstabes selbst

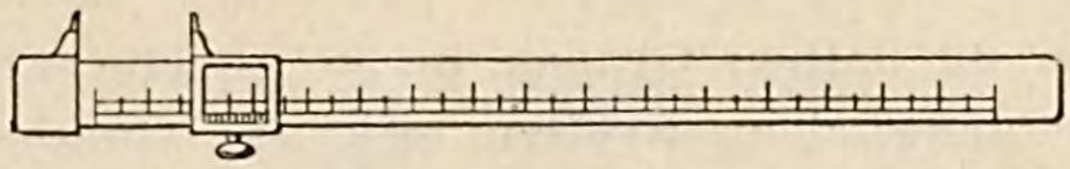


Fig. 176.

angebracht ist, der andere an einem Vernier, der auf dem Maassstabe hingleitet. Der Maassstab selbst ist in Millimeter getheilt, der Schieber trägt beispielsweise einen $\frac{1}{10}$-Vernier, und die Nullpunkte beider Theilungen fallen zusammen, wenn das Kalibermaass geschlossen ist.

Messkeil. — Eine andere einfache Anwendung des Vernier finden wir beim Messkeil,[1]) bei dessen Construction man in geschickter Weise die schiefe Ebene und den Vernier combinirt hat: Über einem in Millimeter getheilten Maassstabe gleitet ein $\frac{1}{10}$-Vernier; letzterer ist auf einem dreieckig-rechtwinkeligen Keile

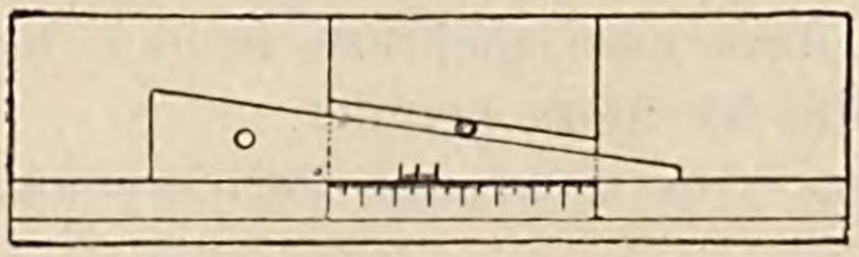


Fig. 177.

angebracht, dessen Hypotenuse das Zehnfache der Höhe beträgt. Der Gegenstand, dessen Dicke gemessen werden soll, wird zwischen die Hypotenusenseite des Keiles und ein zu derselben paralleles Lineal gesteckt, gegen welches der Keil sich eben anlehnt, wenn der Vernier auf Null steht. Der Vernier allein misst auf $\frac{1}{10}$ mm genau die Verschiebung des Keiles, welche durch das Einschieben des zu messenden Körpers bedingt wird; andererseits beträgt aber diese Verschiebung das Zehnfache der gesuchten Dicke; der Apparat giebt also durch eine einfache Ablesung das Hundertel des Millimeter. Man kann jedoch auf diese Genauigkeit nur dann rechnen, wenn man auf den Keil jedesmal denselben passend gewählten Druck ausübt.

---

[1]) Schoenemann, Pogg. Ann. CXLVI, 612, 1872 und Journal de physique, I, 408.

Kreisförmiger Vernier. — Der Vernier wurde, wie früher erwähnt, zuerst bei der Messung von Bogen verwendet. Wenn der Kreis in ganze und halbe Grade getheilt ist, kann man die Minute mit einem $\frac{1}{30}$-Vernier erhalten, den man so herstellt, dass man den Bogen von 29 halben Graden in 30 gleiche Theile theilt.

Bei den vorzüglichen Kreisen, wie sie Gambey zuerst construirte, ist der Grad in 12 gleiche Theile von je $5'$ getheilt. Die Länge des Vernier beträgt 59 Kreistheile, d. h. $5^0 - 5'$, und ist in 60 Theile getheilt, folglich beträgt die Länge eines jeden Vernier-Teiles gleich $5' - 5''$, und man kann also $5''$ ablesen.

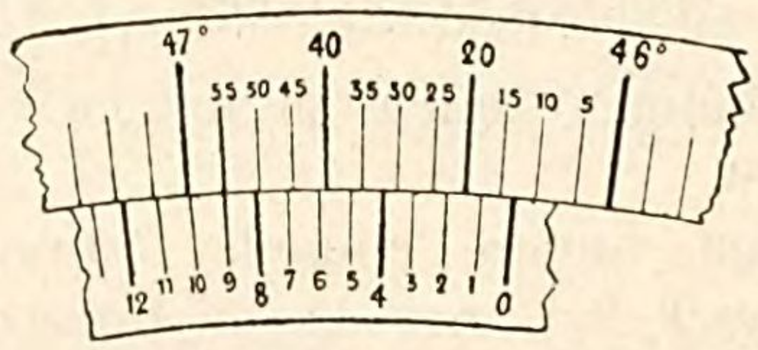


Fig. 178.

Eine noch grössere Genauigkeit, mit dem Nonius zu erreichen, ist schwierig, und auch diese kann man nur unter der Bedingung garantiren, dass man es mit einem gut construirten Theilkreise zu thun hat, und dass man mehrere in der Ebene des Kreises sorgfältig aufgestellte Verniers benutzt.

Die Anwendung von mehreren Verniers hat einen doppelten Grund.

1. Bei einem Theilkreise muss man immer die beiden Enden der beweglichen Alhidade ablesen, um die Fehler der Centrirung zu beseitigen. Nehmen wir an, der Drehpunkt D der Alhidade

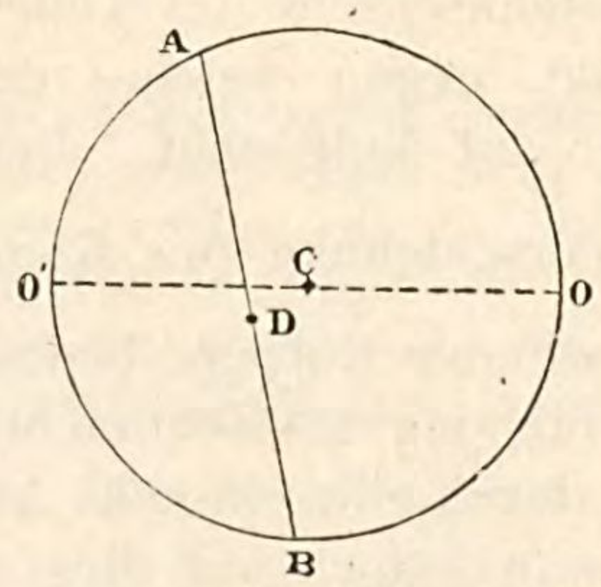


Fig. 179.

falle nicht mit dem Centrum C des Kreises zusammen, dann giebt doch, nach den bekannten Sätzen vom Winkel im Kreise, die halbe Summe der Bogen OA und $O'B$ den Winkel der Alhidade AB

mit der Linie OO'. Man hat also zunächst zwei Verniers an beiden Enden der Alhidade nöthig.

2. Die Theilung des Kreises ist natürlich unvollkommen. Man sucht diesem Mangel dadurch abzuhelfen, dass man an die Alhidade mehrere Indices (gewöhnlich vier) befestigt, welche die Ecken

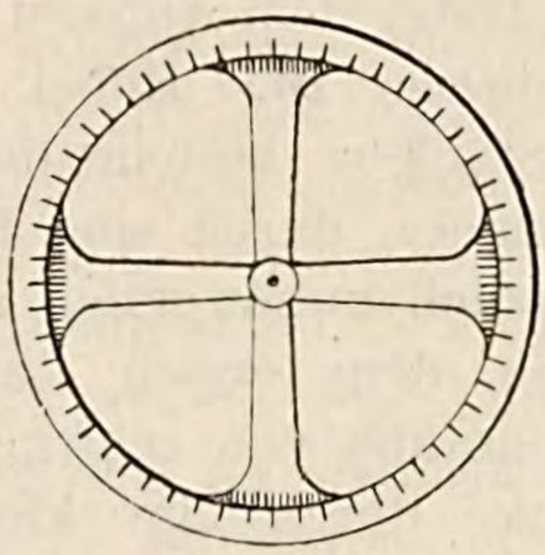


Fig. 180.

eines regelmässigen Polygons bilden. — Das ganze Vielfache von $5'$ wird dann immer mit demselben Index abgelesen, und man fügt dazu das Mittel aus den durch die vier Verniers angegebenen Überschüssen.

Diese Vorsichtsmaassregeln machen gleichwohl eine vorhergehende genaue Untersuchung des Kreises, analog derjenigen, welche jeder getheilte Maassstab erfordert, nicht überflüssig, und zwar hat man zu diesem Zwecke hauptsächlich einen und denselben Winkel mit den verschiedenen Theilen des Kreises zu messen. So allein kann man jedesmal der Stellung der Alhidade bis auf ungefähr $5''$ sicher sein.

Dann bleiben noch die Einstellungsfehler übrig, die man durch andere Mittel zu beseitigen sucht.

111. Der Comparator. — Der Comparator giebt eine interessante Anwendung des kreisförmigen Vernier in Verbindung mit dem Hebel; er dient zur Vergleichung eines Maassstabes mit einem Normalmaasse, also z. B. eines Meters mit einem Normalmeter. Im wesentlichen besteht das Instrument aus einem rechtwinkelig ge-

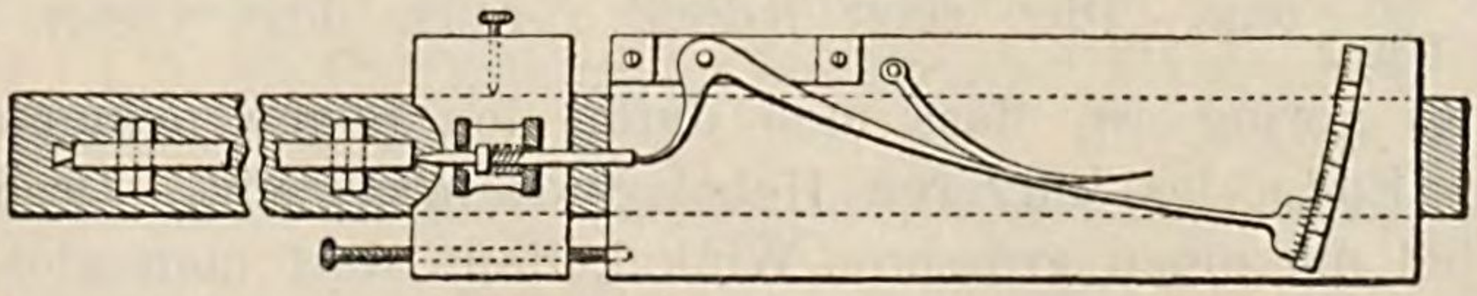


Fig. 181.

bogenen Hebel, dessen in einem Vernier endigender längerer Arm sich vor einem getheilten Kreisbogen bewegt, während der kürzere

Arm gegen einen Schieber drückt, welcher das eine Ende des zu untersuchenden Maassstabes berührt. Der längere Arm des Hebels wird durch eine Feder festgehalten, den Schieber presst ausserdem eine Spiralfeder gegen das eine Ende des Maassstabes an. Das andere Ende des Maassstabes stösst gegen einen stumpfen Zapfen, welcher in eine feste, dem Apparat als Unterlage dienende gusseiserne Bank eingelassen ist. Hebel und Schieber werden von einem aus zwei Stücken bestehenden Schlitten getragen, von denen das eine, kleinere, durch eine Klemmschraube an der Bank befestigt und gänzlich unbeweglich gemacht werden kann, während das zweite mit dem ersten durch eine Zugschraube verbunden ist. Diese Schraube von sehr geringer Ganghöhe hängt mit dem kleineren Stücke durch eine kugelförmige Verdickung zusammen, die in einer Höhlung von derselben Form ruht, und mit dem grossen Stücke durch eine kugelförmige Schraubenmutter, welche ihrerseits in einer kugeligen Höhlung eingeschlossen ist. Die Wände jeder Höhlung lassen sich mehr oder weniger gegen die Kugel im Inneren anpressen, so dass der letzteren nur der zum Functioniren des Systems nothwendige Raum bleibt. Ist nun die Klemmschraube an dem kleineren Stücke gelöst, so kann man den ganzen Schlitten auf der Bank verschieben, und ihn rasch näherungsweise in diejenige Stellung führen, welche dem angewandten Normalmaasse entspricht. Dann zieht man die Klemmschraube an und verschiebt nun mit der Zugschraube den grösseren Theil des Schlittens allein so lange, bis der Nullpunkt des Vernier mit dem Nullpunkte der festen Theilung zusammenfällt. Hierauf ersetzt man das Normalmaass durch den zu untersuchenden Maassstab, ohne ausserdem irgend welche Schraube zu berühren. Ist der Maassstab genau gleich dem Normalmaass, dann kommt der Hebel auf Null zurück; anderenfalls kann man am Vernier den durch das Verhältniss der Hebelarme vergrösserten Unterschied ablesen. Wenn der grosse Arm hundert Mal so lang ist, als der kleine, und der Vernier Zehntel angiebt, während der Bogen in Millimeter getheilt ist, dann erhält man den Unterschied der Maassstäbe auf nahezu $\frac{1}{1000}$ mm. Dies setzt jedoch voraus, dass dieser Unterschied so gering ist, dass man dafür den Bogen nehmen darf, den das Ende des kürzeren Hebelarmes beschreibt. Dreht sich der Hebel um einen grösseren Winkel, dann darf man nicht ohne weiteres die Tangente mit dem Bogen vertauschen; immerhin ist es auch in diesem Falle noch möglich, eine constante Beziehung zwischen den zu messenden Geraden und den vom grossen Hebelarme beschriebenen Bogen zu finden; man braucht zu diesem Zwecke

nur, wie es Perreaux angegeben hat, den kleinen Hebelarm in eine Kreisevolvente endigen zu lassen. Wenn nämlich AD die Evolvente des Kreises vom Radius OA ist, so wird die von dem Ende des Stabes durchlaufene Gerade AC gleich der

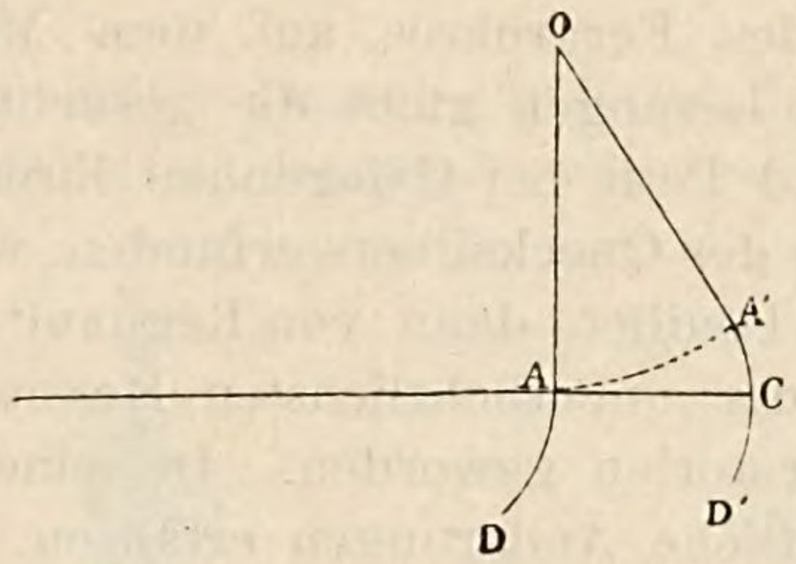


Fig. 182.

Länge des Kreisbogens AA' sein, den man dann mittels des anderen Hebelarmes in vergrössertem Maassstabe misst. Die hauptsächlichste Schwierigkeit besteht nun darin, das Maass dieser Vergrösserung oder, in anderen Worten das Verhältniss der Länge beider Hebelarme zu finden. Eine directe Messung der Arme lässt sich nicht strenge durchführen: Man kann also dieses Verhältniss nur dadurch bestimmen, dass man nach einander zwei Maassstäbe auf den Comparator bringt, deren Differenz von vorne herein genau bekannt ist; hierin liegt eine Schwierigkeit, die nicht immer leicht zu beseitigen ist.

In den letzten Jahren hat man weit vollkommenere Comparatoren construirt, welche im wesentlichen aus zwei absolut festen, mit Mikrometer ausgerüsteten Mikroskopen bestehen, unter die man zuerst die beiden Enden des Normalmaasses bringt, dann diejenigen des zu untersuchenden Maassstabes[1]); aber die Beschreibung dieser Apparate, mit welchen man leicht das Mikron[2]) (μ) erhalten kann, würde uns über den Rahmen dieses Werkes hinaus führen.

112. Das Kathetometer. — *Beschreibung.* Das Kathetometer (*κάθετος* senkrecht, *μέτρον* Maass) dient dazu, die senkrechte Entfernung zweier Punkte ohne Rücksicht auf deren Azimuthe zu messen, d. h. die Entfernung der horizontalen Ebenen, welche durch

---

[1]) Deville et Mascart, Annales de l'École normale supérieure (2), VIII, 16; 1879.

[2]) Bei den neuesten Untersuchungen mit diesen Apparaten, wie sie z. B. fortlaufend im Bureau International des poids et mesures zu Breteuil angestellt werden, ist man sogar bis auf $\frac{1}{20}$ des Mikron gekommen. — G.

die beiden Punkte gelegt sind. Es besteht der Hauptsache nach aus einem vertikalen Maassstab, der um eine vertikale Achse drehbar ist, und einem horizontalen Fernrohre, das sich längs des Maassstabes verschieben lässt und einen Vernier trägt. Man stellt nach einander auf die beiden Punkte ein und liest jedesmal die Stellung des Fernrohres auf dem Maassstab ab: Die Differenz der beiden Lesungen giebt die gesuchte Entfernung.

Von Dulong und Petit bei Gelegenheit ihrer Studien über die absolute Ausdehnung des Quecksilbers erfunden, wurde das Katheto-meter zunächst von Pouillet, dann von Regnault häufig gebraucht, und ist nun eines der unentbehrlichsten Messinstrumente in den physikalischen Laboratorien geworden. In seiner Construction hat es wiederholt wesentliche Änderungen erfahren.

Bei den alten Instrumenten war der auf Messing getheilte Maassstab auf einer cylindrischen Hülse angebracht, welche sich um eine eiserne Achse drehte. Heutzutage wählt man lieber für den Maassstab eine der Flächen eines drei- oder vierseitigen Prismas M aus Messing (cf. Fig. 183); dasselbe ist seiner ganzen Länge nach durchbohrt und von einer stählernen Achse durchsetzt, welcher von einem massiven, mit drei Stellschrauben versehenen Fusse getragen wird. Das obere Ende des Prismas dient als Mutter einer Schraube R, deren Spitze auf dem Ende des stählernen Kernes ruht. Der untere, schwach conisch ausgebohrte Theil des Prismas umschliesst genau einen Zapfen von derselben Form, der das untere Ende des centralen Kernes bildet. Da nun die obere Schraube das Prisma trägt, kann dies mit einer sehr sanften und präcisen Bewegung um die Achse des innneren Kernes gedreht werden, welche mit der Achse des Prismas zusammenfallen muss. Eine Schraube T ermöglicht es, den prismatischen Mantel in einem beliebigen Azimuthe fest zu klemmen.

Auf diesem Mantel gleitet der Träger des Fernrohres, der sich aus zwei prismatischen Schlitten P und Q zusammensetzt; dieselben umschliessen genau das Hauptprisma und sind unter einander durch eine Zugschraube g verbunden. Der untere Schlitten Q trägt ausserdem eine Klemmschraube F, durch welche er an einem beliebigen Theile des Mantels befestigt werden kann. Dieser Mechanismus, den wir schon beim Komparator kennen gelernt haben und der sich bei allen Apparaten wiederfindet, bei denen ein bestimmter Theil verschoben und genau in eine gegebene Stellung gebracht werden soll, gestattet in der That, bedeutendere Bewegungen rasch auszuführen und sodann die Fein-Einstellung mit grosser Genauigkeit folgen zu lassen. Nachdem man nämlich die Klemmschraube gelöst hat, hebt man ohne weiteres

den ganzen Schlitten mit dem Fernrohre ungefähr bis zur gewünschten Visirhöhe, befestigt dann durch Anziehen der Klemmschraube den unteren Theil des Schlittens und verschiebt den oberen Theil desselben mit Hülfe der Zugschraube g so lange, bis sich der gesuchte Punkt genau im Fadenkreuze des Fernrohres befindet.[1])

Das Fernrohr AB ruht auf zwei Gabeln, die an den Enden einer horizontalen Leiste ab angebracht sind. Diese letztere wird

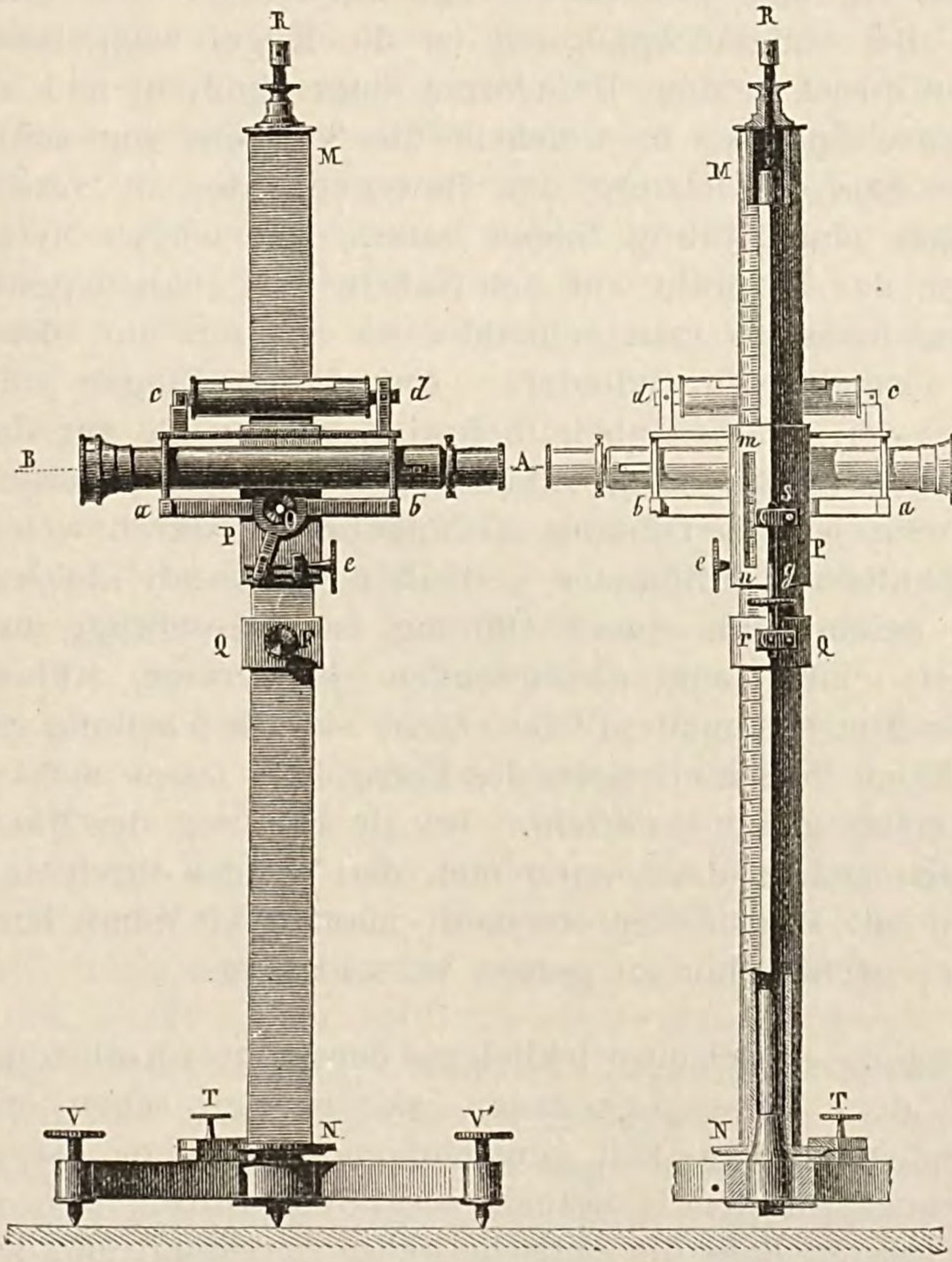


Fig. 183.

[1]) Bei den von Herrn Brünner construirten Apparaten besteht der Mantel aus einem vierseitigen Prisma; vor der einen Seite desselben gleitet der das Fernrohr tragende Schlitten, vor der entgegengesetzten ein Gegengewicht, das mit dem Schlitten durch eine Darmsaite verbunden ist, welche über zwei an der Spitze des Instrumentes befestigte Rollen läuft. So geht, auch in Folge der Breite der Fläche, längs welcher der Schlitten sich verschiebt, die Bewegung ohne jeden Stoss und mit grosser Präcision vor sich.

von dem oberen Theile des Schlittens getragen und kann sich um eine horizontale Achse *O* drehen. Vermöge einer Schraube *e*, die auf einen senkrecht zur Längsrichtung der Leiste angebrachten Hebelarm wirkt, lässt sich das Fernrohr im einen oder anderen Sinne neigen und also immer horizontal stellen. Da das äusserste Ende des Hebelarmes, welches die Schraubenmutter trägt, einen Kreisbogen beschreibt, wenn die Schraube sich parallel zu ihrer Achse fortbewegt, so muss die Kugel, in welche die Mutter eingeschnitten ist, eine gewisse Beweglichkeit nach oben und unten besitzen. Bei einigen Apparaten ist die Kugel weggelassen und die Mutter direct in dem Hebelarme eingeschnitten, und zwar im Innern eines Spaltes, in welchem die Schraube nur seitlich angreift, so dass die letztere der Bewegung des zu verschiebenden Stückes ohne Zwang folgen kann. Die beiden Metallringe, in welchen das Fernrohr auf den Gabeln ruht, haben genau denselben Durchmesser (man schneidet sie aus ein und demselben, sorgsam ausgedrehten Cylinder). Auf diesen Ringen sind nach oben hin zwei andere Gabeln befestigt, welche die zur Justirung des Apparates nothwendige Libelle *cd* tragen. Im oberen Theile des Schlittens ist eine Öffnung *mn* angebracht, durch welche man den gewöhnlich in Millimeter getheilten Maassstab ablesen kann. Eine der Seitenwände dieser Öffnung ist abgeschrägt und trägt den mittels einer Lupe abzulesenden $\frac{1}{50}$-Vernier, während ein kleiner Streifen aus mattem Glase Licht auf die Theilung reflectirt. Die vertikalen Verschiebungen des Fernrohres lassen sich also auf 0,02 Millimeter genau ermitteln. Ist die Theilung des Maassstabes vollkommen genug, dann kann man den Vernier durch ein kleines Mikroskop mit Mikrometer ersetzen; man erhält damit leicht 0,01 Millimeter; noch weiter zu gehen, ist schwierig.

Gebrauch. — Auch ein wirklich gut construirtes Kathetometer, — und nach dem Vorausgegangenen lässt es sich schon ermessen, dass dasselbe durchaus kein ganz einfaches Instrument ist, — muss man jedesmal vor dem Gebrauche sorgfältig justiren, d. h. man hat dafür zu sorgen, dass die optische Achse horizontal und die Achse des Instruments vertikal steht.

Zu diesem Zwecke bedient man sich der mit dem Fernrohre verbundenen Libelle. Wenn man nämlich mit Hülfe dieser Libelle die Achse des Kathetometers senkrecht stellt, nachdem man zuvor schon die Visirlinie parallel der Libellenachse gemacht hat, dann genügt ein und dieselbe Operation, um das Stativ vertikal und die Fernrohrachse horizontal zu richten.

1. *Justirung.* — Die erste Aufgabe besteht also darin, ein für alle Mal die Visirlinie parallel der Libellenachse zu stellen.

Das Kathetometerfernrohr ist ein astronomisches Fernrohr mit einem Fadenkreuze, welch letzteres mit Hülfe passend angebrachter Schrauben verschoben werden kann. Das Anvisiren besteht darin, dass man das von dem Objectiv entworfene reelle Bild des beobachteten Punktes in den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes bringt; die Visirlinie ist also die Linie, welche den optischen Mittelpunkt des Objectivs mit dem Kreuzungspunkte des Fadenkreuzes verbindet, d. h. die *optische Achse* des Fernrohres. Um diese mit der Libellenachse parallel zu stellen, hat man zuerst dafür zu sorgen, dass die optische Achse des Fernrohres mit seiner geometrischen Achse, d. h. der gemeinsamen Achse der Ringe, in welchen das Fernrohr auf den Gabeln ruht, zusammenfällt.

Hierzu verfährt man folgendermaassen: Man stellt einen Punkt ein und dreht, ohne etwas an den anderen Theilen zu verrücken, das Fernrohr in seinem Lager, so dass die Ringe auf den Gabeln gleiten; hierdurch wird die optische Achse nicht geändert. Sodann verschiebt man mit Hülfe der Schrauben das Fadenkreuz so lange, bis bei der Drehung das Bild des beobachteten Punktes immer mit dem Kreuzungspunkte des Fadenkreuzes zusammenfällt. Hat man dies erreicht, dann ist die erste Bedingung erfüllt.

Die zweite Aufgabe besteht darin, die geometrische Achse des Fernrohres der Libellenachse parallel zu stellen. Zu diesem Zwecke bewegt man die zu der gabelförmigen Unterlage des Fernrohres gehörige Zugschraube so lange, bis die Blase der Libelle zwischen ihren Marken steht, dann ist die Linie, welche die Marken verbindet, horizontal. Hierauf nimmt man das Fernrohr mit der Libelle ab, dreht es um 180^0 um eine vertikale Achse und setzt es wieder auf die Gabeln. Wenn die Ringe ganz gleich sind, so nimmt nun die Fernrohrachse wieder genau die vorherige Lage ein. War dieselbe in ihrer ersten Lage nicht horizontal, so wird jetzt die Libellenachse doppelt so stark gegen eine horizontale Ebene geneigt sein, als die Fernrohrachse. Es seien in der ersten Stellung XX_1 die Fernrohrachse, AB die Libellenachse, d. h. die Linie, welche die Libellenmarken verbindet, X'_1X' und $B'A'$ die entsprechenden Stellungen nach der Umdrehung. Ziehen wir nun durch O' die Gerade $O'A_1$ horizontal und $O'x$ parallel X'_1X', so ist klar, dass $\sphericalangle A'O'A_1$, d. h. der Winkel zwischen der Libellenachse und der Horizontalen, doppelt so gross ist als $\sphericalangle A_1O'x$, der Neigungswinkel der Fernrohrachse gegen die Horizontale. Ist aber die Libellenachse nicht mehr horizontal, dann verschiebt sich die Luftblase

und stellt sich so, dass die Verbindungslinie ihrer Enden wieder horizontal wird. Die zu dieser Verbindungslinie durch O' gezogene Parallele ist also wieder die Gerade $O'A_1$, und der Winkel, um

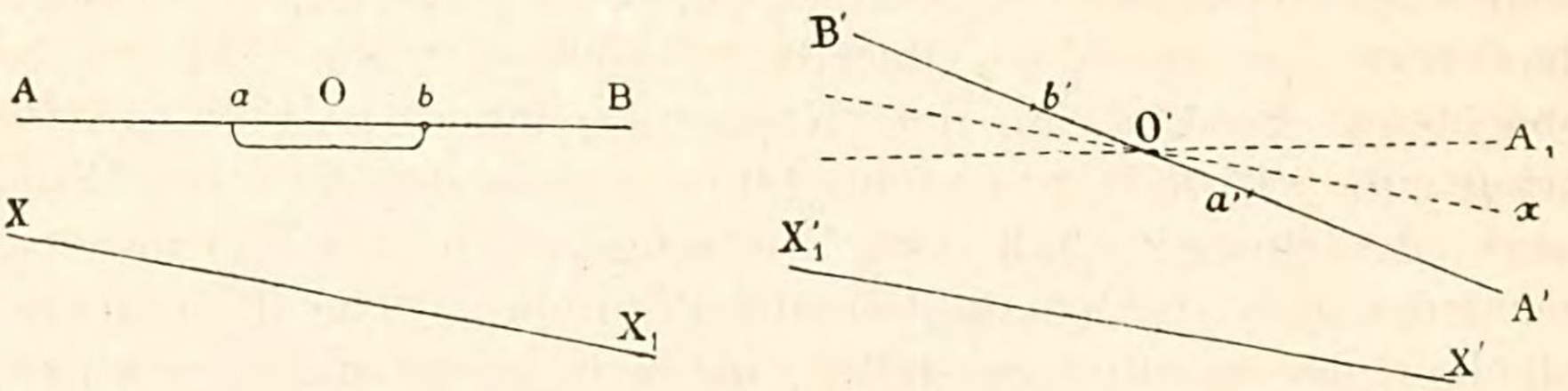


Fig. 184.

den diese Verbindungslinie gedreht werden muss, ist $\sphericalangle A_1O'A'$. Da nun das Profil einer guten Libelle genau kreisförmig ist, so ist der von der Libellenblase durchlaufene Bogen auch proportional dem Drehungswinkel, hier also proportional dem Doppelten des Winkels zwischen der Fernrohrachse und der Horizontalen. Man bewegt nun die zur Fernrohrgabel gehörige Schraube so lange, bis die Luftblase auf die Hälfte ihrer Entfernung von den Mittelmarken zurückgekommen ist, und corrigirt die andere Hälfte der Verschiebung mit Hülfe der zur Libelle selbst gehörigen Stellschraube (jede Libelle ist nämlich so eingerichtet, dass man mit Hülfe einer Schraube das eine Ende heben oder senken kann, während das andere in Ruhe bleibt). Durch dies Verfahren hat man also die Achse des Fernrohres horizontal gestellt und die Luftblase der Libelle zwischen ihre Marken zurückgeführt. Eine neue Drehung um 180^0 sollte nun keine weitere Verschiebung der Blase zur Folge haben, — im allgemeinen jedoch wird wegen der Unvollkommenheiten des Instrumentes und der Ungenauigkeit der Correction das Gegentheil stattfinden, und man hat demnach die neue Verschiebung wiederum zur Hälfte mit der zum Fernrohr, zur anderen Hälfte mit der zur Libelle gehörigen Schraube zu corrigiren. Indem man dies Verfahren fortsetzt und jedesmal kleinere Verschiebungen erhält, gelangt man bald dahin, dass sowohl Fernrohr- als Libellenachse horizontal stehen, so dass es in der Folge genügt, die Libellenblase zwischen ihren Marken einspielen zu lassen, um sicher zu sein, dass die Visirlinie horizontal steht.

2. *Regulirung.* — Die Regulirung, mit der man jedesmal vor dem Gebrauche des Apparates beginnen muss, ist folgendermaassen durchzuführen: Durch Drehen des ganzen Mantels um die Achse bringt man das gabelförmige Lager des Fernrohres und damit auch

die Libelle in eine Richtung, welche der Verbindungslinie von zwei der Stellschrauben am Fusse nahezu parallel ist; bewegt man dann diese Stellschrauben, bis die Luftblase zwischen den Marken steht, so ist die Verbindungslinie der Mitten der Marken horizontal. Nun dreht man den Mantel um 180^0; steht die Kathetometerachse senkrecht auf der durch die erste Stellung der Libellenblase bestimmten Horizontalen, so wird die Blase zwischen ihre Marken zurückkehren; wenn nicht, dann wird sie eine deutliche Verschiebung erfahren.

Wir denken uns durch einen beliebigen Punkt der Achse ZZ' Parallele zu den verschiedenen Stellungen der Libellenachse während

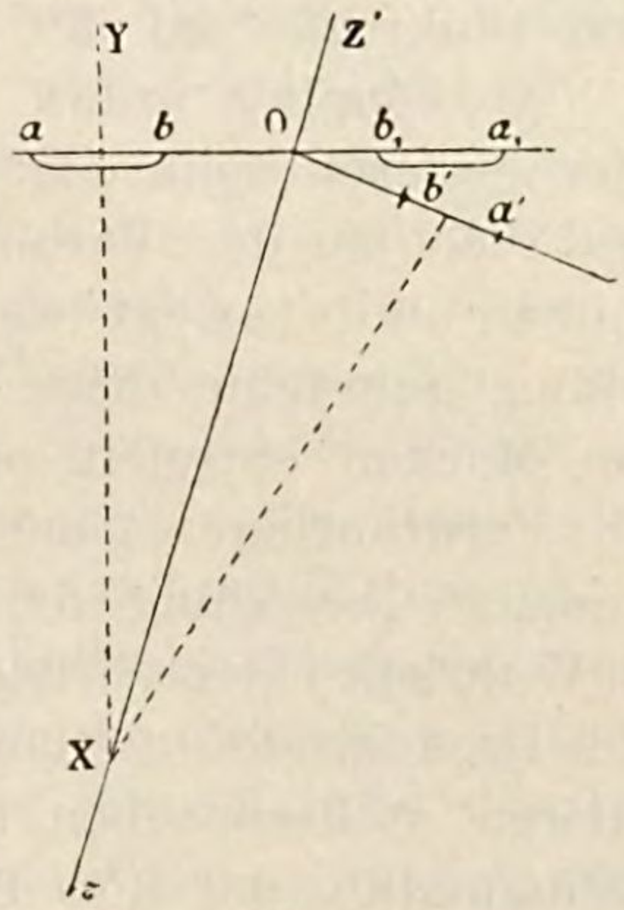


Fig. 185.

ihrer Drehung um ZZ' gezogen; dann liegen diese Geraden auf dem Mantel eines Kegels, und zwar gehören dazu auch die Geraden Oba und $Ob'a'$, die in Bezug auf OZ symmetrisch zu einander sind. Die Libellenblase, die zuerst zwischen ihren Marken stand, hat sich nach der Drehung um 180^0 etwas verschoben, wobei aber die Linie, welche beide Enden der Blase verbindet, immer horizontal bleibt; die durch den Punkt O gelegte Parallele zu dieser Verbindungslinie fällt demnach zusammen mit der Horizontalen $ab Ob_1 a_1$. Die Winkelverschiebung der Blase ist also $= \sphericalangle a_1 O a'$, d. h. gleich dem doppelten des Winkels, um welchen man die Achse ZZ' heben muss, um sie senkrecht zur Horizontalen aOa_1 zu stellen. Man dreht nun die eine oder andere ber beiden Stellschrauben, mit deren Verbindungslinie die Libelle parallel steht, bis die Verschiebung der Blase auf die Hälfte zurückgegangen ist;

die andere Hälfte corrigirt man mit der zum Fernrohrlager gehörigen Schraube, auf dem auch die Libelle ruht. Auf diese Weise hat man die Kathetometerachse in eine zur Horizontalen aOa_1 senkrechte Ebene gebracht und die Blase zwischen ihre Marken zurückgeführt. Wenn man nun durch eine erneute Drehung des Mantels um 180^0 in die ursprüngliche Stellung zurückkehrt, sollte die Blase eigentlich zwischen ihren Marken stehen bleiben. Das wird jedoch im allgemeinen nicht der Fall sein, man hat also die neue Verschiebung wiederum zur Hälfte durch die Stellschrauben am Fusse, zur Hälfte durch die am Fernrohrlager zu corrigiren, und so fort, bis die Achse zu der Horizontalen aO senkrecht steht. Nun ist es klar, dass die Achse vertikal steht, wenn wir dasselbe Resultat für irgend eine beliebige, zweite Horizontale erhalten, denn dann ist sie eben senkrecht auf der durch beide Horizontalen gelegten Ebene. Gewöhnlich wählt man nun als zweite Horizontale die auf der ersteren senkrecht stehende, d. h. man dreht das Fernrohr senkrecht zu der Verbindungslinie der bisher gebrauchten Fussschrauben und bewegt weiterhin *nur* die bisher noch nicht in Anwendung gebrachte dritte Stellschraube, bis die Luftblase zwischen den Marken einspielt, nicht aber die beiden anderen oder die zum Fernrohrlager gehörige. Theoretisch betrachtet würde diese einzige Bewegung nun genügen, die Achse senkrecht zu stellen. In Wahrheit jedoch bringt die Verschiebung der dritten Stellschraube eine Drehung des Instrumentes um die stumpfen Füsse der beiden anderen Stellschrauben hervor; damit ändern sich aber die beiden Stützpunkte auf dem Boden, und die in der ersten Reihe von Manipulationen erhaltenen Ergebnisse werden mehr oder weniger verschlechtert. Man muss also alles nochmals wiederholen; wenn man die Correctionen aber systematisch und immer in derselben Reihenfolge vornimmt, werden die Verschiebungen der Blase immer kleiner und kleiner, und man gelangt endlich zu einer vollkommenen Regulirung, die sich daran zeigt, dass bei einer vollständigen Drehung des Apparates um die Achse die Blase unbeweglich zwischen den Marken stehen bleibt. Ausserdem ist es wesentlich, dass nicht nur das Kathetometer gut construirt ist, sondern dass es auch auf einer erschütterungsfreien Unterlage ruht. Ohne diese Bedingung, die übrigens viel schwieriger zu erfüllen ist, als man glauben sollte, bleiben alle eben beschriebenen Operationen ohne Erfolg, und eine Regulirung ist überhaupt nicht durchführbar. Aber auch im günstigsten Falle bleibt dieselbe noch langwierig genug; man sucht sie deshalb dadurch abzukürzen, dass man zwei rechtwinkelig gegen einander gerichtete Libellen auf dem Fusse des Apparates befestigt. Ist dann die Achse einmal

gut vertikal gerichtet, so bringt man die Blase jeder Libelle zwischen ihre zugehörigen Marken, und braucht späterhin, wenn das Kathetometer von neuem regulirt werden soll, nur mit Hülfe der Stellschrauben am Fusse die Luftblasen einspielen zu lassen, um zu erreichen, dass die Kathetometerachse von selbst sehr nahe vertikal steht; die mit der Fernrohrlibelle auszuführenden Manipulationen sind dann weit weniger zahlreich.

Systematische Fehler. — Ist die Regulirung durchgeführt, so bleiben noch die Unvollkommenheiten des Apparates selbst übrig, die sich durch diese Regulirung natürlich nicht heben lassen: Die Ungenauigkeit der Theilung sowie der Richtungsunterschied zwischen Maassstab und Drehungsachse.

Um die Fehler zu berücksichtigen, welche von der Theilung herrühren, verfährt man wie gewöhnlich: Man misst ein und dieselbe Länge mit den verschiedenen Theilen des Kathetometer-Maassstabes, und erhält dadurch die nothwendigen Elemente für die Construction einer Curve, welche gestattet, die mit den verschiedenen Theilen des Maassstabes ausgeführten Messungen unter sich zu vergleichen. Gleichwohl gewinnt man auf diese Weise nur Zahlen, welche den thatsächlichen Entfernungen proportional sind, die aber im allgemeinen genügen, weil man gewöhnlich nur relative Entfernungen zu bestimmen hat. Wollte man dagegen absolute Maasse haben, dann müsste man noch die immerhin schwierige Vergleichung des Maassstabes mit einem Normalmeter durchführen und damit den wirklichen Werth jedes Maassstabtheiles bestimmen.

Ist das Kathetometer gut regulirt, so hat ein kleiner Richtungsunterschied zwischen Maassstab und Achse offenbar keinen merklichen Einfluss, wenn die zu bestimmenden Punkte nahezu in gleicher Höhe, aber in sehr verschiedenen Azimuthen liegen, und ebenso wenig, wenn sie sich in grosser Entfernung, aber nahezu denselben Azimuthen befinden (in diesem Falle hat es nicht einmal grossen Werth, die Drehungsachse genau senkrecht zu stellen). Die einzige Vorsichtsmaassregel, die man hierbei zu beachten hat, besteht darin, dass man jedesmal das Fernrohr nur in genau horizontaler Lage benutzt, aus welcher es bei einer grossen vertikalen Verschiebung leicht herausgebracht werden könnte; zu diesem Zwecke bedient man sich der mit dem Fernrohrlager verbundenen Schraube. Hat man aber zwei sowohl in grosser Entfernung als auch unter wesentlich verschiedenen Azimuthen gelegene Punkte zu bestimmen, dann nimmt man einen dritten Punkt zu Hülfe, der in derselben Ebene liegt, wie der eine der zu bestimmenden Punkte, und unter demselben Azimuth, wie der andere.

Die Schwierigkeit, bei der Herstellung eine exacte Führung des Fernrohres mit einer bequemen und sicheren Anordnung des Maassstabes zu vereinigen, ist der Grund, weshalb man häufig lieber zwei getrennte Instrumente verwendet: Ein Kathetometer ohne Theilung und einen vertikalen Maassstab, der in der Nähe der zu bestimmenden Punkte angebracht ist.[1] [2]

2. Die Mikrometerschraube.

113. Von der Schraube. — Die Schraube soll von Archytas aus Tarent, einem phythagoräischen Philosophen und Zeitgenossen von Plato (400 v. Chr.), erfunden worden sein.

Wenn wir uns denken, dass längs einer auf einem Cylindermantel beschriebenen Schraubenlinie eine Ecke eines gleichschenkeligen Dreiecks oder eines Quadrates gleitet, und zwar so, dass seine Ebene immer durch die Cylinderachse geht, während eine seiner Seiten fortwährend auf der Oberfläche des Cylinders bleibt, so erhalten wir eine Schraube, bei welcher die Ganghöhe, d. h. die Entfernung zwischen zwei auf einander folgenden Schnittpunkten der Curve mit einer Erzeugenden des Cylinders, dieselbe ist, wie bei der Schraubenlinie. Dreht sich die Schraube in ihrer Mutter um eine ganze Umdrehung, so rückt sie längs ihrer Achse um eine ihrer Ganghöhe gleiche Strecke vorwärts; dreht sie sich nur um einen Bruchtheil einer Umdrehung, so rückt sie um den nämlichen Bruchtheil ihrer Ganghöhe vor. Dadurch also, dass man den Winkel misst, um den man die Schraube dreht, kann man jeden gewünschten Bruchtheil einer einzelnen Ganghöhe bestimmen und so mit Hülfe einer vollkommen gearbeiteten Schraube

---

[1]) So wurde nach Angaben von A. Terquem (Journ. de phys. 2, p. 496—503, 1883) von Dumoulin-Froment ein neues Kathetometer erbaut, dessen wesentliche Verbesserung auf der oben erwähnten vollkommenen Trennung der Scala von der Säule beruht, längs welcher das Fernrohr gleitet. Man stellt das um eine vertikale Achse drehbare Fernrohr zunächst auf den obersten Punkt der zu messenden Länge ein und visirt dann nach dem dieser Horizontalebene zunächst liegenden Maassstabstrich; ebenso verfährt man beim untersten Punkte. Die Bruchtheile der Millimeter werden mit Hülfe einer Mikrometerschraube bestimmt, welche eine langsame Verschiebung des Schlittens gestattet (oder bei anderen Instrumenten mit Hülfe eines Fadenmikrometers, das im Fernrohre selbst angebracht ist). Ein genau gearbeitetes und gut justirtes Instrument giebt noch 0,005 mm. — G.

[2]) Über die Theorie des Kathetometers siehe auch: Löwenherz und Czapski, Das Kathetometer. Ztschr. f. Instrumentenkunde 1886. — G.

sehr kleine Grössen messen. Der Physiker besitzt eine natürliche und mathematisch ganz vollkommene Schraube, den Lichtstrahl; aber die Existenz derselben, deren Ganghöhe für gelbes Licht nur ein halbes Mikron beträgt und bei welcher man noch leicht mit $\frac{1}{1000}$ Umdrehung rechnen kann, schliesst nicht den Gebrauch materieller Schrauben aus, deren Handhabung leichter und deren Verwendung gebräuchlicher ist.

Mikrometer- oder Präcisionsschraube nennt man eine sehr regelmässig gearbeitete Schraube, deren Ganghöhe nur gering ist (gewöhnlich 0,5 Millimeter) und deren Kopf eine getheilte Trommel trägt, welche sich an einem festen Index vorbei bewegt. Mit einer solchen Schraube von 0,5 Millimeter Ganghöhe und 1 bis 3 Centimeter Durchmesser kann man, wenn sie hinreichend genau gearbeitet ist, recht wohl noch das Mikron (μ) ermitteln.

Entweder bewegt sich die Mikrometerschraube frei in einer festen Mutter, oder sie verschiebt eine bewegliche Mutter, indem sie sich einfach um sich selbst bewegt, ohne ihrerseits vorzurücken. Die erstere Anordnung finden wir beim Sphärometer[1]), die letztere bei der Theilmaschine.

114. Sphärometer. — Das Sphärometer dient dazu, die Höhe und damit auch den Krümmungshalbmesser einer Kugelschale, oder allgemeiner, jede geringe Dicke zu messen. Es besteht im Principe aus einer Mikrometerschraube, die sich in senkrechter Richtung vorwärts bewegt, und einer Schraubenmutter auf drei Füssen, welche die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bestimmen, dessen Mittelpunkt senkrecht unter der Schraubenachse liegt. Die aus

---

[1]) Dieselbe Anordnung ist auch verwendet bei dem nebenstehend

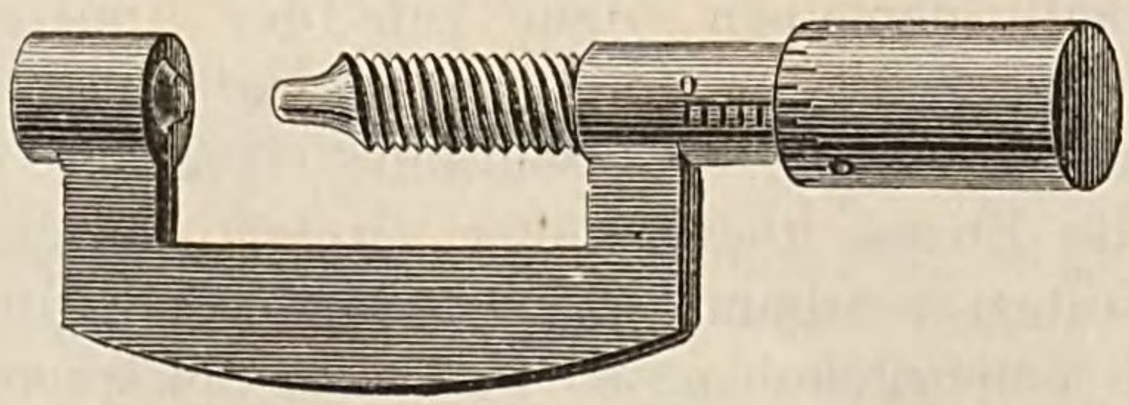


Fig. 186.

abgebildeten Dickenmesser, welcher leicht die Dicke eines Gegenstandes auf ca. $\frac{1}{20}$ Millimeter genau zu bestimmen gestattet.

Stahl gearbeitete Schraube hat meist eine Ganghöhe von 0,5 Millimeter; sie endigt unten in eine stumpfe Spitze P, oben in eine kreisförmige Platte LL', deren Peripherie in 500 gleiche Theile getheilt ist; in der Mitte der Platte befindet sich ein gekerbter Knopf, der zum Anfassen dient. Die Schraubenmutter ist in einen Dreifuss aus Bronce eingeschnitten, der mit drei stumpfen Spitzen A, B, C auf einer mattgeschliffenen, ebenen Glasplatte ruht. Einer der Füsse trägt einen senkrechten Maassstab RR', dessen in halbe Millimeter getheilter Rand die Kreisfläche LL' streift; auf diese Weise überblickt man zwei Theilungen, diejenige des Maassstabes, welche die ganzen Umdrehungen der Schraube giebt,

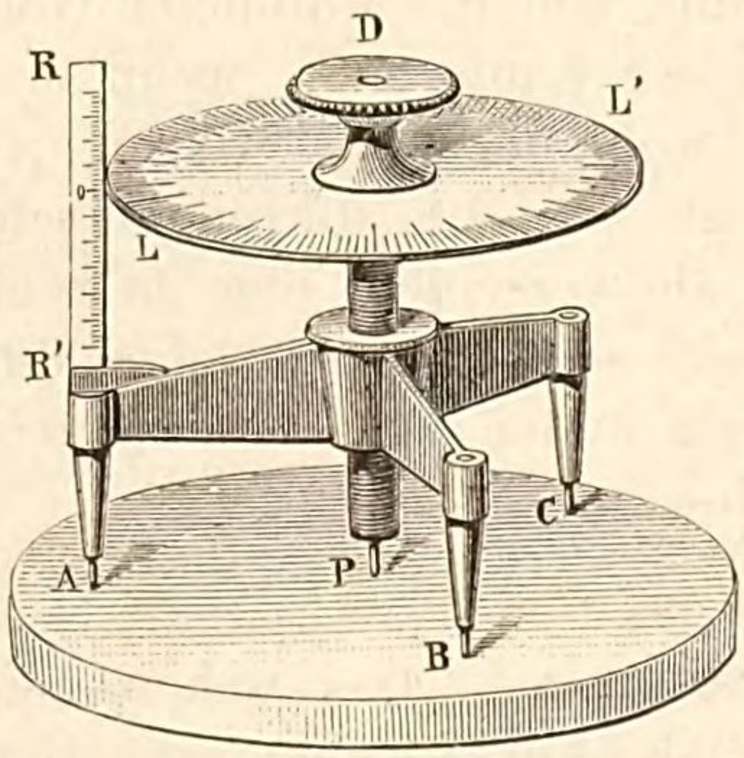


Fig. 187.

und diejenige des Kreises, welche 0,002 Umdrehung abzulesen gestattet. Will man nun mit dem Sphärometer eine gegebene Dicke messen, z. B. die einer Glasplatte, so hat man zunächst den Nullpunkt des Apparates zu bestimmen, d. h. diejenige Stellung der Schraube, für welche ihre Spitze in der Ebene der Spitzen des Dreifusses liegt. Nehmen wir an, das Sphärometer stehe auf einer ebenen Unterlage, und der Endpunkt der Schraube befinde sich anfangs oberhalb derselben, dann ruht der Apparat auf seinen drei Füssen und wird in vollkommen stabilem Gleichgewichte sein. Bewegt man nun die Schraube langsam abwärts, bis ihre Spitze die Ebene überschreitet, welche durch die Spitzen der Fussschrauben bestimmt ist, so wird einer der Füsse von der Unterlage emporgehoben, so dass das Sphärometer jetzt auf der Spitze der Schraube und den beiden anderen Füssen ruht. Dies kann man leicht erkennen, wenn man mit dem Finger auf die obere Platte drückt und den Apparat um die Spitze in der

Mitte zu wippen sucht, wobei jeder der Füsse nach einander die Unterlage verlässt, oder wenn man ihn um dieselbe Spitze dreht, wobei die Füsse ein eigenthümliches Knirschen hören lassen.[1]) Nun hebt man die Schraube langsam wieder, bis diese beiden Bewegungen unmöglich geworden sind; dann ragt die Spitze nicht mehr hervor, aber es könnte sein, dass man sie zu hoch gehoben hätte. Um dies zu erkennen, senkt man sie wieder, hat aber vorher den Theilstrich der Scheibe abzulesen, welcher bei der letzteren Stellung dem Maassstabe gegenüber stand. Dasselbe thut man, wenn das Sphärometer wieder dem Drucke des Fingers nachzugeben beginnt, und indem man so die beiden Grenzen enger und enger zieht, gelangt man zu einem Punkte, wo beide Lesungen sich nur um 1 bis 2 Theilstriche unterscheiden, zwischen denen dann der gesuchte Nullpunkt liegt; letzteren hat man also bis auf 0,002 des Umfanges, d. h. ca. 0,001 Millimeter genau ermittelt. Hierauf bringt man die zu messende Glasplatte unter die mittelste Spitze des Sphärometers und verfährt in ganz derselben Weise; hat man dann die mittelste Spitze bis gerade zur Berührung mit der Platte gebracht, während die drei anderen Spitzen auf der Unterlage ruhen, so genügt es, sowohl auf dem Maassstabe als auch auf dem Kreise die neue Stellung der Spitze abzulesen, — die Differenz beider Lesungen giebt die gesuchte Dicke auf 0,001 bis 0,002 Millimeter genau.[2])

Kann man das zu messende Plättchen nicht direct unter die Spitze der Schraube bringen, so bedeckt man es mit einer planparallelen Glasplatte von bekannter Dicke, und selbst in den Fällen, wo man es mit sehr feinen Plättchen, z. B. mit Blattgold, zu thun hat, kann man mehrere unter einer planparallelen Platte über einander schichten. Auf gleiche Weise erhält man den Durchmesser eines Fadens oder eines Haares, indem man unter die Glasplatte von bekannter Dicke drei Endchen derselben bringt, die man in Form eines Dreieckes legt.

---

[1]) Diese akustische Methode der Einstellung gewinnt noch wesentlich an Genauigkeit, wenn man als Unterlage für das ganze System einen Resonanzkasten wählt. — G.

[2]) Zur genauen Bestimmung der Stellung, in welcher die Spitze der Schraube die Unterlage berührt, benutzt man neuerdings als Unterlage vielfach eine Combination aus einer ebenen, geschliffenen Glasplatte und einer sehr schwach gekrümmten Glaslinse. Die zwischen beiden erscheinenden Interferenzstreifen (Newton'sche Ringe) ändern ihre Lage beim geringsten Drucke, der auf die Linse ausgeübt wird. — G.

Um den Krümmungsradius einer Kugelfläche oder einer Linse zu messen, kittet man die Linse SS' in ein Stück Holz ein, setzt das Sphärometer mit seinen drei äusseren Spitzen A, B, C auf dieselbe und dreht die Schraube, bis ihre Spitze P die Oberfläche der Linse berührt; diese Stellung liest man ab. Sodann bringt man das Sphärometer auf die plane Glasplatte und sieht zu, um welche Strecke man die Schraube verschieben muss, um zum Nullpunkt zu gelangen. Man kennt dann die Höhe $PD = f$ der Kugelschale, welche zur Basis den kleinen Kreis hat, der

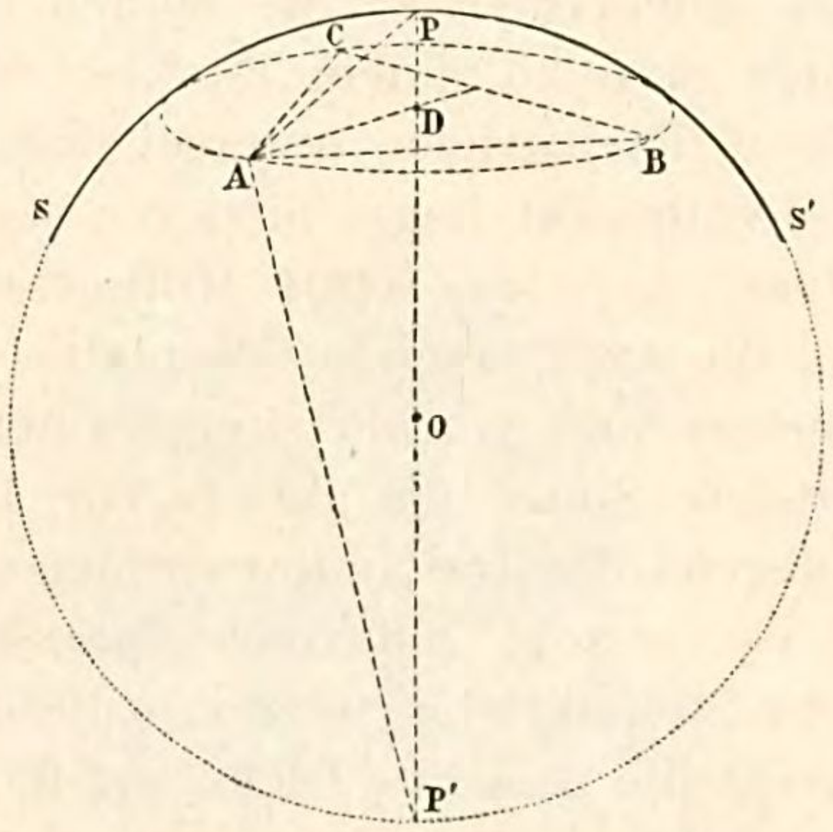


Fig. 188.

einem durch die drei Punkte A, B, C gelegten gleichseitigen Dreieck umschrieben ist. Bezeichnet l die Seite dieses Dreiecks, r den Radius des umschriebenen Kreises ABC, dann ist $r = \frac{l}{\sqrt{3}}$; andererseits hat man $r^2 = f(2x - f)$, wenn man unter x den gesuchten Krümmungsradius OP versteht; es folgt also:

$$x = \frac{l^2 + 3f^2}{6f}.$$

Bei den älteren Instrumenten war l unveränderlich, und der Gebrauch eines jeden derselben in Folge davon beschränkt; eine sehr einfache Anordnung jedoch gestattet, ein und dasselbe Sphärometer bei Linsen mit ganz verschieden grosser Oberfläche zu benützen: Die stumpfen Spitzen können nämlich beliebig in Löchern festgeschraubt werden, welche so angeordnet sind, dass die der-

selben Zahl entsprechenden Löcher die Eckpunkte eines und desselben gleichseitigen Dreiecks bilden.[1])

Wenn man mehrere Male mit dem Sphärometer dieselbe Messung wiederholt, so findet man gewöhnlich Unterschiede von 1 bis 2 Theilstrichen, woraus man schliessen kann, dass sich die Annäherung mit einem so construirten Apparate nicht weiter treiben lässt; es wäre also illusorisch, wollte man die Anzahl der Theilstriche des Kreises noch vermehren. In der That giebt das Glas unter der Spitze der Schraube immer etwas nach, und um vollkommen genaue Messungen zu erhalten, müsste man immer die Spitze gleich stark gegen die Unterlage andrücken, was bei einem gewöhnlichen Apparate seine Schwierigkeit hat. Herr Perreaux sucht diesem Mangel dadurch abzuhelfen, dass er als Spitze das äusserste Ende eines Stiftes nimmt, der die Schraube ihrer ganzen Länge nach durchsetzt (cf. Fig. 188[a]). Im oberen Theile durch einen Wulst festgehalten, folgt der Stift stets der Schraube bei ihrer Bewegung nach oben; senkt sich die Schraube, so folgt der Stift ebenfalls, bis sein unteres Ende die Glasplatte berührt; dann hält er an, während die Schraube allein sich weiter bewegt. Dass der Stift feststeht, erkennt man aus der Bewegung einer Nadel, welche auf einem Theilkreise angiebt, um wie viel die Schraube ihre Nullstellung überschritten hat. Diese Nadel bildet nämlich den längeren Arm eines Hebels, dessen kürzerer Arm durch einen zweiten Hebel in Bewegung gesetzt wird, welcher auf dem Kopfe des Stiftes aufsitzt. Indem man nun stets die Nadel auf Null einstellt, drückt man immer die Spitze gleichmässig stark gegen die Unterlage an, und die Genauigkeit der Messung ist dadurch gesichert.[2]) Weiter aber

---

[1]) Von A. M. Mayer wurde (Sill. Journ. 32, p. 61—69, 1886) ein einfaches Verfahren angegeben, um den Krümmungsradius einer Linse von beliebigem Durchmesser zu messen. Man bedarf hierzu als Unterlage zweier ebenen Glasplatten, deren oberste von einer kreisförmigen Öffnung mit bekanntem Durchmesser durchbohrt ist. Auf diese wird das Sphärometer aufgesetzt, und die Schraube so lange gedreht, bis ihre Spitze die Oberfläche der unteren Platte berührt. Hierauf ersetzt man die letztere durch die zu untersuchende Glaslinse, auf deren Oberfläche das Sphärometer wieder eingestellt wird, und zwar wählt man diejenige Stellung der Linse, für welche die Spitze des Sphärometers am höchsten steht. Bezeichnet R den Radius der Linse, r denjenigen der kreisförmigen Durchbohrung, h die Höhe des obersten Linsenpunktes über der unteren Fläche der Öffnung, so ist

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}.$$ G.

[2]) Der doppelte Hebel kann mit Vortheil durch eine Libelle ersetzt werden, deren Luftblase vor jeder Lesung zwischen ihre Marken zu bringen ist.

tritt noch die Ungenauigkeit der zu untersuchenden Oberflächen störend auf, und es ist im allgemeinen vergeblich, eine das Mikron

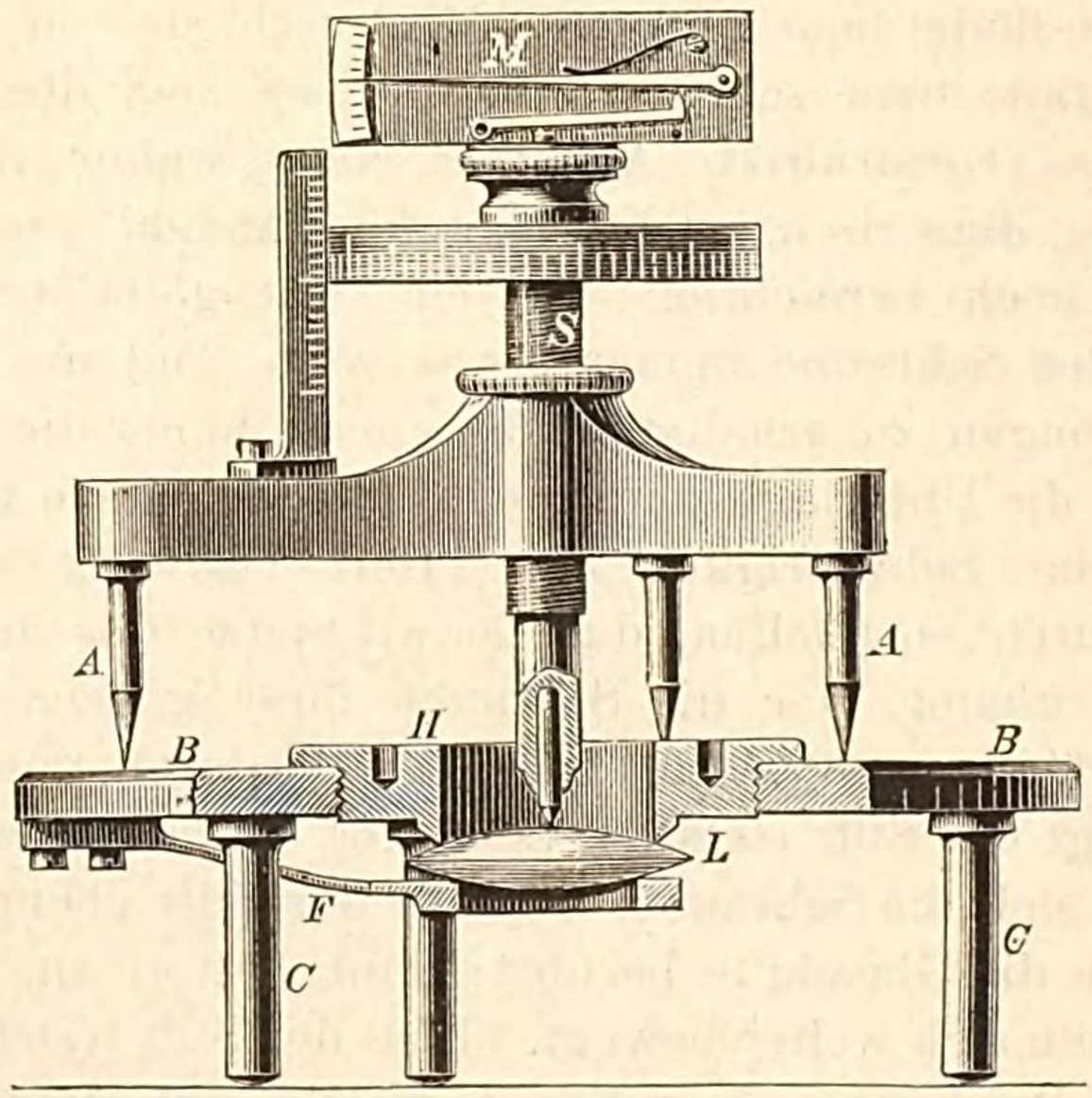


Fig. 188 a.

überschreitende Annäherung zu suchen. Eine noch grössere Genauigkeit hat übrigens auch nur in dem Falle ein Interesse, wo es sich darum handelt, eine Oberfläche Punkt für Punkt zu untersuchen, um zu sehen, ob sie überall genau denselben Krümmungsradius besitzt oder ob sie vollkommen eben ist, und bei solchen Untersuchungen führen die optischen Verfahren, die wir später kennen lernen werden, schneller und sicherer zum Ziele.[1])

---

[1]) Auf einem ganz anderen Principe beruht das neuerdings vielfach verwendete Sphärometer von Bamberg (cf. auch „Czapski, Neuere Sphärometer zur Messung der Krümmung von Linsenflächen.“ Zeitschr. für Instrumentenkunde 1887, pag. 297—301), welches in beistehender, obigem Aufsatze entnommener Figur abgebildet ist.

Als Untersatz dient hier nicht ein Dreifuss mit drei Spitzen, sondern ein Ring *s*; derselbe ruht entweder auf einer vollkommen genau gearbeiten, kreisrunden Schneide, oder auf vier gleich hohen Füssen, welche, ebenfalls in vier scharfe Schneiden auslaufend, die Theile einer Kreisperipherie bilden. Dies hat den Vorzug, dass sich einmal der Radius *r* des Kreises sehr genau messen lässt, und dass sich ausserdem die vier Schneiden viel weniger abnutzen, als die drei Spitzen des älteren Systems. Auf dieser Unterlage sitzt vermittelst der Schrauben *s* der Fuss *A* des Apparates, der seinerseits die Hülse *B* trägt. In letzterer verschiebt sich ein durchbohrter Kern *U*, welcher unten in einen Stahlcylinder mit abgerundeter Spitze endigt, während am oberen Ende ein Mikroskop mit

115. Die Theilmaschine. — Die Theilmaschine besteht im wesentlichen aus einer Mikrometerschraube, deren beide Enden

---

Fadenmikrometer angebracht ist. In U befindet sich ausserdem noch ein total reflectirendes Prisma P, welches ein Bild von der an der äusseren Hülse befestigten Scala Q vor dem Okulare des Mikroskopes entwirft. Die Feder T dient zur Führung des Kernes, die Griffe H zur bequemeren Handhabung.

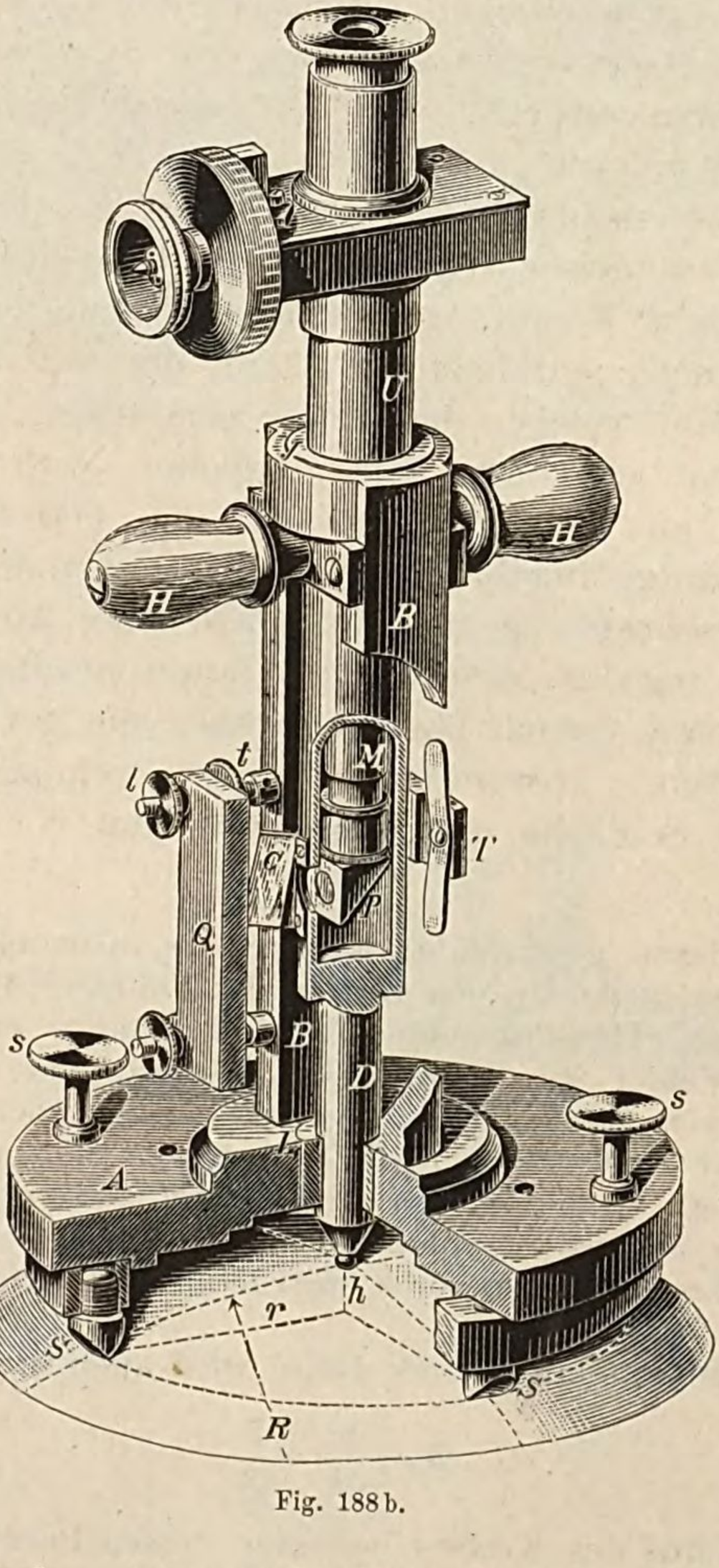


Fig. 188 b.

Beim Gebrauche setzt man das Instrument zunächst auf eine plane Glasplatte und bestimmt den Punkt des Maassstabes, welcher mit dem Nullpunkte des Fadenmikrometers zusammenfällt. Sodann bringt man den zu messenden Gegenstand unter die Spitze und liest von neuem ab; die Differenz beider Lesungen giebt die gesuchte Entfernung. Da der Maassstab in $\frac{1}{5}$ mm getheilt ist, die Trommel aber noch etwa $\frac{1}{2000}$ eines Maass-

in festen Lagern ruhen, so dass jede Bewegung in Richtung der Achse ausgeschlossen ist, und aus einer beweglichen Mutter, welche sowohl einen Stichel trägt, um die Theilstriche zu ziehen, als auch ein Mikroskop, um dieselben zu beobachten.

Beschreibung. — Diese Anordnung liegt einer Menge der verschiedensten Apparate zu Grunde, von denen wir als Typus die Maschine von Perreaux wählen wollen; hier bestimmt ein am Ende der Schraube angebrachtes Repetirwerk die Grösse der Theile, während das Reisserwerk von selbst den Strichen die jeweilig gewünschte Länge ertheilt, was ein wesentlich leichteres und sichereres Arbeiten ermöglicht.

Die Mikrometerschraube *VV*, deren Ganghöhe 0,5 Millimeter beträgt, und auf deren möglichst gleichmässiger Beschaffenheit der ganze Werth der Maschine beruht, ist im Innern einer festen, gusseisernen Bank untergebracht; auf letzterer gleitet der mit der Mutter verbundene Schlitten, welcher das Reisserwerk trägt. An einem Ende der Bank nimmt ein Lager mit doppelter Nuth den Kopf der Schraube auf, an welchem zwei in die betreffenden Nuthen passende Vorsprünge angebracht sind. Mit dem anderen Ende stösst die Mikrometerschraube gegen die Spitze einer kleinen Schraube, welche man so regulirt, dass sich die Hauptschraube um ihre Achse drehen kann, ohne jedoch längs derselben die geringste Verschiebung zu erleiden. Ausserdem geht die Drehung der Schraube *VV* immer nur in einem und demselben Sinn vor sich: Die zum

---

stabtheiles abzulesen gestattet, so könnte das Instrument an sich noch $\frac{1}{10}\,\mu$ liefern, wenn nicht die von der Art der Führung, Beweglichkeit der optischen Achsen, Theilungsfehlern des Massstabes etc. herrührenden systematischen Fehler die Genauigkeit beschränkten; immerhin erhält man nach genauem Studium des Apparates sicher noch Bruchtheile des Mikron. Da der Kern *U* bei jeder Messung immer mit seiner ganzen Schwere auf dem zu messenden Gegenstand aufliegt, so sind Fehler, welche bei den Schrauben-Sphärometern von der Verschiedenheit des Druckes herrühren, bei dieser Construction von vorneherein ausgeschlossen.

Der Krümmungsradius einer Linse wird auch hier gegeben durch:

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2},$$

wenn r den Radius des Kreises bedeutet, dessen Peripherie die Schneiden der Füsse s angehören, und h die gemessene Dicke bezeichnet.

Will man Linsen verschiedener Grösse messen, oder das Sphärometer als gewöhnlichen Dickenmesser benützen, so muss man natürlich Ringe mit verschieden grosser Öffnung und mehr oder weniger langen Füssen anschrauben. — G.

Drehen dienende Kurbel setzt nämlich ein um die Welle der Schraube frei bewegliches Rad in Bewegung, das durch einen

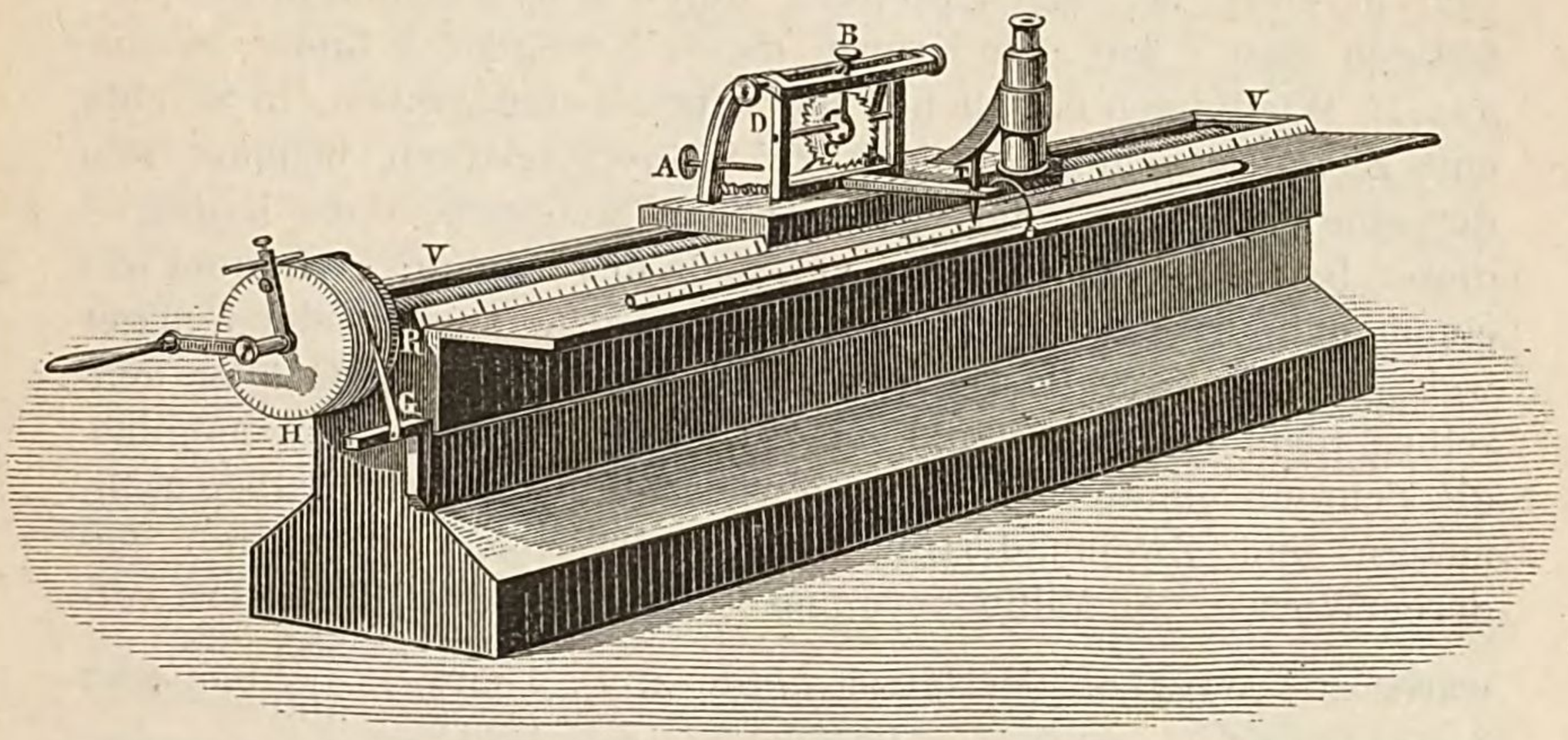


Fig. 189.

Sperrhaken mit einem auf derselben Welle fest sitzenden Zahnrad *R* verbunden ist. Dies zweite Rad folgt dem ersteren, wenn sich dasselbe in einem bestimmten Sinne dreht, während es bei einer Drehung im entgegengesetzten Sinne unbeweglich bleibt:[1]) die

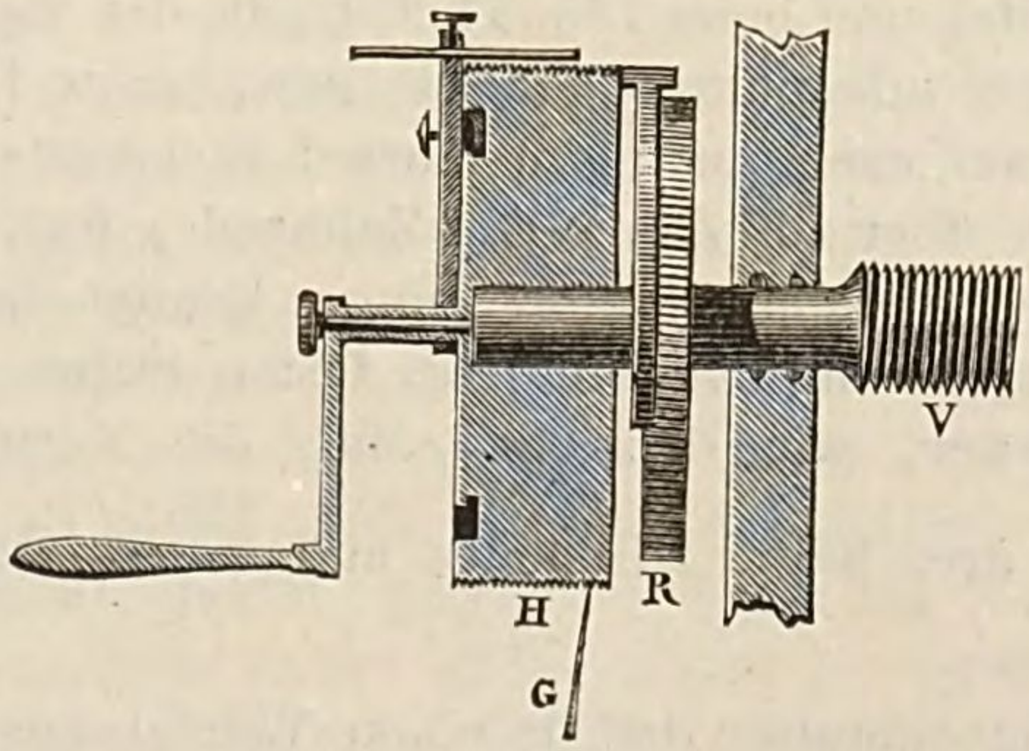


Fig. 190.

Schraube dreht sich also nur in einem einzigen Sinne, und die Schraubenmutter bewegt sich nur in einer Richtung. Das Zahnrad

---

[1]) An Stelle des Zahnrades mit dem Sperrhaken wendet man besser einen Mechanismus an, der fortwährend gleichmässig wirkt und erlaubt, die Schraube um einen ganz beliebigen Winkel im einen oder anderen Sinne zu drehen.

trägt 250 Zähne und die Vorderseite des bewegenden Rades ist in 250 gleiche Theile getheilt, über welche ein Zeiger gleitet, der sich in einer beliebigen Stellung durch eine Klemmschraube befestigen lässt. Auf dem Kranze dieses bewegenden Rades ist eine aus 15 Windungen bestehende Spiralfurche eingegraben, in welcher eine Zunge G schleift.[1]) Von zwei Anschlagstiften befindet sich der eine am Anfang der Spirale beim Theilstriche 0 des Rades, — dieser ist fest, — der andere am Ende des Zeigers; er besteht aus einem cylindrischen Zapfen aus Stahl, den man mehr oder weniger weit über die Spirale wegschiebt, so dass die Zunge G über denselben nicht hinausgleiten kann. Auf diese Weise ist es möglich, die Schraubenmutter um jede gewünschte Anzahl von halben Millimetern und Zweihundertfünfzigsteln derselben, oder, mit anderen Worten, von Millimetern und Fünfhundertstel-Millimetern vorwärts zu bewegen. Verlangt werde z. B. $1\text{ mm} + \frac{385}{500}\text{ mm}$ oder $\frac{3}{2}\text{ mm} + \frac{135}{250}\cdot\left(\frac{1}{2}\text{ mm}\right)$: Man bringt die auf dem Zeiger befindliche Marke auf Theilstrich 135 des Rades und schiebt den Zapfen des Zeigers so, dass derselbe die drei ersten Umgänge der Spiralfurche frei lässt, die vierte dagegen versperrt. Wenn man nun, vom Nullpunkte anfangend, die Kurbel im richtigen Sinne bewegt, so wird die Zunge den festen Stift verlassen, die drei ersten freien Spiralumgänge durchlaufen und beim 135. Theilstriche des vierten anstossen; dann ist die Schraubenmutter um die gewünschte Länge vorwärts gerückt. Hierauf dreht man die Kurbel rückwärts; dabei gleitet der Sperrhaken über die Zähne des Zahnrades fort, Schraube und Mutter bewegen sich nicht, die Zunge kommt zum Nullpunkte zurück und hält beim Berühren des festen Stiftes an. Nun verfährt man wieder, wie das erste Mal, die Mutter bewegt sich wiederum um drei halbe Millimeter und $\frac{135}{250}\cdot\left(\frac{1}{2}\text{ mm}\right)$ vorwärts, und so fort.

Die Schraubenmutter ist in einen Würfel aus Bronze eingeschnitten, der in den Schlitten eingreift und ihn weiter zieht; da aber die Bewegung des ganzen Systems nur in einem Sinn vor sich gehen soll, so lässt sich der Schlitten von der Schraubenmutter trennen, welch letztere geöffnet werden kann und dann leicht über die Schraube hinweg gleitet.

---

[1]) Die Zunge ersetzt man jetzt gewöhnlich durch ein in die Spiralfurche eingreifendes Zahnrad mit einem festen und einem verstellbaren Anschlage, gegen welche die beiden oben erwähnten Anschlagstifte treffen.

Der Schlitten, eine gusseiserne Platte, wird von zwei parallel zur Schraubenachse auf der Bank befestigten Schienen getragen; die eine dieser Schienen ist eben, die andere abgeschrägt, und auf ihnen gleitet der Schlitten mittels zweier Rinnen, welche die Schienen vollständig umfassen; er kann also der Schraubenmutter genau folgen, ohne auf der Schraube zu lasten, was eine Verbiegung der letzteren zur Folge haben könnte. Der Schlitten trägt das Reisserwerk *T*; der daran befindliche Stichel ist an einer kupfernen Stange befestigt, die sich in einer vertikalen Ebene bewegen kann, und wird mittels einer durch ein kleines Gewicht beschwerten Schnur vorwärts und abwärts gezogen. Das andere Ende der Stange sitzt an dem unteren, horizontalen Querbalken eines rechtwinkeligen Rahmens, der sich um seine obere Seite als Achse dreht: Zwei am unteren Querbalken befestigte Spiralfedern führen den Rahmen in seine ursprüngliche Stellung zurück, wenn man ihn aus dieser entfernt hat, um einen Strich zu ziehen; eine als Anschlag dienende Schraube *A* bestimmt diese ursprüngliche Stellung. Um den Stichel anhalten und einzelnen Strichen eine grössere Länge geben zu können, ist in der Mitte des Rahmens eine mit zwei Rädchen versehene Querleiste angebracht: Die Peripherie des einen Rädchens *C* ist von zwei tieferen und zwei weniger tiefen Höhlungen unterbrochen (wenn man nämlich die Fünfer- und Zehnerstriche verlängern will); das andere Rädchen *D*, ein an das erste angeschweisstes Sperrrad, trägt 20 Zähne. Über dem ersten Rädchen ist am Träger des Rahmens eine als Anschlag dienende Schraube *B* befestigt. Zieht man nun den Stichel vorwärts, so hebt sich das Rädchen, und wenn dasselbe gegen die Spitze der Schraube stösst, so wird die Bewegung des Rahmens gehemmt, und der Strich ist zu Ende. Das Sperrrad wird gleichzeitig mit dem anderen Rädchen in die Höhe gehoben, wobei der dazu gehörige Sperrhaken ausser Thätigkeit bleibt; ziehen aber die Spiralfedern den Rahmen rückwärts, dann trifft der Sperrhaken auf einen der 20 Zähne des Sperrrades und dreht beide Rädchen um $\frac{1}{20}$ Umdrehung weiter. Bei vier auf einander folgenden Strichen stösst die Anschlagschraube gegen den glatten Theil der Oberfläche des ersten Rädchens, — diese vier Striche werden also gleich lang. Beim fünften Striche senkt sich die Spitze der Schraube in eine der vier Höhlungen, die Hemmung erfolgt also später, und der Strich fällt in Folge dessen länger aus. Beim zehnten Striche, wo die Höhlung noch tiefer ist, wird die Verlängerung noch bedeutender. Andererseits lässt sich die absolute Länge der Striche leicht mit Hülfe der Schrauben *A* und *B* reguliren.

Das zu theilende Stück befestigt man — entweder einfach

mit Klebwachs oder mit Klemmschrauben oder Federn — auf der Bank unter dem Reisserwerke; stets aber muss man dafür sorgen, dass es parallel der Schraube liegt (wovon man sich leicht mit Hülfe der Maschine selbst überzeugen kann). Je nach dem das zu theilende Stück aus Glas oder aus Metall besteht, wird man einen Diamant oder einen Stichel aus Stahl anwenden, den man mehr oder weniger belastet, entsprechend der Härte der Substanz und der Tiefe, welche man den Strichen zu geben wünscht.[1])

Gebrauch. — Die Handhabung der Maschine ist jetzt klar: Hat man den zu theilenden Stab ausgerichtet, so bestimmt man die Stellung des Zeigers und des zugehörigen Zapfens je nach dem Abstande der Striche von einander, und bringt dann den gut justirten Stichel genau vor den gewünschten Nullpunkt. Hierauf ergreift man mit der linken Hand die Kurbel, mit der rechten den Griff des Reisserwerkes, und dreht die Kurbel rückwärts, bis die Zunge gegen den festen Zapfen stösst: So erhält man die Nullstellung, ohne den Stichel aus der ihm anfänglich gegebenen Stellung zu bringen, und kann nun den Nullstrich ziehen. Sodann dreht man die Kurbel vorwärts, bis die Zunge gegen den Zapfen des Zeigers stösst, und zieht den zweiten Strich, geht wieder zurück bis zum festen Zapfen, dann vorwärts zum Zapfen des Zeigers, zieht den dritten Strich u. s. f.

Eine auf dem Schlitten angebrachte Marke gleitet während der Bewegung des Schlittens an dem in halbe Millimeter getheilten und auf der Bank befestigten Maassstabe vorbei, und man kann so jeden Augenblick die von dem Schlitten zurückgelegte Anzahl von halben Millimetern ablesen.

Mit Hülfe der Theilmaschine lässt sich jede der drei folgenden Aufgaben lösen:

1. Äquidistante Theilstriche von einer gegebenen Länge zu ziehen. Da in diesem Falle der Abstand der Theilstriche von einander bekannt ist, verfährt man, wie oben angegeben.

---

[1]) Um kräftigere und tiefere Striche auf dem Glase hervorzubringen, wie sie z. B. bei Thermometern, Glasmaassstäben etc. nothwendig sind, überzieht man den zu theilenden Gegenstand mit einer dünnen Wachsschicht (Ätzgrund), in welche die Striche mit einem feinen Stahlstichel eingeritzt werden. Bestreicht man dann die ganze Oberfläche mit Flusssäure oder setzt sie den Dämpfen derselben aus, so wird das Glas nur an den durch den Stichel blosgelegten Stellen angegriffen, und nach Beseitigung der Wachsschicht erscheinen die Striche, je nach der Dauer der Einwirkung und der Concentration der Säure, mehr oder weniger tief eingeätzt. — G.

2. Eine gegebene Länge in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen: Hierzu misst man die gegebene Länge mit Hülfe der Maschine selbst (cf. 3), dividirt den gefundenen numerischen Ausdruck durch die gewünschte Anzahl der Theile und findet so die Länge eines Theiles; man kommt also wieder auf Aufgabe 1 zurück.

3. Eine gegebene Länge zu messen: Man bringt das Fadenkreuz des Mikroskopes über das eine Ende des zu messenden Gegenstandes und liest an der Marke des Schlittens und dem Kopfe der Schraube die Stellung des Schlittens ab; sodann dreht man die Kurbel vorwärts, bis das Fadenkreuz mit dem anderen Ende des zu messenden Gegenstandes zur Deckung gelangt, und liest von neuem die Stellung des Schlittens ab; die Differenz beider Lesungen giebt die gesuchte Länge.

In gleicher Weise bedient man sich des am Schlitten befindlichen Mikroskopes, wenn man eine bereits fertige oder in Ausführung begriffene Theilung untersuchen will; ebenso gestattet dasselbe, den Stichel genau auf einen bestimmten Punkt wieder einzustellen, wenn es sich beispielsweise darum handelt, eine Theilung herzustellen, die länger ist, als die Schraube der Maschine.

Untersuchung der Schraube. — Welche Sorgfalt auch der Mechaniker angewendet haben mag, niemals wird er eine ganz vollkommene Schraube zu Stande bringen, bei der die Mutter in jedem Augenblicke um eine genau dem Winkel entsprechende Strecke vorrückt, um welchen man die Schraube dreht. Hier, wie überall, muss man mit der Unvollkommenheit des Werkzeuges rechnen, und um der dem Apparate zugeschriebenen Genauigkeit sicher zu sein (in dem beschriebenen Modelle 0,002 mm), hat man zunächst die Schraube ihrer ganzen Ausdehnung nach mit der gleichen Genauigkeit zu untersuchen. Indem man successive mit jedem Theile der Schraube eine und dieselbe kleine Länge misst, bestimmt man die Winkel, welche ein und derselben Verschiebung der Mutter an den verschiedenen Stelle der Schraube entsprechen, und kann danach eine Correctionstabelle für die Schraube aufstellen. Dann erst wird man sicher sein, alle Messungen bis auf 0,004 der Ganghöhe der Schraube genau durchzuführen zu können, — vorausgesetzt, dass die Maschine für eine solche Genauigkeit construirt war. Was die absolute Grösse einer Ganghöhe betrifft, so kann man diese nur mit Hülfe eines Normal-Maassstabes bestimmen, dessen Länge man mit einem vorher untersuchten Theile der Schraube vergleicht.

Automatische Maschinen. — Bei diesem Studium der Schraube, wie überhaupt beim Gebrauche der Maschine, muss man sich sorgfältig gegen Temperaturänderungen zu schützen suchen, weil dieselben sowohl die Ganghöhe der Schraube wie die zu messende Länge beeinflussen; schon die Nähe des Körpers des Beobachters wird zu einer Quelle von Störungen, die nicht vernachlässigt werden dürfen. So sind denn die automatischen Apparate bei weitem vorzuziehen. Sie zeigen keine aus der Nähe des Beobachters entspringenden Fehler, und vermeiden auch diejenigen, welche in Folge von Unaufmerksamkeit oder Ermüdung des Arbeiters auftreten könnten; endlich geht auch das mechanische Ziehen der Striche viel regelmässiger vor sich, da die dazu nöthige Kraft immer constant bleibt. Auf der Weltausstellung zu Paris, 1867, befand sich eine automatische Maschine von Perreaux, welche das Millimeter in 1500 gleiche Theile theilte.[1] [2])

Verwendung der Theilmaschine als Comparator. — Die Theilmaschine kann offenbar auch als Comparator benutzt werden; sie hat dann den Vorzug, dass man immer nur denselben, sehr kleinen Theil der Schraube anwendet, den man sehr genau kennen muss.

Kreistheilmaschine. — Die Kreistheilmaschine, von dem englischen Constructeur Ramsden erfunden und seitdem durch Gambey verbessert, ähnelt in vielen Beziehungen der Theilmaschine für geradlinige Theilungen. Sie besteht im wesentlichen aus einer sehr genau gearbeiteten Schraube, welche tangential in die Zähne einer kreisförmigen und um ihre Achse drehbaren Scheibe eingreift. Die Scheibe trägt 720 ganz gleiche Zähne (die mit Hülfe der Maschine für geradlinige Theilungen untersucht sind), und dreht sich also bei jeder Umdrehung der tangentialen Schraube um einen halben Grad; die Bruchtheile der Umdrehungen erhält man auf gleiche Weise wie bei der Maschine für geradlinige Theilungen.

---

[1]) Diese Theilungen werden auf Glas mit einem sehr feinen Diamant hergestellt und dienen als Mikrometer oder als Gitter.

[2]) Seitdem sind sogar Gitter hergestellt worden, welche 5000 Striche pro Millimeter enthalten. Es wäre aber unrichtig, anzunehmen, dass die Leistungsfähigkeit der Gitter stets im gleichen Verhältnisse zur Anzahl der Striche pro Millimeter wächst, es kommt vielmehr ganz wesentlich darauf an, dass die sämmtlichen Striche gleichen Abstand von einander haben. Da nun bei den Messungen so kleiner Grössen die gewöhnlichen Hülfsmittel versagen, so bleibt als Kriterium für die Güte des Gitters und damit auch für die Güte der zum Theilen verwendeten Schraube nur die Frage übrig, ob das Gitter bestimmte Doppellinien des Spektrums auflöst, oder nicht. — Die besten Gitter werden z. Z. von Rowland geliefert; die Anzahl der Striche auf denselben variirt von ca. 400—800 pro Millimeter. — G.

Der zu theilende Kreis liegt so auf der Scheibe, dass die Mittelpunkte beider zusammenfallen; sie bewegen sich gemeinsam unter einem Reisserwerke weg, das dem früher beschriebenen ganz ähnlich ist und sich auf zwei Schienen verschieben lässt, so dass man es in der gewünschten Entfernung vom Mittelpunkte der Scheibe befestigen kann; der Stichel wird immer in der Richtung des Radius der Scheibe geführt.

116. Das Fadenmikrometer. — Die Mikrometerschraube in Verbindung mit einem bei passender Vergrösserung betrachteten Fadenkreuze liefert uns das feinste Instrument zur genauen Messung einer Länge oder eines Winkels. Wir verdanken dasselbe Auzout, der es zum Zwecke astronomischer Messungen construirte.[1]) Inzwischen wurde diese Combination an allen Präcisionsinstrumenten eingeführt; sie verleiht dem Comparator eine Empfindlichkeit, welche man mit Hülfe des Verniers nie hätte erreichen können, sie gewährt ferner ein vortreffliches Hülfsmittel zur Untersuchung der linearen Ausdehnungen etc. Wir wollen hier als Beispiel nur die Anordnung beschreiben, die man zur Messung von Winkeln bei den grossen astronomischen Kreisen gewählt hat (cf. Fig. 191).

Die Theilung des Kreises giebt unmittelbar 5′. Um die Bruchtheile von 5′ zu erhalten, bedient man sich eines festen Mikroskopes, das auf die Theilung eines um seinen Mittelpunkt drehbaren und gleichzeitig mit dem Fernrohr in Bewegung gesetzten Kreises gerichtet ist. In der Fokalebene des Okulars befindet sich ein unbeweglicher Theil in Form einer Zahnstange, und ausserdem ein Fadenkreuz; dies ist auf einen Rahmen gespannt, der von der Mutter einer Mikrometerschraube in Bewegung gesetzt wird. Der Kopf dieser Schraube trägt eine in 60 gleiche Theile getheilte Trommel; ihr gegenüber befindet sich ein als Index dienender Maassstab, dessen Theile der Ganghöhe der Schraube entsprechen. Wenn die Nullpunkte von Maassstab und Trommel sich gegenüberstehen, so liegt der Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes[2]) ungefähr mitten über der kreisförmigen Öffnung der Zahnstange. Diese Stellung gilt als feste Marke für die Lesungen auf dem Kreise. Im allgemeinen hat man drei Theilstriche des Kreises im Gesichtsfelde, und zwar ist das Instrument so eingerichtet,

---

[1]) Auzout, *Lettre à Oldenburg*, secrétaire de la Société royale de Londres, en date du 26 Décembre 1666; und *Traité du micromètre*, Paris 1667.

[2]) An Stelle des Fadenkreuzes wählt man jetzt allgemein zwei parallele Fäden: Es ist nämlich viel leichter, einen Strich genau in die Mitte zwischen zwei Fäden einzustellen, als auf einen Schnittpunkt, der immer eine gewisse Dicke besitzt.

dass die Entfernung zwischen zwei Theilstrichen fünf Zähnen der Zahnstange entspricht. Andererseits ist die Ganghöhe der Schraube so berechnet, dass genau fünf Umdrehungen nöthig sind, um den Faden mit zwei auf einander folgenden Theilstrichen zur Deckung zu bringen. Der abzulesende Bogen endigt bei der Horizontalen, welche durch den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes geht, wenn dies auf Null steht; er setzt sich zusammen aus einer gewissen Anzahl von ganzen Graden und einem Vielfachen von 5′, das man direct abliest, also z. B. $58^0\,25'$ plus einem Reste. Um diesen Rest zu bestimmen, bringt man den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes durch Drehen der Mikrometerschraube mit dem Theilstriche zur Deckung, der nach der Seite des Schraubenkopfes hin der Nulllinie am nächsten liegt, in unserem Beispiele also mit den Theilsriche 25. Zu diesem Zwecke muss die Schraube eine Anzahl von Umdrehungen machen, die direct durch die Zähne der Zahnstange angegeben wird (hier drei Umdrehungen), plus einem Bruch-

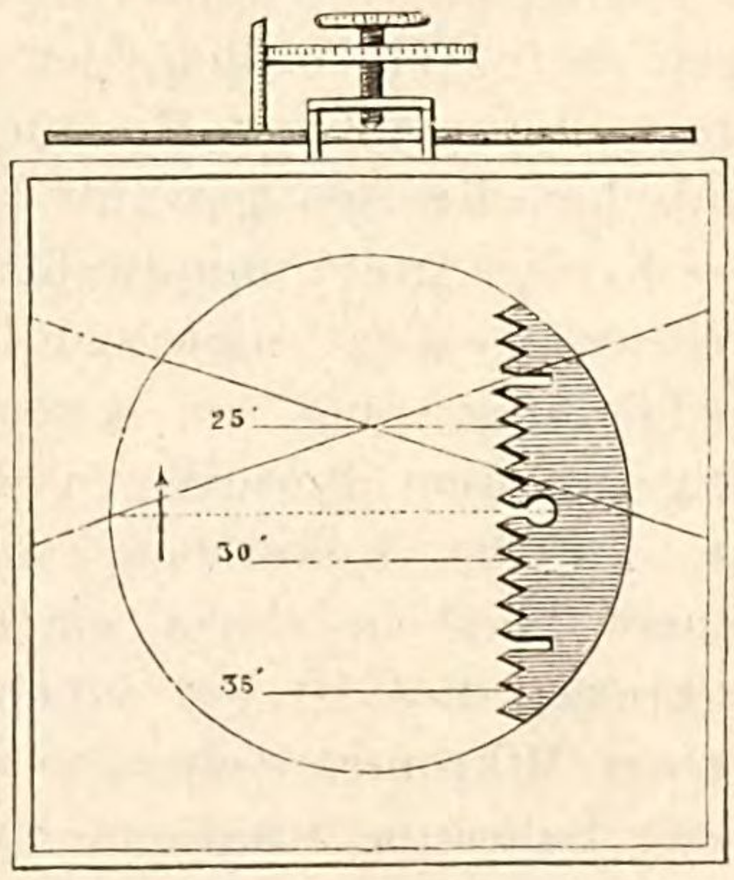


Fig. 191.

theile einer Umdrehung, den man auf der Schraubentrommel abliest. Steht dem Index der Theilstrich 12 gegenüber, so hat man zu den schon abgelesenen $48^0\,25'$ noch $3'\,12''$ hinzuzufügen. Ausserdem kann man noch sehr gut den zehnten Theil der Trommeltheile schätzen und in Folge dessen 0,1 Secunde ablesen; man erhält also beispielsweise $12'',3$, so dass die Messung des Bogens schliesslich ergiebt: $48^0\,28'\,12'',3$.

Wäre die Theilung des Kreises vollkommen genau, dann würde die einzige Bedingung für die Richtigkeit der Ablesung die sein, dass genau fünf ganze Umdrehungen der Schraube dazu gehören, um das Fadenkreuz mit zwei auf einander folgenden Strichen zur Deckung zu bringen; aber, gesetzt auch, dass diese Bedingung in

einem bestimmten Augenblicke erfüllt wäre, so würde sie es schon im nächsten Augenblicke nicht mehr sein, und zwar wegen der auf die Temperaturänderungen zurückzuführenden verschiedenen Ausdehnung des Kreises. Man hat also vor der Lesung die Entfernung zweier auf einander folgender Striche zu ermitteln, und findet beispielsweise, dass diesen 5′ entsprechen: 5 Umdrehungen + 3 Trommeltheile, also 1′ entspricht 1 Umdrehung + 0,6 Trommeltheil, oder 1 Umdrehung = 1′ — 0″,6. Wenn man so verfährt, erkennt man, dass sich die Correction in der Form $a + bt$ schreiben lässt, wobei t die Temperatur bedeutet, welche von vier dem Theilkreise eingefügten Thermometern angegeben wird, a und b aber Constanten, die für jedes einzelne Instrument bestimmt werden müssen.

Den Einfluss der von mangelhafter Centrirung und Theilung herrührenden Fehler kann man dadurch vermindern, dass man, wie beim Vernier am Kreise, die Lesungen häuft: Man macht gewöhnlich für denselben Winkel 6 Ablesungen an 6 verschiedenen Mikroskopen. Dann giebt man dem Kreise verschiedene Stellungen auf seiner Achse und nimmt das Mittel aus allen Beobachtungen: Hierin besteht die sogenannte Repetitionsmethode. Man beseitigt auf diese Weise schnell durch Compensation die systematischen Fehler der Theilung, während die zufälligen proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen abnehmen.

3. Reflexions-Hebel.

117. Methode von Poggendorff zur Messung kleiner Winkel mit Hülfe der Spiegelablesung. — Poggendorf hatte zuerst den inzwischen durch Gauss und Weber so fruchtbar gewordenen Gedanken, kleine Winkel durch die Ablenkung eines Lichtstrahls zu messen, der auf einen zum beweglichen Schenkel des Winkels senkrechten Spiegel fällt.

Es sei $\sphericalangle A'CA$ ein Winkel, der durch die um den Punkt C

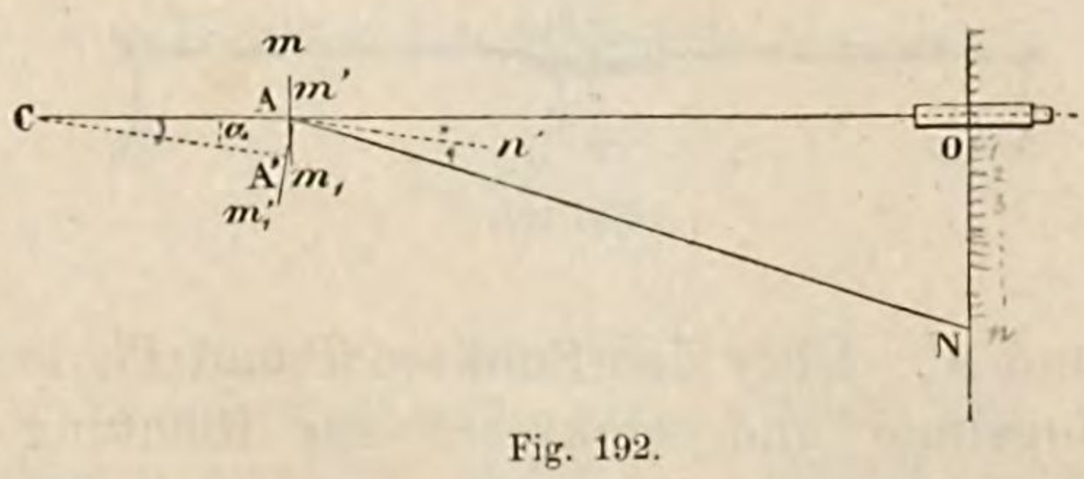


Fig. 192.

bewegliche Gerade AC beschrieben wird. Um diesen Winkel zu messen, stellt man in A, senkrecht zu AC, einen kleinen Spiegel

mm_1 auf, und zu ihm parallel in einer gewissen Entfernung einen Maassstab ON. In der ursprünglichen Lage, der Nullstellung, sieht der Beobachter mit Hülfe eines über dem Maassstabe in der Richtung AC angebrachten Fernrohres den Theilstrich, der sich auf der Verlängerung von CA befindet, also z. B. den Nullpunkt der Scala; der von O ausgehende und senkrecht auf den Spiegel mm_1 auffallende Lichtstrahl wird nämlich in der Einfallsrichtung reflectirt und lässt den Nullpunkt der Scala im Kreuzungspunkte des im Fernrohr befindlichen Fadenkreuzes erkennen. Dreht sich nun die Gerade AC in die Richtung $A'C$, so geht der auf $m'm$ in der früheren Richtung AO reflectirte Strahl von einem anderen Punkte N aus, dessen Lage dadurch bestimmt ist, dass der Einfallwinkel $Nm'n'$ gleich ist dem Reflexionswinkel $n'm'O$, wenn $n'm'$ die Normale zum Spiegel $m'm'_1$ bezeichnet. Aber diese ist parallel zu CA', in Folge dessen ist $\sphericalangle Nm'O$ doppelt so gross, als der zu messende $\sphericalangle ACA'$ oder $\sphericalangle \alpha$. $\sphericalangle Nm'O$ wird gegeben durch

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{ON}{AO} \text{ oder } 2\alpha = \frac{ON}{AO},$$

vorausgesetzt, dass $Om' = OA$, was erfüllt ist, wenn α nur klein, OA dagegen gross genug ist.

Es wird also offenbar $\sphericalangle \alpha$, oder vielmehr das Doppelte desselben, durch die am Punkte N befindliche Zahl n der Scala gemessen, und es giebt eigentlich für dies Verfahren keine Grenze der Genauigkeit, da man die zur Messung des Winkels dienende Gerade ON stets hinreichend lang nehmen kann, wenn man nur die Entfernung OA genügend gross wählt.

118. Der Reflexionshebel. — Ein Hebel ruhe in der Mitte auf zwei Spitzen P und P' und trage ausserdem an jedem Ende

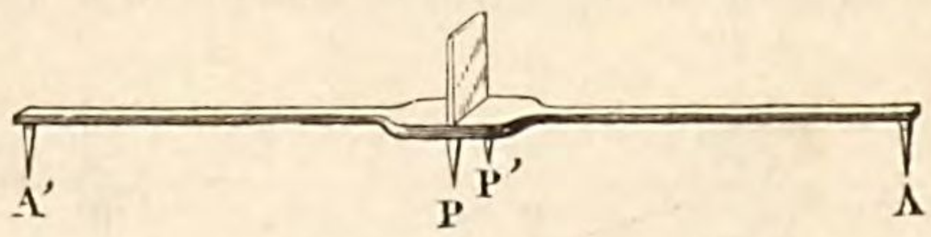


Fig. 193.

eine Spitze A und A'. Über den Punkten P und P', in der Richtung ihrer Verbindungslinie und senkrecht zur Richtung AA' sei ein Spiegel angebracht; der Schwerpunkt des Systems liege möglichst nahe an der Achse AA': Dann haben wir einen Apparat, welcher sich in Verbindung mit einer vertikalen Scala zur Messung kleiner

Dicken oder zur Bestimmung der Krümmung von Kugeloberflächen eignet, also ein wirkliches *Reflexions-Sphärometer*. Dies ist der von Cornu erfundene Reflexionshebel.[1])

Wir nehmen an, der Hebel stehe auf einer ebenen Glasplatte und berühre die letztere mit seinen vier Spitzen.[2]) Sodann bringen wir unter die mittleren Spitzen die planparallele Platte, deren

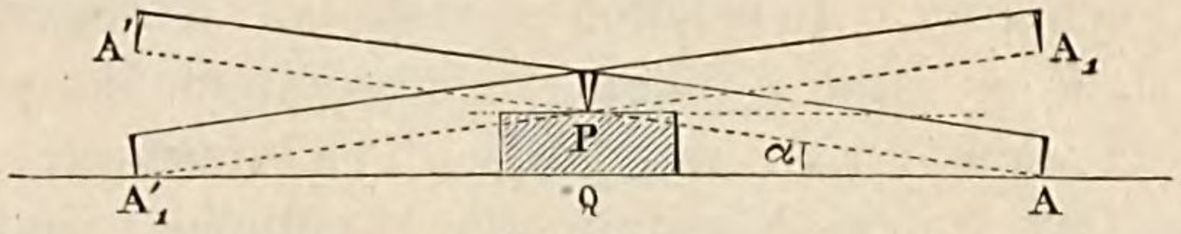


Fig. 194.

Dicke ε gemessen werden soll, kippen den Hebel erst nach der einen Seite, dann nach der anderen, und lesen die entsprechenden Theilstriche n und n' der Scala ab. Liegt der Nullpunkt der Scala auf der zum Spiegel senkrechten Geraden, so ist $n = n'$, und wir erhalten

$$\varepsilon = l \sin PAQ = l \sin \alpha,$$

oder, wenn die Dicke nur gering ist,

$$\varepsilon = l\alpha,$$

wobei l die halbe Länge des Hebels bezeichnet.

Geht nun der Hebel aus der Lage AA' in die Lage $A_1A'_1$ über, so dreht er sich, und mit ihm der Spiegel, um das Doppelte des Winkels PAQ; der vom Spiegel reflectirte Strahl beschreibt gleichzeitig einen doppelt so grossen Winkel, als der Spiegel selbst, PAQ ist also $\frac{1}{4}$ des Winkels, welcher auf der in der Entfernung d angebrachten Scala gemessenen wird. Es wird also

$$\alpha = \frac{n + n'}{4d}$$

und die gesuchte Dicke ε ist demnach

$$\varepsilon = l\frac{n + n'}{4d}.$$

---

[1]) Cornu, Journal de physique IV, 7; 1875.

[2]) Es wird für den Mechaniker immer leicht sein, diese Bedingung zu erfüllen, aber nothwendig ist sie nicht einmal; denn wenn die mittleren Spitzen etwa um die kleine Grösse h herausragen sollten, so könnte man dieselbe ebenso wie die Grösse ε selbst, leicht bestimmen und bei der Messung der Plattendicke in Rechnung bringen.

Wir sahen, wie sich die Ganghöhe der Schraube einer Theilmaschine in absolutem Maasse bestimmen lässt, haben aber dieselbe Untersuchung für die Schraube des Sphärometers unberücksichtigt gelassen, weil die Vergleichung mit einem Normalmaassstab nur auf indirectem Wege vorgenommen werden kann und schwierig ist,[1]) so dass man sich im allgemeinen mit den Angaben des Fabrikanten begnügt — ein freilich wenig wissenschaftliches Verfahren. Beim Reflexionshebel dagegen kann man die Werthe l, n, n' und d leicht in absolutem Maasse angeben: Die Grösse $2l$ misst man mit einer Theilmaschine, deren Angaben vorher mit einem Normalmeter verglichen sind; die Scala wird mit derselben Theilmaschine hergestellt oder untersucht, und dasselbe gilt für den zur Messung von d dienenden Maassstab. Alle in der Formel vorkommenden Längen sind daher in absolutem Maasse bekannt, man kann jede einzelne leicht bis auf weniger als 0,001 ihrer Grösse bestimmen und in Folge dessen zu einer Genauigkeit von insgesammt 0,001 gelangen.

Ebenso gut eignet sich der Reflexionshebel zur Ermittelung von Krümmungsradien. Der auf die Oberfläche einer Linse aufgesetzte Hebel dreht sich um die durch die mittleren Spitzen P und P' gelegte Gerade. Man misst nun die kürzeste Entfernung dieser Geraden von der durch AA' gelegten Horizontalebene, und zwar ist diese sehr nahe gleich dem Stücke HQ, da die beiden

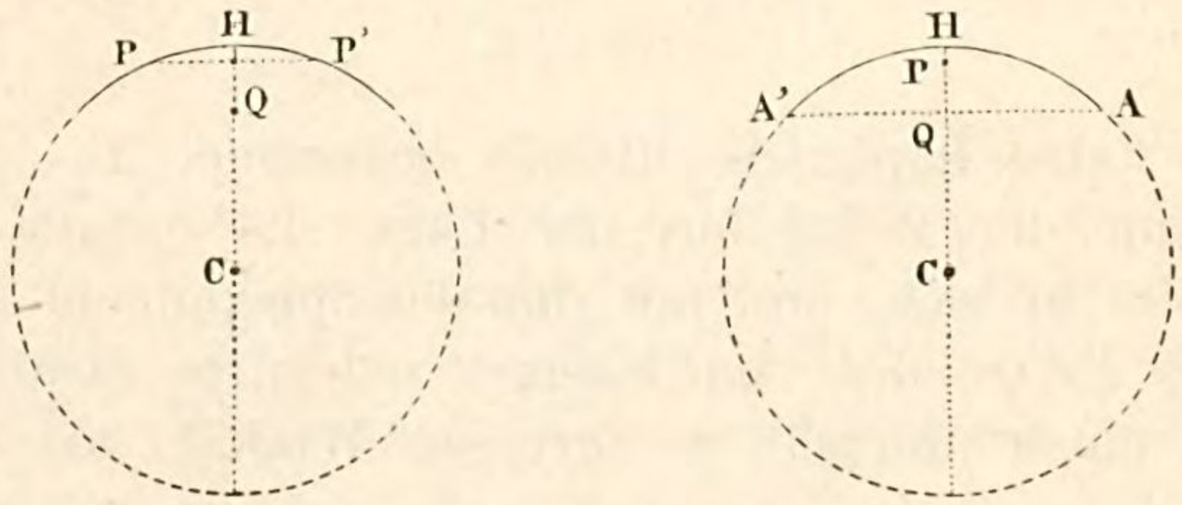


Fig. 195.

[1]) Das beste Mittel ist das von Mouton angegebene optische Verfahren, welches gestattet, sehr schnell die Ganghöhe der Schraube mit der Wellenlänge der D-Linie zu vergleichen; wir werden an geeigneter Stelle darauf zurückkommen. Bisweilen wird man indessen einen directen Weg vorziehen. Benoît hat im 1. Bd. der Travaux et Mémoires du Bureau International des poids et mesures, C. 21, ein Beispiel der directen Vergleichung einer Mikrometerschraube mit einem Normalmassstabe gegeben.

Spitzen P und P' nur so weit von einander abstehen, als es die Stabilität des Hebels erfordert.

Nennt man f das Stück PQ, das man direct mit Hülfe des Winkels α findet, so hat man

$$f = l \sin \alpha,$$

oder im allgemeinen, da α klein ist,

$$f = l\alpha.$$

Fiele der Punkt P mit H zusammen, so würde gelten:

$$l^2 = 2Rf,$$

also

$$2R = \frac{l^2}{f} = \frac{l}{\alpha}.$$

Dies ist aber, streng genommen, nicht der Fall, man hat also eigentlich, wenn man unter z die kleine Grösse PH versteht, zu setzen:

$$\overline{HA}^2 = 2R(f + z),$$

oder, da HA nahezu gleich l:

$$l^2 = 2R(f + z).$$

Andererseits gilt, wenn man $PP' = 2e$ setzt,

$$z = \frac{e^2}{2R - z},$$

oder näherungsweise:

$$z = \frac{e^2}{2R}.$$

Demnach erhält man:

$$l^2 = 2R\left(f + \frac{e^2}{2R}\right),$$

und hieraus

$$2R = \frac{l^2 - e^2}{f} = \frac{l}{\alpha}\left(1 - \frac{e^2}{l^2}\right),$$

wobei unter α immer der vierte Theil des auf der gekrümmten Oberfläche beobachteten Winkels zu verstehen ist.

Der Reflexionshebel gestattet noch eine grosse Anzahl anderer Anwendungen. Cornu konnte mit diesem Apparate Grössen von der Ordnung der Lichtwellen messen; zu diesem Zwecke genügt es, bei hinreichender Verkürzung des Hebels gleichzeitig die Vergrösserung des Fernrohrs zu steigern und die Entfernung zwischen Spiegel und Scala zu vermehren. Gleichwohl ist es augenscheinlich, dass man bei der Verkürzung des Hebels an Genauigkeit einbüsst, was man an Empfindlichkeit gewinnt; die hierbei auftretende Frage nach der Grösse der relativen Fehler ist jedoch in jedem speciellen Falle leicht zu entscheiden.

III. Compressibilität. Theilbarkeit. Constitution der Materie.

119. Allgemeine, aber nicht wesentliche Eigenschaften. Abgesehen von der wesentlichen Eigenschaft der Undurchdringlichkeit und Ausdehnung, ohne welche der Begriff der Materie sich überhaupt nicht fassen lässt, zeigen alle Körper noch gewisse Eigenschaften, die man also als allgemeine zu betrachten hat: Es sind dies die *Compressibilität* und die *Theilbarkeit*.

120. Compressibilität. — Jeder Körper kann sein Volumen ändern, sowohl unter der Einwirkung mechanischer Kräfte, als auch unter derjenigen der Wärme. Aus dieser Thatsache, die wir späterhin noch eingehender zu betrachten haben werden, folgt, dass das Volumen eines Körpers als eine Function der Temperatur und des Druckes anzusehen ist, welche wieder denselben numerischen Werth annimmt, wenn Temperatur und Druck auf den ursprünglichen Werth zurückkommen, vorausgesetzt, dass der Einfluss der letzteren eine gewisse Grenze nicht überstiegen hat. Die Eigenschaft eines jeden Körpers, der Einwirkung einer äusseren Kraft mehr oder weniger nachzugeben, und das Bestreben desselben, nach Aufhören dieser Kraft wieder die ursprüngliche Gestalt anzunehmen, nennen wir *Elasticität*. Unter *Ausdehnung* verstehen wir speciell die Volumenänderung in Folge der Wärme.

121. Theilbarkeit. — Alle Körper können in Theile zerlegt werden, deren geringe Grösse sich unseren Messungen vollständig entzieht. Ein Stückchen Moschus, das ein Zimmer unaufhörlich mit duftenden Partikelchen erfüllt, wird dennoch nach Jahren noch kaum einen nachweisbaren Gewichtsverlust zeigen; 0,000 000 3 Milli-

gramm Kochsalz genügt nach Bunsen und Kirchhoff, um die Flamme eines Gasbrenners gelb zu färben, und das Rosanilin ertheilt nach Hofmann noch dem 100 000 000fachen seines Gewichts an Alkohol eine deutliche Färbung. Was aber unserem Verstande am unbegreiflichsten erscheint, ist die Feinheit der anatomischen Bestandtheile bei den kleinsten unter dem Mikroskope erkennbaren Lebewesen: Aus welchen Elementen müssen wohl die Infusorien bestehen, welche selbst kaum ein Mikron messen, und doch Ernährung und Circulationserscheinungen aufzuweisen haben?

Dürfen wir nun aus einer so weit gehenden Theilbarkeit der Materie schliessen, dass dieselbe bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann?[1]) Nichts giebt uns die Berechtigung hierzu; und wenn Anaxagoras von Clazomene (450 v. Chr.) die unbegrenzte Theilbarkeit der Materie lehrte, indem er sich darauf berief, dass auch die kleinsten Theilchen eines Körpers demselben noch identisch und daher, wie dieser, theilbar seien, so stützte er sich eben auf eine vollkommen willkürliche Behauptung. Dieser Lehre von der *Homoeomerie* (*ὁμοῖος* ähnlich, *μέρος* der Theil), oder der *Homogenität* (*ὁμός* ähnlich, *γένος* die Art) schlossen sich Plato und Aristoteles an, ebenso wie die Neuplatoniker aus der Alexandrinischen Schule und später die Schulen des Mittelalters, in denen Aristoteles ohne Nebenbuhler herrschte. Derselbe Gedanke leitete Descartes in seinem berühmten Streite über den leeren und erfüllten Raum, als er den ganzen Raum ohne Unterbrechung mit Materie angefüllt sein liess, die den Sitz seiner berühmten Wirbel bildete; von der Continuität schloss er weiter auf die unbegrenzte Theilbarkeit. Eben dieser Schluss folgt auch noch aus der dynamischen Hypothese, die im Anfange dieses Jahrhunderts durch die deutschen Philosophen aufgestellt wurde: Kant und Schelling kommen beide, obwohl von ganz verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend, dazu, die Materie für continuirlich und demnach auch für unbegrenzt theilbar zu erklären; und noch erst in unseren Tagen hat Sir William Thomson das System einer Weltanschauung aufgestellt, welches ganz an die alte Idee der Wirbel des Descartes erinnert, allerdings vervollkommnet und auf Thatsachen gestützt, — ein System, das uns ganz auf die alte und verführerische Hypothese von der Einheit der Materie zurückbringt.[2])

---

[1]) Cf. Wurtz, *La théorie atomique des corps*; Paris, Baillière, 1879, pag. 222; und Ditte, *Exposé de quelques propriétés générales des corps*; Paris, Dunod, 1881, pag. 455.

[2]) Jedermann kennt die Ringe, welche manche Raucher aus dem Rauche ihrer Pfeife blasen können, oder welche entstehen, wenn eine Blase von Phosphorwasserstoff auf der Oberfläche des Wassers

Im Gegensatze zu der Lehre von der Homogenität steht die Atomenlehre, die von Leukipp (500 v. Chr.) erfunden und durch Demokrit aus Abdera entwickelt wurde. Nach der Ansicht der Philosophen dieser Schule setzen sich die Körper zusammen aus einer Menge sehr kleiner, untheilbarer, unzerstörbarer, undurchdringlicher, im leeren Raume vereinzelter und in beständiger Bewegung begriffener Partikelchen. Die atomistische Theorie verbreitete sich ungemein schnell: Zweihundert Jahre später finden wir sie wieder, von Epikur adoptirt, und noch zwei Jahrhunderte später von Lucrez in seinem berühmten Gedichte „De natura rerum“ besungen. Gassendi vertheidigte sie energisch gegen Descartes, während Newton sie zu Hülfe rief, um sich mit ihrer Unterstützung aus der Verlegenheit herauszuhelfen, in welche ihn seine Berechnung von der Geschwindigkeit des Schalles in der Luft geführt hatte. Endlich trat die moderne Chemie mit mancherlei indirecten Beweisen für die Existenz der Atome auf, und heutzutage scheint es schwer, auf den Begriff der Atome zu verzichten, welche Idee man

---

platzt. Um sie gleichmässig hervorzubringen, füllt man ein Kästchen, das auf einer Seite mit einer Kautschuk-Membran geschlossen ist und auf der entgegengesetzten Seite eine kleine Öffnung hat, mit Rauch: Ein kurzer Schlag auf die Membran treibt dann einen Ring durch die Öffnung. In diesen Ringen ist alles in Bewegung: Die Rauchpartikelchen drehen sich um sich selbst und um die kreisförmige Achse des Ringes, und zwar geht die Bewegung in jedem senkrecht zum Inneren des Ringes geführten Schnitte in demselben Sinne vor sich, wie die Ortsbewegung des Ringes. Besonders hervorzuheben ist dabei noch, dass die einzelnen Partikelchen unlöslich an einander gekettet sind und sich nicht mehr von einander trennen können, was v. Helmholtz auch analytisch nachgewiesen hat. Das Experiment bestätigt vollkommen diese Eigenthümlichkeiten der Rauchringe, die sich trotz der von ihrem Mittelpunkte ausgehenden Anziehung in der Luft verbreiten. Ihre Gleichgewichtsform ist der Kreis; werden sie gestört, so kommen sie unter Oscillationen wieder zu ihr zurück; sucht man sie zu durchschneiden, so weichen sie aus oder biegen sich ein, ohne zu zerreissen. Wenn zwei Wirbel sich begegnen, so trennen sie sich nach dem Aneinanderprallen, wie zwei elastische Körper, indem sie heftig hin und herschwingen. Interessant ist der Fall, wo zwei Ringe sich parallel zu einander auf derselben Spur folgen; dann zieht der zweite sich zusammen, beschleunigt seinen Lauf und schwebt mitten durch den ersten hindurch, welcher seinerseits sich geöffnet und seine Geschwindigkeit verringert hat; hierauf zieht dieser sich zusammen, seine Geschwindigkeit nimmt zu und das Spiel beginnt von neuem. Diese unzerstörbaren und untheilbaren Wirbel repräsentiren vortrefflich die Atome der Chemiker. Sir William Thomson stellt die Hypothese auf, das Universum bestehe aus solchen untheilbaren, unzerstörbaren Wirbelringen, welche innerhalb eines vollkommenen Fluidum ihre Schwingungen ausführen, und zwar mit einer Masse und nach einer Periode, die für jeden von ihnen vollkommen bestimmt ist.

sich auch im übrigen von ihnen machen will. Indessen ist und bleibt das Atom nichts anderes als eine Hypothese, die glücklicherweise für uns nur einen speculativen Werth besitzt: Die Physik hat es nur mit Molecülen zu thun; das Atom ist die Domäne der Chemie.

122. Zusammensetzung der Materie. — Die Nothwendigkeit der Annahme von Molecülen folgt direct aus dem Begriff der Undurchdringlichkeit in Verbindung mit demjenigen der Deformirbarkeit. Wie könnte man anders das gemeinschaftliche Vorhandensein dieser beiden Eigenschaften fassen, wenn man nicht annähme, dass die Körper aus Molecülen bestehen, d. h. aus ungemein kleinen Theilchen, so fein, dass sie auch dem mit dem stärksten Mikroskope bewaffneten Auge verborgen bleiben, und doch scharf begrenzt und von einander geschieden durch Zwischenräume, moleculare Poren?[1]) Die Annahme von Molecülen ist deshalb nicht nur eine Hypothese, sondern der einfache Ausdruck einer Thatsache. Man kann nicht umhin, anzunehmen, dass diese Molecüle eine Bewegung zeigen, welche in innigem Zusammenhange mit dem Grade der Erwärmung des Körpers steht; die Erscheinungen der Diffusion einerseits und die mechanischen Folgen der Erwärmung andererseits beweisen diese inneren Bewegungen und gestatten einen Schluss auf die Grösse derselben. Endlich denkt man sich, — und diese Vorstellung ist der Lehre von der Continuität entlehnt, — die Zwischenräume zwischen den Moleculen angefüllt mit einem sehr fein vertheilten, elastischen, vibrirenden Medium, dem *„Äther"*. Diese Annahme, die man auf Plato und Aristoteles zurückführen kann und zu deren Einführung sicherlich Descartes wesentlich beigetragen hat, wurde durch die bewunderungswürdigen Arbeiten von Fresnel so fest begründet, dass man wohl berechtigt ist, zu sagen: Es giebt wenige so sicher feststehende Thatsachen, wie die Existenz des Äthers, dieses materiellen, trägen und elastischen Mittels, das fein genug ist, um überall hin dringen zu können, ebenso in's

---

[1]) Diese molecularen Poren können ebenso wenig sichtbar gemacht werden, wie die Molecüle selbst, und in *diesem* Sinne ist also die Porosität nicht etwa eine Eigenschaft, die bei jedem Körper durch Beobachtung zu erweisen wäre. Im Gegentheile: Das Vorhandensein deutlicher Höhlungen in einer grossen Anzahl von Körpern, die man oft auch sichtbare Poren nennt, ist bei gewissen anderen Körpern, wie Glas z. B., durchaus nicht nachzuweisen und kann deshalb auch nicht als allgemeine Eigenschaft der Körper betrachtet werden. Deshalb haben wir auch die Porosität nicht unter die allgemeinen Eigenschaften der Materie mit aufgenommen.

Innere der Körper, wie in den ganzen grossen Weltenraum, und das auf diese Weise als Bindeglied zwischen den verschiedensten Theilen des Universum dient.

Fassen wir alles nochmals zusammen, so besteht für den Physiker von heute jeder Körper aus Molecülen, welche von einander durch äthererfüllte Zwischenräume geschieden sind und sich inmittten dieses Fluidums lebhaft bewegen.

Das Streben eines jeden deformirten Körpers, sein ursprüngliches Volumen wieder einzunehmen, beweisst, dass im Innern des Körpers Kräfte thätig sind, welche in den Molecülen ihren Sitz haben; sie wirken bei gewissen Entfernungen abstossend, bei anderen anziehend, und werden sofort unmerkbar, wenn die Entfernung eine gewisse Grenze überschreitet. Fügen wir noch diese Vorstellung von den Molecularkräften der Lehre von der Zusammensetzung der Materie hinzu, so sind wir in den Stand gesetzt, die Erscheinungen der Elasticität ebenso wie diejenigen der verschiedenen Aggregatzustände der Körper zu erklären.

123. Die verschiedenen Aggregatzustände der Körper.

So nennt man die drei verschiedenen Formen, unter denen die Körper erscheinen und welche man folgendermaassen definiren kann.

Im *festen* Zustande sind Gestalt und Volumen vollständig bestimmt; im *flüssigen* Zustande ist zwar noch ein bestimmtes Volumen vorhanden, aber nicht mehr eine bestimmte Gestalt; im *gasförmigen Zustande* zeigt der Körper weder besondere Gestalt, noch bestimmtes Volumen.

In den beiden letzten Zuständen, wo die Theilchen ungemein leicht verschiebbar sind und sich der Gestalt des einschliessenden Gefässes anschmiegen, bezeichnet man die Substanz häufig als *Flüssigkeit.* Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Arten von Flüssigkeit besteht in der Ausdehnungsfähigkeit der Gase, d. h. in ihrem Bestreben, ihr Volumen ohne Aufhören zu vermehren. Eine entleerte und geschlossene Blase bläst sich unter dem Recipienten der Luftpumpe in Folge der Ausdehnung der geringen Menge Luft, welche sie noch enthält, vollständig auf. Lässt man die Luft wieder in den Recipienten eintreten, so sinkt die Blase mehr und mehr zusammen, ein Beweis für die grosse Compressibilität der gasförmigen Flüssigkeiten. Die Flüssigkeiten haben im Gegensatze hierzu ein ebenso fest bestimmtes Volumen, wie die festen Körper, und ihre Compressibilität ist, wie diejenige der festen Körper, äusserst gering.

Bei den festen Körpern ist die Resultante der Kräfte, welche die verschiedenen Theile des Körpers zusammenhalten, die *Cohäsion*,

so gross, dass es bedeutender Anstrengungen bedarf, um die relative Lage der Molecüle zu ändern. Bei den Flüssigkeiten hindern zwar die Molecularkräfte die Molecüle, sich zu zerstreuen oder

Fig. 196.

sich zu nähern, sie gestatten denselben aber, mit grosser Leichtigkeit auf einander zu gleiten. Bei den Gasen überwiegen die abstossenden Kräfte.

Gleichwohl ist es nothwendig, hinzuzufügen, dass die drei so definirten Aggregatzustände nur Typen sind, um welche sich die verschiedenen, in der Natur vorkommenden Körper in fortlaufender Reihe gruppiren. Es existiren alle Zwischenstufen zwischen einem festen Körper, wie Glas oder Stahl, und einer Flüssigkeit, wie der Alkohol. Die klebrigen Flüssigkeiten, wie der Brei, die Gallerte etc. führen stufenweise von der Flüssigkeit zum festen Körper hinüber. Hierbei ist es interessant, die Verschiedenheiten zwischen einem so leicht deformirbaren Brei und dem elastischen und schon scharfkantigen Leim zu verfolgen. Ebenso wenig scharf abgegrenzt erscheint der Übergang zwischen einem Gase und der dazu gehörigen Flüssigkeit. Vom Gase an aufwärts finden wir also alle möglichen Zwischenstufen bis zu der strahlenden Materie.

Ein und derselbe Körper kann, allerdings mehr oder weniger continuirlich, diese verschiedenen Stadien durchlaufen.

Zweiter Abschnitt.

Die Haupteigenschaften der festen Körper.

Erstes Capitel.

Structur.

124. Krystallinische Formen.[1]) — Wenn ein Körper ohne Zwang in den festen Zustand übergeht, sei es in Folge allmählicher Abkühlung, wenn er im flüssigen oder dampfförmigen Zustande war, sei es in Folge der Eindampfung einer Flüssigkeit, welche ihn in Lösung enthielt, so nimmt er im allgemeinen die Gestalt von Polyedern mit geraden Seitenflächen und scharfen Kanten an; er krystallisirt. Diese geometrische Form der festen Körper ist bei gewissen natürlich vorkommenden so schön ausgeprägt, dass die Krystalle jeder Zeit die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt haben. Die Alten sahen in ihnen jedoch nur „Naturspiele“. Als man anfing, aufmerksam zu beobachten, erkannte man dagegen das häufige Vorkommen der krystallinischen Formen bei den anorganischen Körpern. Das Experiment kam zu der einfachen Beobachtung der Krystalle hinzu, welche in der Natur im fertigen Zustande sich vorfinden. So zeigte Rouelle, dass man Schwefel in schönen Krystallnadeln durch langsames Abkühlen eines mit geschmolzenem Schwefel gefüllten Tiegels erhalten kann, wie man es heute noch in allen

---

[1]) V. von Lang, Lehrbuch der Krystallographie; Wien 1866.
Quendstedt, Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie; Tübingen 1873.
P. Groth, Physikalische Krystallographie; Leipzig 1876.
Sohnke, Entwicklung einer Theorie der Krystallstructur; Leipzig 1879.

chemischen Laboratorien wiederholt. Brongniart liess Wismuth auf analoge Weise krystallisiren. Was man anfangs für Zufall gehalten hatte, war die allgemeine Regel: der gewöhnliche Zustand der anorganischen festen Körper ist der krystallinische.

Diese Thatsache ist von grosser Wichtigkeit, weniger wegen der Schönheit und Besonderheit, welche die Krystalle mancher Mineralienarten aufweisen, als wegen der Aufschlüsse, welche die äussere Gestalt uns über die innere Anordnung der Molecüle liefert.

Wir wollen gleich an dieser Stelle bemerken, dass diese Anordnung nothwendig Gesetzen folgt, die abgesehen von aller Beobachtung a priori klar sind; denn sie ergeben sich unmittelbar aus dem Begriff der Homogenität.

125. Homogenität, Isotropie. — Einen Körper nennt man homogen (*ὁμός*, ähnlich; *γένος*, Art), wenn alle äusserst kleinen, aber endlichen Theilchen, deren Gesammtheit den Körper bildet, dieselben Eigenschaften aufweisen. Ist diese Gleichheit der Eigenschaften ausserdem nach allen Richtungen hin im Innern des Körpers vorhanden, wie es bei den Gasen, den Flüssigkeiten und den dem Glase analogen festen Körpern der Fall ist, so heisst der Körper isotrop (*ἴσος*, gleich; *τρέπω*, drehe). Es kann dagegen vorkommen, dass der homogene Körper nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Eigenschaften aufweist: so sind bei einem Quarzkrystall, der die Form eines hexagonalen Prismas hat, der Widerstand gegen die Deformation, die Ausdehnung unter dem Einfluss der Wärme, die Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektricität, die Wirkung auf das Licht längs der Achse des Prismas nicht dieselben, wie längs einer Linie, die auf dieser Achse senkrecht steht. Wenn man von einem beliebigen Punkte eines isotropen Körpers in einer beliebigen Richtung eine Gerade von der Länge l zieht, die im Verhältniss zu der mittleren Entfernung zweier Molecüle sehr lang ist, so liegen auf dieser Geraden immer dieselbe Anzahl von Molecülen, die nach allen möglichen Richtungen orientirt sind. Die Molecüle müssen in dem isotropen Körper derart vertheilt sein, dass weder in ihrer Zahl, noch in ihrer Orientirung irgend eine Richtung vorherrscht. Eine vollständige Unregelmässigkeit reicht zur Erfüllung dieser Bedingungen aus.

126. Netzförmige Structur eines homogenen, krystallinischen festen Körpers.[1]) — Die Anordnung der Molecüle eines Krystalls muss dagegen eine gewisse Regelmässigkeit aufweisen.

---

[1]) Siehe Bravais, Études cristallographiques; Paris 1851.

Zuerst erfordert die Homogenität, dass in einem homogenen Körper, dessen Structur nicht vollständig unregelmässig ist, alle Molecüle wie die Knoten eines Netzes mit parallelepipedischen

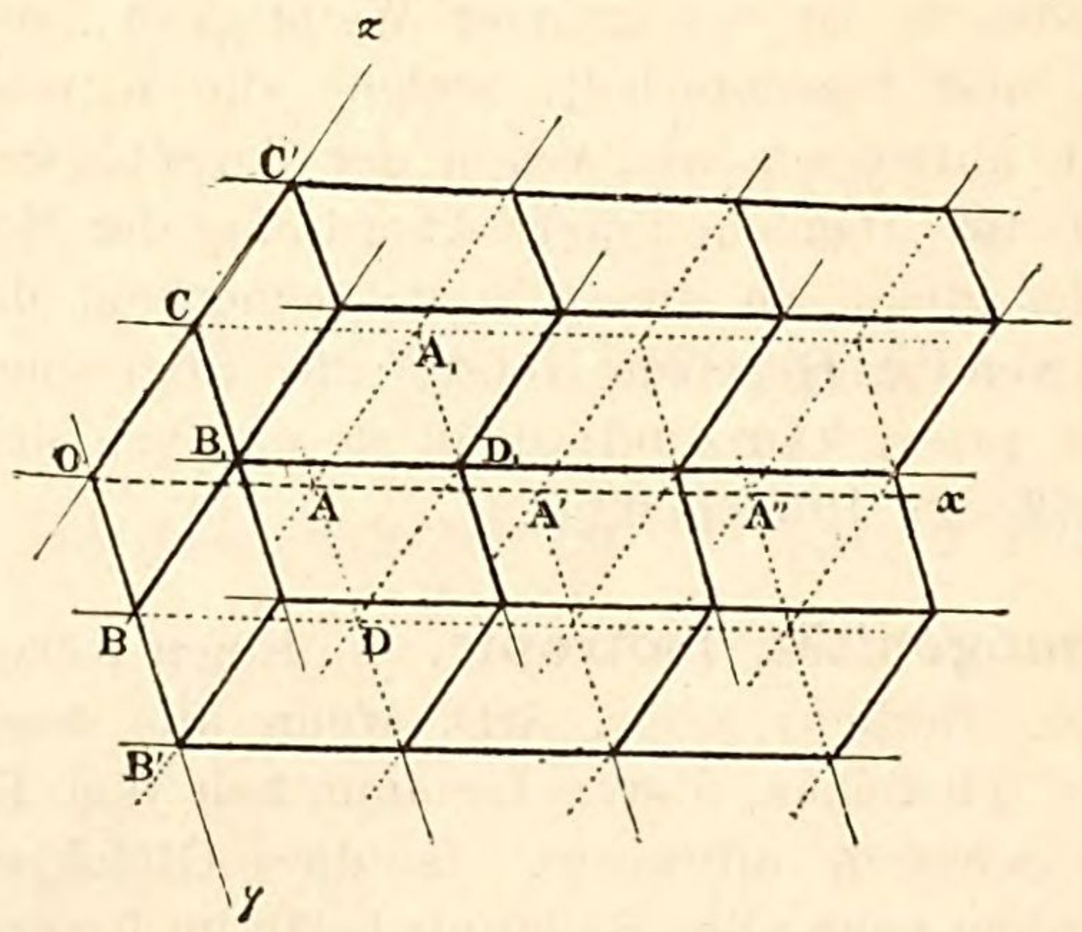


Fig. 197.

gleichen Maschen vertheilt sind. Es sei nämlich O ein beliebiges Molecül und A ein ihm benachbartes, so dass zwischen O und A auf OA kein Molecül mehr liegt. Wir verlängern OA nach beiden Seiten und betrachten auf dieser Geraden Ox einen Punkt A', der so gelegen ist, dass $AA' = OA = a$. In A' befindet sich nothwendigerweise ein Molecül, denn die Stoffvertheilung muss sich in gleicher Weise um jedes Molecül herum wiederholen; in A'' ist ein drittes Molecül u. s. w. Es sei nun B ein Molecül ausserhalb der Geraden AA', welches so gelegen ist, dass man, wenn Ox parallel zu sich selbst in der Ebene AOB bewegt wird, auf kein anderes Molecül früher trifft als auf B; durch O und B legen wir die Gerade Oy: auf dieser haben wir eine Reihe Molecüle in den gleichen Abständen b. Es ist alsdann klar, dass, wenn wir in der Ebene xOy das Netz zeichnen, dessen Maschen gleich dem Parallelogramm $OABD$ sind, alle in der Ebene xOy gelegenen Molecüle auf den Knoten dieses Netzes liegen werden. Es sei endlich C ein Molecül, welches ausserhalb der Ebene xOy liegt, aber ihr näher als irgend ein anderes. Wir verschieben die Ebene xOy parallel zu sich selbst, so dass der Punkt O allmählich nach den Punkten C, C'... gelangt, die von einander gleich weit um die Strecke c entfernt sind. Alsdann liegen alle Molecüle des Körpers auf den Knoten eines Netzes, dessen Maschen Parallelepipede, wie $OABDCA_1B_1D_1$, sind.

Constanz des Maschenvolumen. — Jede Gerade, welche durch zwei Knoten geht, trifft eine Reihe gleich weit von einander entfernter Molecüle. Die Molecüle eines Körpers können also in unendlich vielen netzförmigen Systemen angeordnet werden, welche indessen eine Eigenschaft gemeinsam haben: das Volumen der Masche ist bei allen gleich. Alle diese Systeme besitzen nämlich dieselbe Anzahl Knoten, die gleich der Anzahl der Körpermolecüle ist. Sie haben also auch dieselbe Anzahl Maschen; ausserdem ist der Raum, welchen sie einnehmen, derselbe: das Volumen jeder Masche ist also auch dasselbe. Es ist eine dem Körper charakteristische Constante Ω.

Allgemeinheit dieser Principien. — Diese Sätze haben allgemeine Geltung: sie können auf jeden homogenen, regelmässig constituirten Körper angewandt werden, wie er auch sonst beschaffen sein möge. Wenn wir sie auch mit Hülfe der Moleculartheorie abgeleitet haben, so ist leicht zu sehen, dass sie ihre Geltung nicht verlieren, wenn man die Existenz der Molecüle nicht zugiebt und an ihre Stelle irgend welche Bewegungen setzt, die in einer überall verbreiteten Flüssigkeit erregt werden.

Der Abbé Haüy[1]) war der erste, welcher diese Principien formulirte: was wir die Masche des Krystalls genannt haben, ist nichts anderes als das „molécule intégrante“ des berühmten Schöpfers der Krystallographie. Delafosse[2]) zeigte darauf, dass diese Primitivgestalt selbst wieder als ein zusammengesetztes System betrachtet werden muss, welches aus einer gewissen Zahl krystallinischer Molecüle besteht, und dass ausserdem diese aprioristischen Schlussfolgerungen nichts über die Beziehung zwischen der Form oder dem Volumen der Masche und der Constitution des krystallinischen Molecüls aussagen können. Allein die Beobachtung kann hierüber Aufklärung geben.

Aus diesen Principien ergeben sich mehrere Folgerungen.

Spaltbarkeit. — Wenn die Molecüle in einer Ebene des Netzes sehr nahe bei einander liegen, so ist die parallelogrammförmige Masche σ klein und die nächste Ebene des Netzes ist weiter, z. B. um d entfernt, damit die Gleichung $\sigma d = \Omega$ bestehen bleibt. Da die molecularen Kräfte schnell mit der Entfernung abnehmen, kann man diese beiden Ebenen leicht trennen. Die Beobachtung zeigt in der That, dass, wie schon Bergmann[3]) bemerkt hat, bei den Krystallen Ebenen leichter Spaltbarkeit existiren, welche sich bei

---

[1]) Haüy, Traité de minéralogie; Paris 1801.
[2]) Delafosse, Mémoires des savants étrangers, VIII, 647; 1843.
[3]) Bergmann, Opuscula physica et chemica; Upsala 1779.

einer gegebenen Substanz unter ganz constantem Winkel schneiden. So lässt sich der Kalkspath (Kalciumcarbonat) in den zahlreichen Formen, die er annimmt, stets nach drei verschiedenen Richtungen spalten: die so erhaltenen Spaltflächen zeigen eine Politur und einen Glanz, der deutlich auf ein natürliches Gefüge hinweist. Die Spaltflächen schneiden sich stets unter dem Winkel von $105^0\ 5'$. Die Masche des Netzes bildet also ein Rhomboeder von $105^0\ 5'$.

Constanz der Winkel. — Da die äusseren Flächen eines Krystalls, wie die Beobachtung lehrt, Ebenen sind und die äussersten Molecüle in ihnen liegen, so sind sie nothwendigerweise Ebenen des Netzes. Wenn ein Krystall unter bestimmten Umständen entsteht, so bilden gewisse Ebenen des Netzes die Grenzflächen des festen Körpers; wenn der Krystall wächst, so legen sich neue Maschen in parallelen Schichten über die schon vorhandenen, da dasselbe System von Ebenen die äusseren Flächen des Polyeders so lange bildet, als die äusseren Bedingungen gleich bleiben. Man sieht hieraus, dass ein Krystall durch die Winkel bestimmt ist, welche die Seitenflächen des Polyeders mit einander einschliessen, und keineswegs durch dessen Grösse. Diese Constanz der Winkel bei aller sonstigen Mannigfaltigkeit wurde zuerst durch die Messungen von Romé de l'Isle[1]) bewiesen, welcher damit die Krystallographie begründete.

127. Symmetrie der Krystalle. — Die Krystalle besitzen nicht nur ebene Flächen und scharfe Kanten, weshalb Haüy meinte, dass die wirkliche Schönheit dieser Gebilde durch die gerade Linie gekennzeichnet werde; sie zeigen ausserdem eine Symmetrie, die bei den verschiedenen Arten mehr oder weniger vollkommen ist.

Da der krystallinische Aufbau durch Molecüle gebildet wird, welche in den Knotenpunkten eines Netzes liegen, so kann eine bestimmte Symmetrie bei einem Krystall nur unter der Bedingung vorkommen, dass sie gleichzeitig zu der Masche des Netzes und dem krystallinischen Molecül passt. Nehmen wir z. B. an, dass die Masche des Netzes eine Achse von vierfacher Symmetrie zulässt, so heisst das mit anderen Worten: Wenn man das Netz um diese Achse um 90^0 dreht, so bringt man es mit sich selbst wieder zur Deckung. Fallen in Folge dieser Drehung die Molecüle nicht wieder in die Knoten des Netzes, so ist der krystallinische Bau zerstört.

128. Krystallsysteme. — Die Masche des Netzes, und folglich das netzförmige System selbst, kann nur eine bestimmte

---

[1]) De l'Isle, Cristallographie; Paris 1783.

Art der Symmetrie annehmen. Die verschiedenen Symmetrien, welche die einzelnen Krystallsysteme kennzeichnen, sind folgende:

1. *Das kubische System.* — Die Masche des Netzes ist ein Würfel. Die Symmetrie-Elemente (Mittelpunkte, Achsen und Ebenen) dieses festen Körpers sind hinreichend bekannt, so dass wir nicht weiter darauf einzugehen brauchen. Es krystallisiren in diesem System: gewöhnliches Kochsalz, Salmiak, Alaune, Granate, Zinkblende, Pyrit, Magneteisenerz, Diamant, Flussspath, Boracit, Eisen und Silber.

2. *Das rhomboedrische System.*[1]) — Die Masche des Netzes ist ein Rhomboeder, d. h. ein Parallelepiped, dessen Seitenflächen alle gleiche Rhomben bilden und bei dem in Folge dessen alle Flächenwinkel gleich sind oder sich zu 180^0 ergänzen. Man hat also einen Mittelpunkt der Symmetrie und eine Achse dreifacher Symmetrie, welche auch die Achse des Rhomboeders genannt wird: sie verbindet zwei trigonale Ecken, welche jede von drei Flächenwinkeln derselben Art gebildet werden, d. h. alle drei sind spitz oder stumpf; ferner drei Achsen von zweifacher Symmetrie, welche die Mitten der Seiten des zickzackförmigen Sechsecks verbinden. Dieses wird durch die Kanten gebildet, die nicht von der Achse dreifacher Symmetrie getroffen werden. Endlich sind drei Symmetrieebenen vorhanden, welche durch die Hauptachse und die Polkanten gehen. Zu diesem System gehören Kalkspath, Quarz, Turmalin, Natronsalpeter, Apatit, Smaragd, Dioptas, Zinnober, Graphit, Eisenglanz, Aluminium, Wismuth und Antimon.

3. *Quadratisches System.* — Die Masche ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche. Die Achse dieses Prismas, welche man oft auch die Hauptachse des Krystalls nennt, ist eine Achse von vierfacher Symmetrie. Beispiele: Zirkon, Anatas, Rutil, Kassiterit (Zinnstein) und Vesuvian.

4. *Rhombisches System.* — Die Masche ist ein gerades Prisma mit rechteckiger oder rhombischer Grundfläche. In beiden Fällen ist das System in gleicher Weise durch drei Achsen von zweifacher Symmetrie charakterisirt, die senkrecht auf einander stehen. Von den Körpern, welche in diesem System krystallisiren, erwähnen wir Aragonit, Kalisalpeter, Baryt, Anglesit, Cölestin, Topas, Staurolith, Olivin, Bournonit und den natürlichen Schwefel.

---

[1]) Wir vereinigen hier mit dem rhomboedrischen System das hexagonale; bei diesem ist die Masche ein gerades Prisma, dessen Basis einen Rhombus von 120^0 darstellt, und drei zusammengefügte Maschen bilden ein regelmässiges hexagonales Prisma, welches eine Achse sechsfacher Symmetrie besitzt.

5. *Monoclines System.* — Die Masche ist ein gerades Prisma mit parallelogrammförmiger Grundfläche oder ein schiefes Prisma mit rhombischer Grundfläche, dessen eine Diagonale auf derjenigen Ebene senkrecht steht, welche durch die andere Diagonale der Grundfläche und durch die Achse des Prismas geht. In beiden Fällen giebt es nur eine Achse von zweifacher Symmetrie. Zu diesem System gehören Gyps, Eisenvitriol, Pyroxen, Amphibol, Epidot, Titanit, prismatischer Schwefel, Zucker, Weinsäure und deren Salze.

6. *Triclines System.* — Die Masche ist ein beliebiges schiefes Parallelogramm, welche kein anderes Symmetrieelement besitzt als ihren Mittelpunkt. Beispiele: Kupfervitriol, Axinit und Albit.

129. Gesetz der Symmetrie; Gesetz der Ableitung. — Wenn in einem System in Folge gewisser Einflüsse eine bestimmte Ebene des Netzes als äussere Fläche erscheint, so treten auch alle Ebenen des Netzes, welche in Folge der Symmetrie des Systems durch die erste bedingt sind, als Seitenflächen des äusseren Polyeders auf. Man bezeichnet als einfache Form die Gesammtheit der äusseren Flächen, deren gemeinsames Vorkommen wegen der Symmetrie des Systems nothwendig ist.

Jede einfache Form kann man sich aus der primitiven Form (derjenigen der Masche) durch Änderungen der Winkel und der Kanten der letzteren abgeleitet denken. Diese Änderungen unterliegen den beiden folgenden Gesetzen, welche man Haüy verdankt:

Gesetz der Symmetrie. — Alle ähnlichen Elemente eines Krystalls[1]) werden immer gleichzeitig und in ähnlicher Weise geändert.

Gesetz der Ableitung. — Jede modificirende Seitenfläche schneidet auf den Kanten der ursprünglichen Form Längen ab, die den einfachen Multipla der Länge dieser Kanten proportional sind.[2])

Nach Haüy bilden diese Gesetze den Ausdruck für eine Anordnung der Primitivgestalten, welche er oft mit einem Mauerwerk verglichen hat. Die Figur 198 zeigt, wie er die Bildung des Rhomben-Dodekaeders auffasste: auf jeder Seitenfläche eines würfel-

---

[1]) Man versteht darunter die gleichen Winkel oder Kanten, welche sich nur durch die verschiedene Lage am Krystall unterscheiden.

[2]) Dies ist identisch mit dem von *C. S. Weiss* (1809) gefundenen Gesetz, wonach alle Flächen eines Krystalls im Zonenverbande stehen. Unter einer Zone versteht man die Gesammtheit aller Flächen, welcher einer Geraden parallel sind. Die Untersuchungen von Weiss, welcher die Flächen eines Krystalls auf gewisse Richtungen, die Achsen, bezog, bilden die Grundlage für die heutige Form der Krystallographie. — H.

förmigen Kerns dachte er sich eine Reihe von Lamellen von der Dicke eines Molecüls liegen, bei denen jedesmal der nächstfolgende

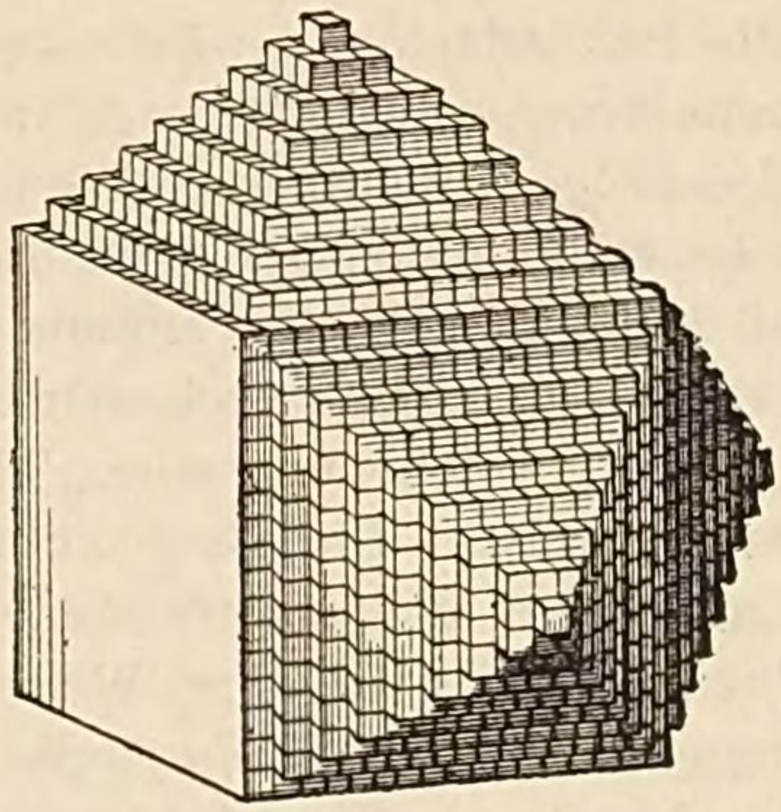


Fig. 198.

Rand gegen den des vorhergehenden um die Dicke eines Molecüls zurücktritt. Man sieht leicht, dass durch diesen Aufbau Seiten-

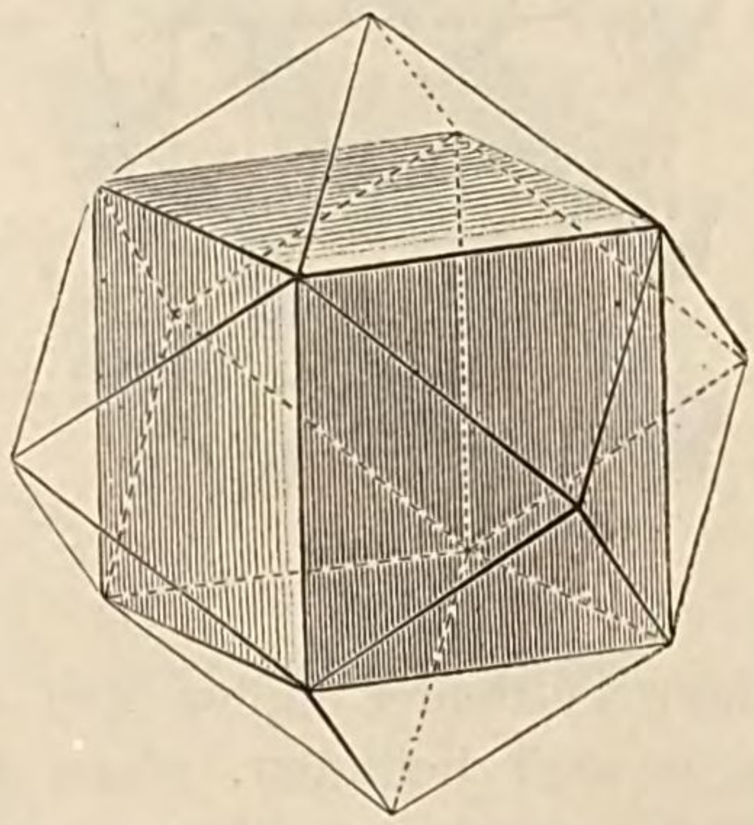


Fig. 199.

flächen entstehen, welche jede Kante der ursprünglichen Form berühren.

130. Holoedrie; Hemiedrie und Tetartoedrie. — Die Primitivgestalten Haüys bilden, wie wir wissen, die Maschen eines Netzes, auf dem die Molecüle eines krystallinischen Körpers vertheilt sind. In jeder Ecke der kleinen Würfel der Figur muss man sich folglich ein krystallinisches Molecül denken, welches die gleichen Symmetrieelemente wie das Netz hat; dem Molecül kann man daher selbst die Form eines Würfels beilegen, der ebenso

wie die Maschen des Netzes orientirt ist. Wenn also die Symmetrie des Molecüls mit derjenigen der Masche übereinstimmt, so zeigt jede einfache Form die nämliche Symmetrie. Um auszudrücken, dass sie alsdann alle Seitenflächen besitzt, welche die dem Netze eigenthümliche Symmetrie erfordert, sagt man, die Form sei holoedrisch (*ὅλος*, alles; *ἔδρα* Seitenfläche). Wenn aber die Symmetrie des Molecüls nicht so vollkommen als diejenigen des Netzes ist, so braucht nur ein Theil derjenigen Flächen aufzutreten, welche die Symmetrie des Netzes erfordert: einer gegebenen Fläche entspricht alsdann eine einfache Form, welche nur einen Theil der Flächen der holoedrischen Form aufweist. Die Beobachtung zeigt, dass die Zahl der Flächen auf diese Weise entweder auf die Hälfte oder auf ein Viertel reducirt wird. Auf diese Weise entsteht die in der Natur häufig vorkommende Hemiedrie (*ἡμι*, halb) und die Tetartoedrie (*τέταρτον*, Viertel), welche nur sehr selten auftritt.

Die Figur 200 zeigt nach Delafosse, wie die Molecüle, welche

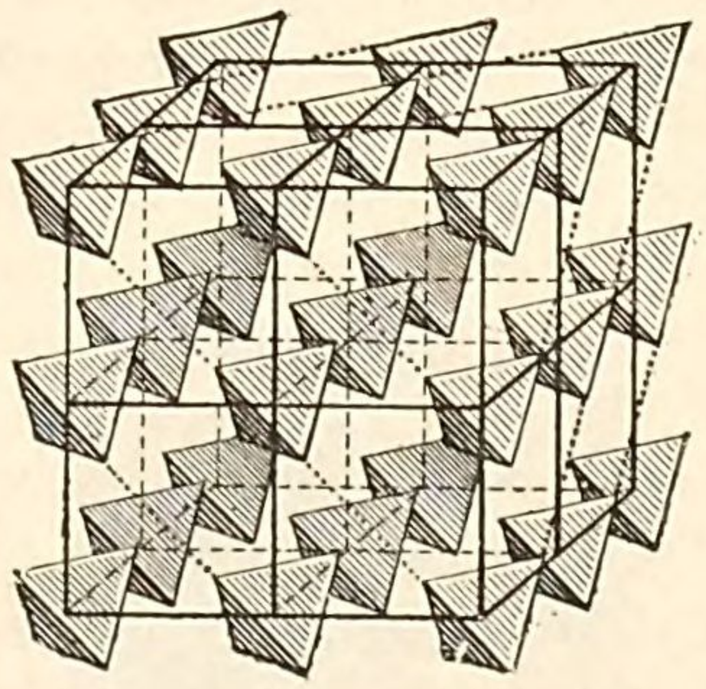


Fig. 200.

die Form regelmässiger Tetraeder haben und in den Knoten einer würfelförmigen Masche sich befinden, einen krystallinischen Bau bilden, dessen Symmetrie weniger vollkommen ist als diejenigen des

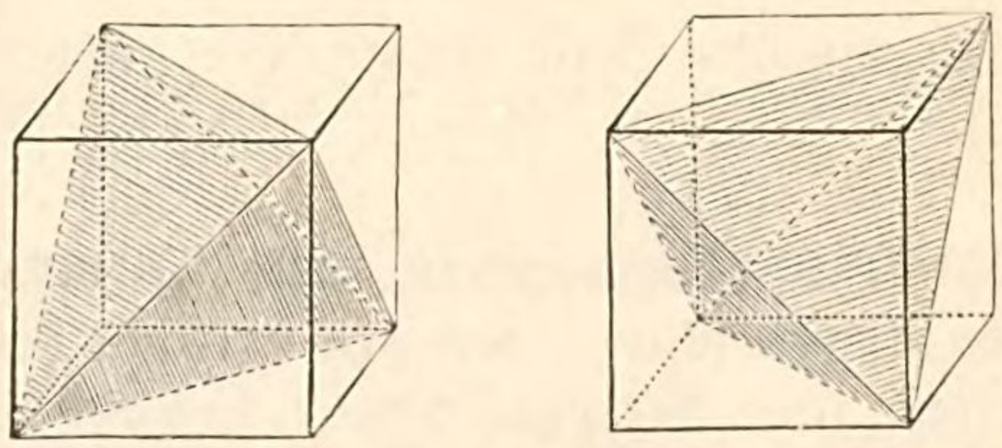


Fig. 201.

Netzes: das Molecül hat in der That keinen Symmetriemittelpunkt mehr, und die Achsen vierfacher Symmetrie sind in solche zweifacher

übergegangen. Das Vorkommen einer symmetrischen Abstumpfung einer Ecke wird nicht mehr das Auftreten der acht Flächen des Oktaeders zur Folge haben; nur vier Ecken sind ähnlich und werden nothwendig gleichzeitig geändert, indem die neu auftretenden Flächen nach ihrer Verlängerung ein regelmässiges Tetraeder bilden. Wenn die Abstumpfung sich auch auf die anderen vier Ecken erstreckte, so erhielte man ein zweites Tetraeder, welches mit dem ersten vereinigt die holoedrische Form, das regelmässige Oktaeder, geben würde und welches aus diesem Grunde das dem ersten Tetraeder conjugirte genannt wird.

131. Verschiedene Arten der Hemiedrie. — Die Hemiedrie kommt in zwei verschiedenen Arten vor:

1. Nur die Hälfte der ähnlichen Elemente der ursprünglichen Form ändert sich auf gleiche Weise, indem von zwei diagonal einander gegenüberliegenden Elementen ein einziges betroffen wird. Zwei parallele gleichwerthige Flächen können also bei dieser Art von Hemiedrie nicht existiren, welche man deshalb die Hemiedrie mit geneigten Flächen nennt. Man bezeichnet sie auch als tetraedrische Hemiedrie, weil das regelmässige Tetraeder auf diese Weise aus dem Würfel durch die Abstumpfung der halben Anzahl der Würfelecken entsteht.

2. Alle ähnlichen Elemente werden auf ähnliche Weise und gleichzeitig geändert, aber jedes derselben hat nur die Hälfte der Flächen, welche das Symmetriegesetz erfordert, indem die unterdrückten Flächen mit denen abwechseln, welche erhalten bleiben. Es kann alsdann vorkommen, dass an zwei Endpunkten derselben Diagonale die erhaltenen Flächen unter sich parallel sind; und man gelangt auf diese Weise zur Hemiedrie mit parallelen Flächen.

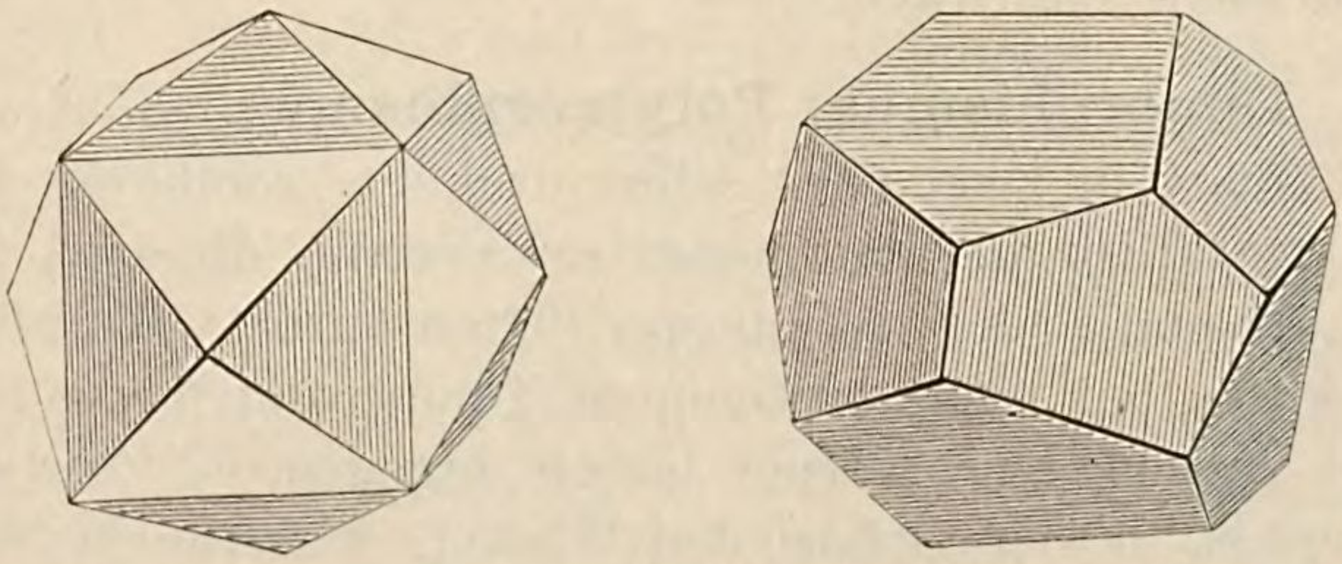


Fig. 202.

Als Beispiel wollen wir das Pentagon-Dodekaeder anführen, welches die hemiedrische Form des Tetrakishexaeder bildet. Dagegen kann auch der Fall eintreten, dass die entwickelten Flächen an einem

Ende genau denjenigen parallel sind, die am anderen Ende verschwinden. Diese Art nennt man plagiedrische Hemiedrie; als

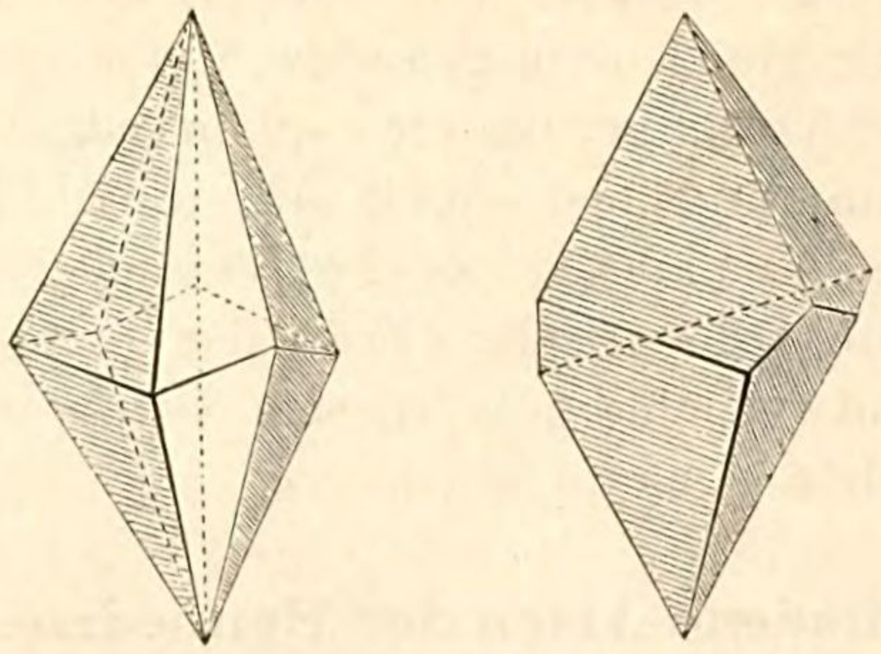


Fig. 203.

Beispiel mögen die trapezoidförmigen Flächen beim Quarz dienen, welche aus der Hemiedrie eines Scalenoeders hervorgehen. Die Flächen, welche sich entwickeln, sind abwechselnde Paare, gebildet von einer Seite der oberen und einer Seite der unteren Pyramide; verlängert geben sie einen Körper mit sechs Seitenflächen, das rechts und links gebildete trigonale Trapezoeder, welche durch Drehen nicht zur gegenseitigen Deckung gebracht werden können.

Die geneigtflächige und parallelflächige Hemiedrie kommen ziemlich häufig vor; die plagiedrische (trapezoedrische) Hemiedrie nur ausnahmsweise. Die Krystalle, welche der ersten Art angehören, unterscheiden sich physikalisch von den holoedrischen Krystallen durch die pyroelectrischen Eigenschaften; die zweite Hemiedrie scheint sich durch keine sehr deutliche physikalische Eigenschaft zu verrathen. Die Formen, welche nicht zu Deckung zu bringen sind (Plagieder oder solche, welche aus doppelter Hemiedrie entstehen), deuten im allgemeinen auf Stoffe, die verschieden auf das polarisirte Licht einwirken.

132. Dimorphismus; Polymorphismus. — Gewisse Substanzen können in zwei oder selbst drei unvereinbaren primitiven Formen krystallisiren: man nennt sie alsdann dimorph (Schwefel, Kalciumkarbonat) oder polymorph (Titansäure). Im allgemeinen ist jede Form bei einer bestimmten Temperatur besonders stabil.

Zwei verschiedene Körper haben dagegen, oft bis auf einige Bogenminuten in der Grösse der Winkel, dieselbe krystallinische Form und liefern, wenn sie gemeinsam den festen Zustand annehmen, Krystalle, in welche sie in beliebigen Verhältnissen eintreten. Diese Eigenschaft heisst Isomorphismus (Mitscherlich).[1]) Sie ist ein Zeichen für die Ähnlichkeit der chemischen Zusammensetzung.

---

[1]) Mitscherlich, Ann. de chim. et de phys. (2), XIV u. XIX; 1820 u. 1822.

133. Die Bedingungen, unter denen ein Körper krystallisirt. — Alle Bedingungen, unter denen ein Körper den festen Zustand annimmt, können auch den krystallinischen Zustand herbeiführen:

1. Directer Übergang aus dem gasförmigen in den festen Zustand; z. B. flüchtiger Phosphor im Vacuum bei niedriger Temperatur, destillirtes Arsen bei dunkler Rothgluthhitze.

2. Übergang aus dem heissen, geschmolzenen Zustande in den festen; z. B. Schwefel, Wismuth.

3. Übergang aus dem gelösten in den festen Zustand, sei es durch Eindampfen der Lösung (Seesalz), sei es durch Abkühlung der heiss gesättigten Lösung (die meisten Salze), sei es durch Veränderung der Lösungsmittel (Kampferkrystalle, welche man aus der alkoholischen Lösung durch Zusatz von Wasser erhält).

4. Bildung eines festen Körpers, der auf chemischem Wege niedergeschlagen wird (Magnesiumammoniumphosphat) oder durch Electrolyse entsteht (Baum des Saturn).

Die Krystallisation ist um so schöner, je langsamer sie erfolgt. Es ist jedoch ziemlich schwierig, einzelne schöne Krystalle in der krystallisirten Masse zu erhalten, welche eine Flüssigkeit ausscheidet. Ein Verfahren, das man Leblanc[1]) verdankt, führt jedoch zum Ziel. Man nimmt einen der schönsten Krystalle aus dem Durcheinander der ersten Krystallisation und hängt ihn in eine neue gesättigte Lösung; der Krystall wird alsdann fast ausschliesslich zum Mittelpunkt der neuen Krystallisation und auf diese Weise genährt, wächst er schnell und regelmässig. Dieselbe Wirkung erzielt man, wenn der Krystall in die Lösung einer mit ihm isomorphen Substanz gebracht wird.

Merkwürdig ist bei der Krystallbildung die Ergänzung, welche ein in seiner Mutterlauge zerbrochener Krystall erfährt[2]): die nährende Arbeit concentrirt sich auf die schadhafte Stelle und erst nach deren vollständiger Vernarbung beginnt wieder das regelmässige Wachsthum.

Gernez[3]) hat in geschickter Weise die Wirkung eines Krystalls auf die Lösung benutzt, um die Krystallisation solcher Flüssigkeiten sicher hervorzurufen, welche heiss gesättigt und langsam abgekühlt bei gewöhnlicher Temperatur flüssig bleiben, indem sie eine sehr viel grössere Salzmenge gelöst zurückbehalten als sie bei der-

---

[1]) Leblanc, Journal de physique de la Métherie, LV; 1802.

[2]) Lavaille, C. R., XXX, 495; 1853. Siehe auch Pasteur, Ann. de chim. et de phys. (3), XLIX, 5; 1857.

[3]) Gernez, Ann. de l'École normale (1) III, 167; 1866 und (2) V, 9; 1876.

selben Temperatur lösen könnten; er hat auf diese Art das unsichere und geheimnissvolle Festwerden der übersättigten Lösungen aufgeklärt. Wir werden später auf die interessanten Experimente zurückkommen; zwei Thatsachen müssen wir jedoch sogleich erwähnen, weil sie den Einfluss der krystallinischen Keimform beweisen: 1. die Krystallisation kann durch die Berührung eines Krystalls einer Substanz hervorgerufen werden, welche mit der Substanz der Lösung isomorph ist (Alaune);[1]) 2. wenn man in die Lösung eines dimorphen Körpers einen Krystall bringt, welcher der einen oder der anderen der zwei verschiedenen Formen angehört, so entstehen ohne Ausnahme Krystalle, die dem verwendeten Keim ähnlich sind.

134. Structur der nichtkrystallinischen festen Körper.

Ausser dem vollkommenen krystallinischen Zustand können die festen Körper noch verschiedene mehr oder weniger gut bestimmte Arten der Structur besitzen.

Wenn der Körper aus sehr kleinen Krystallen besteht, die in langen, ungefähr parallelen Reihen angeordnet sind, so hat er eine sehnige Structur. „Es ist zu bemerken, dass bei den fadenförmigen Krystallen, aus denen diese Reihen bestehen, die krystallographischen Achsen, nach denen die Krystalle sich an einander reihen, für dieselbe Substanz immer dieselben sind und auf diese Weise sehr wahrscheinlich die Richtungen anzeigen, in denen die anziehende moleculare Kraft am grössten ist. Bei den Krystallen mit einer Hauptachse liegt diese im allgemeinen in der Richtung der Sehnen.“[2]) Diese krystallinischen Fäden können unter dem Einfluss starker äusserer Kräfte (Stössen) oder stetig wirkender Erschütterungen (Schwingungen) brechen: die Structur wird alsdann körnig, und der Widerstand gegen den Bruch ist viel kleiner geworden.

Um sich von der glasigen Structur eine genaue Vorstellung zu machen, genügt die Beobachtung des Aussehens, welches das Glas und ähnliche Körper auf die Dauer annehmen: sie verlieren ihre Durchsichtigkeit und werden körnig, das glasartige Aussehen verschwindet. Fruchtzucker verändert sich auf diese Weise in einigen Tagen; die glasartige arsenige Säure gleicht zuletzt dem Porcellan; die alten Fensterscheiben der Kathedralen sind voll-

---

[1]) Lecoq de Boisbaudran hat durch dieses Krystallisationsmittel selbst Körper erhalten, welche unter gewöhnlichen Bedingungen nicht krystallisiren.

[2]) Mallard, Cours de cristallographie, I. Paris, Dunod, 1880.

ständig undurchsichtig. Dies Verschwinden des glasartigen Aussehens ist nichts anderes als eine Krystallisation, die man bei aufmerksamer Beobachtung der betreffenden Substanz zweifellos erkennt. Bei dem Festwerden des Glases können sich die Molecüle, welche durch die Viscosität der Flüssigkeit gehindert werden und ausserdem oft plötzlich erkalten (Härtung), nicht so lagern, wie ihre gegenseitigen Kräfte es erfordern. Die erkaltete Materie bewahrt also die Isotropie, welche die glühende Flüssigkeit besass: es scheint sogar, als ob es keine anderen wahrhaft isotropen, festen Körper giebt, als diejenigen, welche so im Zustand des festflüssigen sind.[1]) Aber bei diesen festen Körpern sind die inneren Kräfte nicht im Gleichgewicht und mehr oder weniger langsam, aber sicher gelangen die Molecüle zu stabilen Gleichgewichtslagen, welche den krystallinischen Bau kennzeichnen.

Es giebt indessen noch Körper, welche niemals krystallisiren, obgleich ihre Molecularkräfte bei dem Übergang in den festen Zustand unbehindert wirken können. Graham hat diese Substanzen Colloide (ähnlich dem Kleister, colle) genannt: es sind entweder organische Stoffe, wie das Eiweiss, die Gummiarten u. s. w., oder auch mineralische Substanzen, wie die Kieselsäure.

---

[1]) Le Roux, C. R., LXIV, 126; 1867.

D. Herman und F. Rutley, Über den mikroskopischen Charakter einiger Proben von entglastem Glase. Proc. Roy. Soc. XXXIX, S. 87—107; 1885.

Zweites Capitel.

Elasticität.

135. Definitionen. — Das wesentliche Kennzeichen des festen Zustandes ist der Widerstand gegen eine Veränderung der Form. Deformationen können trotzdem entstehen, entweder vorübergehende oder bleibende. Wir betrachten vorläufig die ersten.

Jeder feste Körper, der vorübergehend der Einwirkung einer Kraft unterworfen wird, erfährt eine Deformation, die vollständig verschwindet, wenn die Kraft zu wirken aufhört. Es ist freilich hierbei vorausgesetzt, dass sie unter einer gewissen Grenze bleibt, die für die verschiedenen Körper verschieden ist. So lange diese Grenze (Elasticitätgrenze) nicht erreicht ist, widersetzen sich die inneren Kräfte, welche durch die Deformation hervorgerufen werden, den äusseren, und unter der gegenseitigen Wirkung der beiden entgegengesetzten Kräftearten entsteht ein neuer Gleichgewichtszustand. Die Bestimmung der Bedingungen für dieses Gleichgewicht, oder allgemeiner ausgedrückt, das Studium der elastischen Kräfte bildet eine der wichtigsten und schwierigsten Fragen der Physik. Berühmte Gelehrte wie Navier[1]), Poisson[2]), Cauchy[3]), Lamé[4]), de Saint-Venant[5]), Kirchhoff[6]), Clebsch[7]), Beer[8]), und Phillips[9]) haben

---

[1]) Navier, Mémoires de l'Académie des sciences, VI; 1827.

[2]) Poisson, Mémoires de l'Académie des sciences, VIII; 1829; et Journal de l'École polytechnique, XXe cahier; 1831.

[3]) Cauchy, Exercices de mathématiques, II und III; Paris 1827 und 1828.

[4]) Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité; Paris, 1re ed. 1852; 2e ed. 1866.

[5]) De Saint-Venant, Mémoires des savants étrangers. XIV; 1856.

[6]) Kirchhoff, Crelle's Journal, XL und LVI; 1850 und 1859.

[7]) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper; Leipzig 1862.

[8]) Beer, Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität; Leipzig 1869.

[9]) Phillips, C. R., LVI; 1863; und Annales des mines, (6), XV; 1869.

der Reihe nach den Gegenstand vom theoretischen Gesichtspunkt aus behandelt, indem sie sich hierbei der Hülfsmittel der höchsten Mathematik bedienten. Andererseits wandten Hooke[1]), S'Gravesande[2]), Coulomb[3]), Young[4]), Savart[5]), W. Weber[6]), Regnault[7]), Wertheim[8]), Kirchhoff[9]), und Cornu[10]) bei dem experimentellen Studium der Elasticität immer genauere und feinere Methoden an. Wir sprechen hier nicht von den Gelehrten, welche durch Untersuchungen anderer Art dazu geführt wurden, sich indirect mit einer Frage zu beschäftigen, die thatsächlich alle Zweige der Physik berührt und auf die wir daher mehr als einmal im weiteren Verlaufe dieses Buches zurückkommen müssen.

Obgleich es streng genommen keine Kraft giebt, die bei ihrer Wirkung auf irgend einen natürlichen Körper nicht auch eine bleibende Deformation hinterlässt, so ist doch ein fester Körper als vollkommen elastisch für äussere Kräfte von hinreichend geringer Stärke und kurzer Wirkungsdauer anzusehen. Er gehorcht alsdann den beiden folgenden Gesetzen, die, von Hooke[11]) auf experimentellem Wege gefunden, eigentlich nur die nothwendigen Folgen der Continuität sind:

1. Die Änderung der Form ist proportional der äusseren Kraft, oder anders ausgedrückt, die elastische Kraft ist der Deformation proportional.[12])

2. Die Änderung der Form bleibt bis auf das Zeichen dieselbe, wenn man die Richtung der Kraft ändert oder den Zug durch Druck ersetzt und Torsion und Biegung im entgegengesetzten Sinne wirken lässt.

Wir betrachten zuerst theoretisch die Gleichgewichtsbedingungen vollkommen elastischer Körper und besprechen darauf die hauptsächlichsten Experimente, die angestellt sind, theils um die Theorie zu beweisen, theils um der Praxis nützliche Hülfsmittel zu liefern.

---

[1]) Hooke, Philosophical tracts and collections; London 1678.
[2]) S'Gravesande, Physices elementa mathematica; Lugd. Bat. 1720—21.
[3]) Coulomb, Mémoires de l'Académie des sciences; 1784.
[4]) Young, Course of lectures on natural philosophy; London 1807.
[5]) Savart, Ann. de chim. et de phys. (2) XL, XLI und LXV; 1829—37.
[6]) W. Weber, Pogg. Ann., XXXIV und LIV; 1835 und 1841.
[7]) Regnault, Mémoires de l'Académie des sciences, XXI; 1847.
[8]) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3), XII, XIX, XXIII und L; 1844—57.
[9]) Kirchhoff, Pogg. Ann., CVIII; 1859.
[10]) Cornu, C. R., LXIX; 1869.
[11]) Hooke, loc. cit.
[12]) Durch dieses Gesetz, welches Hooke durch die berühmte Formel, *ut tensio sic vis (tensio* für *extensio)*, ausdrückte und welches er zuerst unter dem Anagramm *ceiiinosssttuu* veröffentlichte, hatte er ein Mittel gefunden, um die Uhren zu reguliren.

I. Theorie.

A. Allgemeine Gleichungen.

136. Elastische Kraft. — Wenn auf einen festen Körper, der sich im Gleichgewicht befindet, eine äussere Kraft zu wirken beginnt, so ändert sich die Entfernung zweier Molecüle m und m': deshalb entsteht zwischen ihnen eine abstossende oder anziehende Kraft, wenn ihre Entfernung mm' sehr klein ist. Denn es hört überhaupt jeder Zusammenhang zwischen zwei Theilen desselben Körpers auf, wenn sie durch eine wahrnehmbare Entfernung von einander getrennt sind. In einem festen, leicht zu deformirenden Körper, der einer äusseren Kraft unterworfen wird, denken wir uns durch den Punkt M eine Ebene P gelegt, die den Körper in die beiden Stücke A und B theilt: wenn hierdurch die Einwirkung von A auf B aufgehoben ist, wird offenbar das Gleichgewicht von B zerstört. „Aber es ist klar, dass dieses Gleichgewicht erhalten werden kann, wenn man gleichzeitig an jedem Element ϖ der Schnittebene eine Kraft von passender Stärke und Richtung anbringt. Diese Kraft ϖE ist genau die elastische Kraft, die von A auf B ausgeübt wird und die auf das ebene Element ϖ bezogen ist, worin M liegt“ (Lamé). Die so definirte elastische Kraft ist analog der Spannung in jedem Theile eines Fadens, der sich im Gleichgewicht befindet, oder vielmehr die Spannung des Fadens ist nur ein besonderer Fall der elastischen Kraft.

Die elastische Kraft ϖE wird im allgemeinen gegen das ebene Element ϖ schief gerichtet sein. Wir nennen ϖX, ϖY und ϖZ die drei auf einander rechtwinklig stehenden Componenten von ϖE, welche den drei Coordinatenachsen parallel sind.

137. Gleichgewicht des elementaren Parallelepipeds.[1]) Wir denken uns im Punkte $A\ (x, y, z)$ eines festen Körpers ein unendlich kleines Parallelepiped $dx\,dy\,dz$. Dasselbe muss unter der Wirkung der elastischen Kräfte, die auf seine sechs Seiten, und der Kräfte, welche von aussen auf seine Masse $\varrho\,dx\,dy\,dz$ wirken, im Gleichgewicht sein. Es mögen in A die Grössen $\varpi_1 X_1$, $\varpi_1 Y_1$, $\varpi_1 Z_1$ oder $dy\,dz\,X_1$, $dy\,dz\,Y_1$, $dy\,dz\,Z_1$ die Componenten der elastischen Kraft darstellen, die auf das zur x-Achse senkrechte Flächenelement $\varpi_1 = dy\,dz$ wirken. Wir rechnen als

---

[1]) Siehe Lamé, loc. cit., p. 14.

positiv den Zug, der im Sinne der positiven Coordinatenachse wirkt und denken uns, dass A im Coordinatenanfangspunkt liegt. Die Componenten der elastischen Kraft, welche von dem Theil des

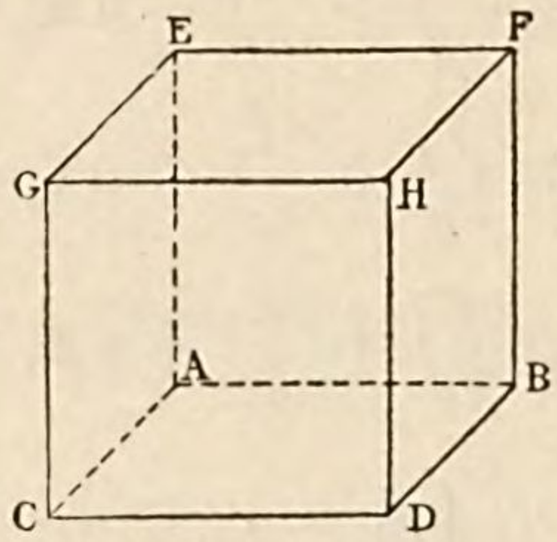


Fig. 204.

Körpers, der links von der Fläche $ACGE$ liegt, auf denjenigen ausgeübt wird, der rechts davon gelegen ist, sind alsdann

$$-dy\,dz\,X_1, \qquad -dy\,dz\,Y_1, \qquad -dy\,dz\,Z_1.$$

An der Fläche $BDHF$ hat die elastische Kraft die Componenten

$$+dy\,dz\left(X_1+\frac{\partial X_1}{\partial x}dx\right), \quad +dy\,dz\left(Y_1+\frac{\partial Y_1}{\partial x}dx\right), \quad +dy\,dz\left(Z_1+\frac{\partial Z_1}{\partial x}dx\right);$$

und die Summe je zweier Componenten, die auf die Flächen $ACGE$ und $BDHF$ wirken, reducirt sich auf

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial X_1}{\partial x}, \qquad dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Y_1}{\partial x}, \qquad dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Z_1}{\partial x}.$$

Ebenso ergeben sich für die Flächen $ABEF$ und $CDGH$, sowie für $ABCD$ und $EFGH$ die Componenten

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial X_2}{\partial y}, \qquad dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Y_2}{\partial y}, \qquad dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Z_2}{\partial y};$$

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial X_3}{\partial z}, \qquad dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Y_3}{\partial z}, \qquad dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Z_3}{\partial z}.$$

Die äusseren Kräfte, die auf das Parallelepiped wirken, liefern gleichfalls drei Componenten, welche hier folgen:

$$\varrho\,dx\,dy\,dz\,X_0, \qquad \varrho\,dx\,dy\,dz\,Y_0, \qquad \varrho\,dx\,dy\,dz\,Z_0.$$

Die sechs Gleichungen für das Gleichgewicht des Parallelepipeds sind demnach

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} + \varrho X_0 = 0, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} + \varrho Y_0 = 0, \\ \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z} + \varrho Z_0 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2 = Y_3, \text{[1]} \\ X_3 = Z_1, \\ Y_1 = X_2. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit N_1, N_2, N_3 die Componenten X_1, Y_2, Z_3, die bezw. auf den Flächen $ACGE$ und $BDHF$, $ABEF$ und $CDGH$, $ABCD$ und $EFGH$ senkrecht stehen, und es seien ferner T_1, T_2, T_3 die tangentialen Componenten, von denen je zwei einander gleich sind, also

$$\begin{aligned} T_1 &= Z_2 = Y_3, \\ T_2 &= X_3 = Z_1, \\ T_3 &= Y_1 = X_2. \end{aligned}$$

Nachdem von den neuen Componenten in den Gleichungen für

---

[1]) Es ist leicht ersichtlich, dass in der Gleichung für die Momente bezogen auf eine Achse, die parallel zur x-Achse durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds verläuft, nur die Componenten

$$-dz\,dx\,Z_2, \quad +dz\,dx\left(Z_2 + \frac{\partial Z_2}{\partial y}\,dy\right); \quad -dx\,dy\,Y_3, \quad +dx\,dy\left(Y_3 + \frac{\partial Y_3}{\partial z}\,dz\right)$$

vorkommmen, welche tangential zu den Flächen $ABEF$, $CDGH$, $ABCD$, $EFGH$ in einer zur Achse senkrechten Ebene wirken und welche zwei Kräftepaare von entgegengesetztem Zeichen bilden

$$\frac{dx\,dy\,dz\,Z_2}{2}, \qquad \frac{dx\,dy\,dz\,Y_3}{2},$$

wenn man die unendlich kleinen Grössen vierter Ordnung vernachlässigt, so dass die Gleichung der Momente, bezogen auf diese Achse, sich auf die Gleichheit der beiden Kräftepaare reducirt, also

$$Z_2 = Y_3.$$

die Bedingungen des Gleichgewichts drei eliminirt sind, erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} + \varrho X_0 = 0, \\ \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} + \varrho Y_0 = 0, \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} + \varrho Z_0 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Diese Gleichungen drücken offenbar auch die Bedingungen für das Gleichgewicht jedes begrenzten Körperstücks aus, das sich in elementare Parallelepipede zerlegen lässt, deren Flächen zu den Coordinatenachsen senkrecht stehen. Aber im allgemeinen lässt eine solche Zerlegung noch Stücke von Tetraederform übrig, deren Gleichgewichtsbedingungen für sich bestimmt werden müssen.[1])

138. Gleichgewicht des elementaren Tetraeders. — Betrachten wir mit Cauchy ein elementares Tetraeder, das seine Spitze in M hat. Von M gehen drei Kanten aus, die den drei Coordinatenachsen parallel sind und von einem Dreieck mit dem Flächeninhalt ϖ als Basis des Tetraeders begrenzt werden. Es seien m, n, p die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Basis mit den Coordinatenachsen einschliesst, also

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1;$$

ferner seien a, b, c die Flächeninhalte der drei rechtwinkligen Dreiecke, welche die Seitenflächen des Tetraeders bilden

$$a = m\varpi, \qquad b = n\varpi, \qquad c = p\varpi.$$

„Da das Tetraeder sich unter dem Einfluss der elastischen Kräfte, welche auf seine vier Seitenflächen wirken, und demjenigen der äusseren Kräfte im Gleichgewicht befinden muss, so muss die Summe der Componenten, gebildet nach jeder Coordinatenachse, Null sein. Für die Summe der Componenten, die der x-Achse parallel sind,

---

[1]) Diese Tetraeder würden nur dann zu vernachlässigen sein, wenn die Orientirung der Oberflächenelemente ohne Einfluss wäre, wenn sich also der Druck nach allen Richtungen gleichmässig in der Masse fortpflanzte. Aber eine solche Fortpflanzung des Druckes, die für die Flüssigkeiten charakteristisch ist, findet bei den festen Körpern nicht statt.

liefert die geneigte Fläche den Term ϖX, die Fläche a den Term $-m\varpi N_1$, die Fläche b den Term $-\varpi T_3$ und die Fläche c den Term $-p\varpi T_2$; die äusseren Kräfte geben den Term ϱX_0 multiplicirt mit dem Volumen des Tetraeders, einer unendlich kleinen Grösse dritter Ordnung: diese fünfte Grösse verschwindert also gegen die vier übrigen, die unendlich klein von der zweiten Ordnung sind.“ Man erhält auf diese Weise die erste der folgenden Gleichungen, die beiden anderen findet man auf ähnliche Art, indem man sowohl die zur y-Achse parallelen Componenten, als auch die zur z-Achse parallelen jede für sich addirt,

$$\begin{cases} X = mN_1 + nT_3 + pT_2, \\ Y = mT_3 + nN_2 + pT_1, \\ Z = mT_2 + nT_1 + pN_3. \end{cases} \qquad (2)$$

139. Gleichgewicht eines begrenzten Stücks. — Wenn man von den Gleichungen für die Momente des Tretraeders absieht (die nichts neues geben), so bilden die sechs Gleichungen (1) und (2) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht eines begrenzten Stücks von beliebiger Form, welches wir uns mitten aus einem festen Körper herausgeschnitten denken. Es sei Ω dieses begrenzte Stück, ϖ ein Element seiner Oberfläche; ϖX, ϖY, ϖZ die Componenten der elastischen Kraft, die auf das ebene Element ϖ wirken; $\varrho\omega$ ein Element seiner Masse; $\varrho\omega X_0$, $\varrho\omega Y_0$, $\varrho\omega Z_0$ die Componenten der äusseren Kräfte, welche die Masse $\varrho\omega$ beeinflussen; alsdann sind die sechs Gleichungen für die Bedingung des Gleichgewichts von Ω:

$$\begin{cases} \Sigma\varpi X + \Sigma\varrho\omega X_0 = 0, \\ \Sigma\varpi Y + \Sigma\varrho\omega Y_0 = 0, \\ \Sigma\varpi Z + \Sigma\varrho\omega Z_0 = 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \Sigma\varpi (zY - yZ) + \Sigma\varrho\omega (zY_0 - yZ_0) = 0, \\ \Sigma\varpi (xZ - zX) + \Sigma\varrho\omega (xZ_0 - zX) = 0, \\ \Sigma\varpi (yX - xY) + \Sigma\varrho\omega (yX_0 - xY_0) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht aus den Gleichungen (1) und (2) ableiten.

Multipliciren wir nämlich die erste der Gleichungen (1) mit $dx\,dy\,dz$ und integriren sie über den ganzen Bereich von Ω, so erhalten wir

$$\iiint \frac{\partial N_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \iiint \frac{\partial T_3}{\partial y}\,dy\,dz\,dx + \iiint \frac{\partial T_2}{\partial z}\,dz\,dx\,dy + \iiint \varrho X_0\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Das dreifache Integral, welches N_1 enthält, kann man nach x integriren und man erthält

$$\iiint \frac{\partial N_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint N_1\, dy\, dz = \Sigma \varpi N_1 \cos \alpha.$$

Hier ist ϖ ein Element der Oberfläche von Ω, α der Winkel, welchen die äussere Normale von ϖ mit der x-Achse bildet; für N_1 setzt man den Werth ein, welchen diese Function an der Stelle jenes Elements annimmt, und Σ erstreckt sich über die ganze Oberfläche. Ebenso kann man das zweite und dritte Integral auf eine Summe zurückführen. Das vierte lässt sich auch als $\Sigma \varrho \omega X_0$ schreiben, wo $\varrho \omega$ die Masse des Elements $dx\, dy\, dz$ bezeichnet und Σ sich über die ganze Masse von ω erstreckt. Die Summe der vier Integrale geht deshalb über in

$$\Sigma \varpi \,(N_1 \cos \alpha + T_3 \cos \beta + T_2 \cos \gamma) + \Sigma \varrho \omega X_0 = 0,$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach der ersten der Gleichungen (2) der Ausdruck in der Klammer nichts anderes als X darstellt,

$$\Sigma \varpi X + \Sigma \varrho \omega X_0 = 0.$$

Dies ist aber die erste der Gleichungen (3): die beiden anderen erhält man ebenso.

Multipliciren wir ferner die zweite der Gleichungen (1) mit z, ziehen von ihr die dritte der Gleichungen (1) ab, welche vorher mit y multiplicirt ist, und verfahren wie oben, so finden wir

$$\Sigma \varpi \left\{(zT_3 - yT_2) \cos \alpha + (zN_2 - yT_1) \cos \beta + (zT_1 - yN_3) \cos \gamma\right\} + \Sigma \varrho \omega\, (zY_0 - yZ_0) = 0,$$

oder

$$\Sigma \varpi \left\{z\,(T_3 \cos \alpha + N_2 \cos \beta + T_1 \cos \gamma) - y\,(T_2 \cos \alpha + T_1 \cos \beta + N_3 \cos \gamma)\right\} + \Sigma \varrho \omega\, (zY_0 - yZ_0) = 0,$$

oder, wenn man die Beziehungen (2) berücksichtigt,

$$\Sigma \varpi\, (zY - yZ) + \Sigma \varrho \omega\, (zY_0 - yZ_0) = 0.$$

Dies ist die erste der Gleichungen (4); auf analoge Weise erhält man die beiden anderen.

Die Gleichungen (1) und (2) reichen also aus, um das elastische Gleichgewicht für ein beliebiges Stück Ω eines festen Körpers zu bestimmen.

140. Elasticitäts-Ellipsoid.[1]) — „Die Gleichungen, welche aus der Bedingung für das Gleichgewicht des elementaren Tetraeders abgeleitet sind, spielen eine zweifache Rolle: sie liefern die Gleichungen für die Oberfläche, wie wir soeben gesehen haben; ausserdem geben sie an, auf welche Weise die elastischen Kräfte in einem Punkte der Mitte sich ändern.“ Diese letzte Eigenschaft wollen wir jetzt herleiten, um daraus wichtige Folgerungen zu ziehen.

Denken wir uns im Punkte M ein unendlich kleines Tetraeder, dessen Spitze in M liegt und dessen Kanten den drei Coordinatenachsen parallel sind: bezeichnen wir, wie vorher, mit ϖ den Flächeninhalt der dreieckigen Seitenfläche, welche der Ecke M gegenüber liegt und mit m, n, p die Cosinus der Winkel, welche die Normale dieser Seitenfläche mit den Achsen der x, y und z einschliesst. Durch den Punkt M ziehen wir eine Linie, die der Länge und Richtung nach die auf die Basis ϖ wirkende elastische Kraft darstellt; es seien ferner x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Endpunktes jener Linie, alsdann folgt offenbar aus den Gleichungen (2)

$$\begin{cases} x_1 = mN_1 + nT_3 + pT_2, \\ y_1 = mT_3 + nN_2 + pT_1, \\ z_1 = mT_2 + nT_1 + pN_3. \end{cases} \qquad (2^a)$$

Betrachten wir nun die elastischen Kräfte F_1, F_2, F_3, welche auf die drei übrigen Seitenflächen des Tetraeders wirken und deren Componenten N_1, T_3, T_2; T_3, N_2, T_1; T_2, T_1, N_3 sind. Wir wählen die Richtungen der drei Kräfte F_1, F_2, F_3 als Achsen eines schiefwinkligen Coordinatensystems. Alsdann sind die Richtungscosinus, welche die Kraft F_1 oder die Achse der x' mit den alten Achsen bildet, $\frac{N_1}{F_1}$, $\frac{T_3}{F_1}$, $\frac{T_2}{F_1}$, und ebenso hat man für die Cosinus der Winkel zwischen der y'-Achse, bezw. der z'-Achse und den ursprünglichen Coordinatenachsen $\frac{T_3}{F_2}$, $\frac{N_2}{F_2}$, $\frac{T_1}{F_2}$ und $\frac{T_2}{F_3}$, $\frac{T_1}{F_3}$, $\frac{N_3}{F_3}$. Hieraus ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehungen zwischen den alten und neuen Coordinaten:

$$x_1 = \frac{N_1 x'_1}{F_1} + \frac{T_3 y'_1}{F_2} + \frac{T_2 z'_1}{F_3},$$

$$y_1 = \frac{T_3 x'_1}{F_1} + \frac{N_2 y'_1}{F_2} + \frac{T_1 z'_1}{F_3},$$

$$z_1 = \frac{T_2 x'_1}{F_1} + \frac{T_1 y'_1}{F_2} + \frac{N_3 z'_1}{F_3}.$$

---

[1]) Siehe Lamé, loc. cit. p. 53.

Die Vergleichung dieser Werthe für x_1, y_1, z_1 mit denen, welche wir vorher erhalten haben, giebt uns

$$\frac{x'_1}{F_1} = m, \quad \frac{y'_1}{F_2} = n, \quad \frac{z'_1}{F_3} = p.$$

Da aber

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1,$$

so ist auch

$$\frac{x'^2_1}{F_1^2} + \frac{y'^2_1}{F_2^2} + \frac{z'^2_1}{F_3^2} = 1. \qquad (5)$$

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoids, bezogen auf drei conjugirte Durchmesser als Coordinatenachsen. „Der Ort für die Endpunkte der Strecken, die der Grösse und Richtung nach die elastischen Kräfte darstellen, welche auf alle durch den Punkt M gehenden ebenen Elemente wirken, ist daher die Oberfläche eines Ellipsoids, dessen Mittelpunkt in M liegt, und die drei elastischen Kräfte, welche auf drei beliebige auf einander senkrecht stehende ebene Elemente wirken, sind drei conjugirte Durchmesser dieser Fläche, welche man das *Elasticitäts-Ellipsoid* nennt."

Setzen wir voraus, dass die drei conjugirten Durchmesser, auf welche die Gleichung (5) der Fläche bezogen ist, die Achsen des Ellipsoids sind, so sind die Achsen der x', y', z' auch rechtwinklig zu einander, wie es bei den Achsen der x, y, z der Fall ist, und die neuen Richtungscosinus, welche die Achsen der beiden Systeme mit einander bilden, genügen den folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{N_1^2}{F_1^2} + \frac{T_3^2}{F_2^2} + \frac{T_2^2}{F_3^2} = 1, \\ \frac{T_3^2}{F_1^2} + \frac{N_2^2}{F_2^2} + \frac{T_1^2}{F_3^2} = 1, \\ \frac{T_2^2}{F_1^2} + \frac{T_1^2}{F_2^2} + \frac{N_3^2}{F_3^2} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{N_1^2}{F_1^2} + \frac{T_3^2}{F_1^2} + \frac{T_2^2}{F_1^2} = 1, \\ \frac{T_3^2}{F_2^2} + \frac{N_2^2}{F_2^2} + \frac{T_1^2}{F_2^2} = 1, \\ \frac{T_2^2}{F_3^2} + \frac{T_1^2}{F_3^2} + \frac{N_3^2}{F_3^2} = 1. \end{cases}$$

Eliminirt man hieraus die Grössen N_1, N_2, N_3, so folgt

$$\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right) T_3^2 + \left(\frac{1}{F_3^2} - \frac{1}{F_1^2}\right) T_2^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{F_3^2} - \frac{1}{F_2^2}\right) T_1^2 + \left(\frac{1}{F_1^1} - \frac{1}{F_2^2}\right) T_3^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_3^2}\right) T_2^2 + \left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_3^2}\right) T_1^2 = 0.$$

Über das Grössenverhältniss der Achsen F_1, F_2, F_3 machen wir die Annahme, dass

$$F_1 > F_2 > F_3.$$

Aus der ersten der vorhergehenden Gleichungen folgt sodann, dass $T_3 = 0$ und $T_2 = 0$ und aus den beiden letzten, dass auch $T_1 = 0$.

Die Bedingungen dafür, dass die beiden Coordinatensysteme rechtwinklige sind, ergeben alsdann

$$F_1 = N_1, \quad F_2 = N_2, \quad F_3 = N_3,$$

d. h. die elastischen Kräfte F_1, F_2, F_3, welche den Achsen des Ellipsoids parallel sind, stehen auf den entsprechenden ebenen Flächenelementen, auf die sie wirken, senkrecht. „Es giebt folglich für jeden Punkt eines festen Körpers drei auf einander senkrecht stehende Ebenen, auf welche die elastische Kraft in normaler Richtung wirkt. Es sind dies die Hauptschnitte des Elasticitäts-Ellipsoids, und die drei normalen elastischen Kräfte oder die Hauptspannungen bilden die Achsen des Ellipsoids."

Sind A, B, C die elastischen Hauptkräfte im Punkte M, welche wir als bekannt voraussetzen, so ist die Gleichung des Elasticitäts-Ellipsoids, bezogen auf seine Achsen:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \tag{6}$$

und wir haben

$$N_1 = A, \quad N_2 = B, \quad N_3 = C; \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0.$$

Die Gleichungen (2^a) geben alsdann

$$m = \frac{x_1}{A}, \quad n = \frac{y_1}{B}, \quad p = \frac{z_1}{C},$$

und die Gleichung der Ebene ϖ lautet

$$\frac{x_1 x}{A} + \frac{y_1 y}{B} + \frac{z_1 z}{C} = 0;$$

sie ist der Tangentialebene parallel, welche die Fläche

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \pm K^2 \tag{7}$$

in demjenigen Punkte berührt, wo sie von dem Durchmesser D, welcher das Ellipsoid in x_1, y_1, z_1 schneidet, getroffen wird. K^2 ist hier eine positive Zahl.

„Wenn die drei elastischen Hauptkräfte dasselbe Vorzeichen haben, d. h. wenn sie entweder alle drei Zugkräfte oder alle drei Druckkräfte sind, so ist die Fläche (7) ein dem Elasticitäts-Ellipsoid confocales Ellipsoid, dessen Achsen den Quadratwurzeln der elastischen Hauptkräften proportional sind; jeder Halbmesser D_1 des Ellipsoids stellt eine Kraft dar, die gleiches Vorzeichen mit den elastischen Hauptkräften besitzt. Wenn diese aber verschiedenes Vorzeichen haben, so besteht die Fläche (7) aus dem einschaligen und zweischaligen Hyperboloid, welche den Asymptotenkegel

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0 \qquad (8)$$

gemeinsam haben. Wenn hier der Durchmesser D_1 das einschalige Hyperboid trifft, so stellt es eine elastische Kraft dar, die unter den elastischen Hauptkräften zweimal vorhanden ist; schneidet er das zweischalige Hyperboloid, so stellt er eine elastische Kraft dar, deren Werth nur einmal vorkommt. Diese beiden Fälle gehen auf dem Kegel (8) in einander über: jeder Durchmesser D_1, der auf diesem Kegel liegt, stellt eine tangentiale elastische Kraft dar; sie wirkt auf die Tangentialebene, welche längst der Erzeugenden D_1 den Kegel berührt. Hiervon rührt der Name *„Kegel der tangentialen elastischen Kräfte“* oder einfacher *„Berührungskegel“* her, welchen man der Fläche (8) gegeben hat.“

Damit haben wir die Gesetze abgeleitet, nach welchen die elastischen Kräfte in einem Punkte eines festen Mediums wirken. Sie sind durchaus allgemein gültig. Denn die Gleichungen (2), woraus sie folgten, setzen weder Homogenität noch sonst irgend eine Beschränkung voraus. Sie sind unabhängig von der Natur der molecularen Wirkungen, weil wir sie, was wohl zu bemerken ist, aufstellen konnten, ohne die Deformation des Mediums zu berücksichtigen.

B. Elastische Kräfte, die aus der Deformation hervorgehen.

141. Deformation eines isotropen Mediums. — Wie diese Deformation wirklich entsteht, die allein das Vorhandensein und die Änderungen der inneren Kräfte erklären kann, damit wollen wir uns jetzt beschäftigen. Wir beschränken uns jedoch

hierbei auf die isotropen Medien und sehen von den thermischen Erscheinungen ab, welche eine genaue Theorie nothwendigerweise berücksichtigen müsste. Wir können alsdann in diesem besonderen Falle die Werthe von N und T als Function der molecularen Verschiebung erhalten und aus den Elasticitätsgleichungen die Gesetze dieser Verschiebung selbst ableiten.

Betrachten wir zu diesem Zwecke bei einem rechtwinkligen Parallelepiped $ABCDEFGH$ der Reihe nach die Deformationen der Kanten und Winkel.

142. I. Deformation der Kanten. — Nehmen wir zuerst an, dass normal zu den beiden Seitenflächen $ACGE$ und $BDHF$ des Parallelepipeds zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Zugkräfte wirken. Die Kanten, welche der Richtung des Zuges parallel

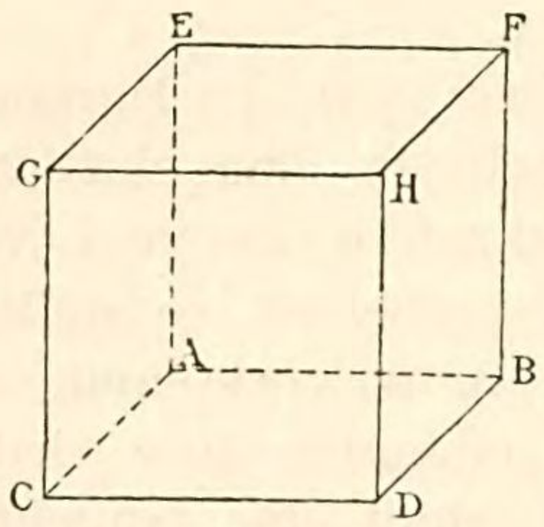


Fig. 205.

sind, verlängern sich, diejenigen, welche senkrecht darauf stehen, werden verkürzt. Die Verlängerung einer Kante AB, die der Zugrichtung parallel läuft, ist proportional der Länge L dieser Kante und dem spannenden Gewicht Π, umgekehrt proportional dagegen dem Querschnitt $ACGE$ oder S und einem gewissen Coefficienten E, welchen man den Elasticitäts-Coefficienten des Stoffes nennt:[1])

$$l = \frac{\Pi L}{\mathrm{E}S}. \qquad (9)$$

Dass die Verlängerung der Länge proportional ist, leuchtet a priori ein.

Dasselbe gilt für die Abhängigkeit von dem Querschnitt, sobald man zugiebt, dass die Verlängerung dem spannenden Gewicht proportional ist: denn den Querschnitt verdoppeln, heisst soviel als zwei Stäbe vom Querschnitt 1, von denen jeder das Gewicht $\frac{\Pi}{2}$

---

[1]) Man nennt ihn zuweilen auch den Young'schen Modul.

trägt, so zusammenfassen, dass sie nur einen einzigen Stab bilden. Dies ändert offenbar nichts an ihrem Verhalten.

Der Natur des Stoffes muss nothwendigerweise durch einen besonderen Coefficienten Rechnung getragen werden. Wenn man diesem die Form giebt, unter welcher wir ihn in die Formel eingeführt haben, so stellt er ein *Gewicht* vor. Setzen wir nämlich $S = 1$ und $l = L$, so wird $E = \Pi$: der Elasticitäts-Coefficient E ist also das Gewicht, welches man an das Ende eines Stabes von dem Querschnitt 1 hängen müsste, um ihn um seine eigene Länge zu dehnen, vorausgesetzt, dass eine solche Verlängerung nach denselben Gesetzen stattfände, wie diejenigen, bei welchen die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird.[1])

Was den Einfluss des spannenden Gewichts anbetrifft, so folgt dieser aus dem folgenden allgemeinen Princip, welches man immer in der Physik anwendet:

Wenn eine veränderliche Grösse um einen hinreichend kleinen Betrag wächst, so erhält jede stetige Function derselben einen Zuwachs, welcher der Veränderlichen selbst proportional ist (erstes Glied der Taylorschen Reihe).

Die Verlängerung ist eine Function des Gewichts und der Natur der Sache nach eine stetige Function: l ist also nothwendig dem Gewichte Π bis zu einer gewissen Grenze proportional. Es ist Sache der Erfahrung, die Grenze zu bestimmen, bis zu welcher diese Proportionalität besteht; sie ist gewöhnlich ziemlich weit, da l sehr langsam mit Π wächst. Wir lassen also vorläufig die Proportionalität gelten.

Wenn wir in Folge dessen mit α die Verlängerung $\frac{l}{L}$ der Längeneinheit oder die *relative Verlängerung* der Kante AB bezeichnen, ferner mit P den Zug $\frac{\Pi}{S}$, welcher auf die Flächeneinheit

---

[1]) Man definirt den Elasticitäts-Coefficienten oft in anderer Weise: man setzt ihn gleich der Verlängerung l_1, welche ein Stab von der Länge 1 unter derjenigen Belastung erfährt, die gleich seinem Eigengewicht ist. Wenn wir die Dichte des Körpers D nennen, so ist SD diese Belastung, und nach der allgemeinen Formel hat man

$$l_1 = \frac{SD}{ES},$$

folglich

$$l_1 E = D.$$

Die beiden Coefficienten sind also reciprok: ihr Product ist gleich der Dichte des betreffenden Körpers.

wirkt, so haben wir

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{E}} P.$$

Ebenso ist *die relative Verkürzung* β der Kanten AC und AE

$$\beta = \frac{\sigma}{\mathrm{E}} P,$$

wo σ ein Coefficient *(Poisson'scher Coefficient)* ist, der die Beziehung zwischen der Verkürzung der Längeneinheit in dem transversalen Querschnitt zur Verlängerung der Längeneinheit in der Zugrichtung ausdrückt.

Ein Zug Q, der normal auf die Flächeneinheit der gegenüberliegenden Seitenflächen $ABEF$ und $CDGH$ ausgeübt wird, erzeugt eine relative Verlängerung α' der Kante AC und eine relative Verkürzung β' der Kanten AE und AB, und man hat

$$\alpha' = \frac{1}{\mathrm{E}} Q,$$

$$\beta' = \frac{\sigma}{\mathrm{E}} Q.$$

Zuletzt erzeugt der Zug R, der nur auf die Flächeneinheit der Seitenflächen $ABCD$ und $EFGH$ wirkt, eine Verlängerung α'' der Kante AE und eine Verkürzung β'' der Kanten AB und AC, welche sich durch folgende Gleichungen ausdrücken lassen:

$$\alpha'' = \frac{1}{\mathrm{E}} R,$$

$$\beta'' = \frac{\sigma}{\mathrm{E}} R.$$

Treten die drei Systeme von Zugkräften gleichzeitig auf, so superponiren sich ihre Wirkungen und wenn man mit ε, ε', ε'' die entsprechenden Änderungen der Kanten AB, AC, AE bezeichnet, so erhält man

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{E}} \left(P - \sigma (Q + R)\right),$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{\mathrm{E}} \left(Q - \sigma (R + P)\right),$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{\mathrm{E}} \left(R - \sigma (P + Q)\right).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{cases} P = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon, \\ Q = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon', \\ R = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon'', \end{cases} \tag{10}$$

wenn man nach Lamé die folgenden Bezeichnungen einführt:

$$\Theta = \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' \tag{11}$$

und

$$\lambda = \frac{E\sigma}{1 - \sigma - 2\sigma^2}, \tag{a}$$

$$2\mu = \frac{E(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma - 2\sigma^2} = \frac{E}{1 + \sigma}. \tag{b}$$

Θ ist der kubische Ausdehnungs-Coefficient: denn wegen der geringen Grösse der elastischen Deformationen ist die Änderung der Volumeneinheit gleich der Summe der Längenänderungen der drei Kanten, und die Gleichung

$$1 + \Theta = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')(1 + \varepsilon'')$$

reducirt sich auf

$$\Theta = \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''.$$

Die Coefficienten λ und μ sind die beiden *Constitutionsconstanten* für das Mittel, mittelst deren man, wie wir sehen werden, alle Coefficienten der Elasticitäts-Theorie ausdrücken kann. So hat man schon jetzt nach den Gleichungen, die λ und μ definiren,

$$E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \tag{12}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{13}$$

Die Gleichungen (10) sind von hervorragender Wichtigkeit; sie zeigen, dass der Zug oder der Druck, welcher normal auf eine Seitenfläche des Parallelepipeds wirkt, und mithin auch die normale elastische Rückwirkung des Parallelepipeds selbst, eine lineare Function der Längenänderungen ε, ε', ε'' ist, die nur zwei Parameter enthält: jeder normale Zug (oder Druck) ist also gleich der Summe zweier Terme, von denen der eine der kubischen und der andere der linearen Ausdehnung proportional ist, welche in der Richtung des Zuges erfolgt.

Bei den Flüssigkeiten ist der Druck nothwendigerweise auf jeder Seitenfläche des Parallelepipeds derselbe und einfach der kubischen Contraction proportional; das der linearen Änderung proportionale Glied verschwindet also: $\mu = 0$. Man kann demnach die Flüssigkeiten in derselben Theorie wie die festen Körper behandeln, wenn man nur festsetzt, dass bei den Flüssigkeiten

$$P = Q = R = \lambda\,\Theta.$$

Wenn die Gleichung $\mu = 0$ die flüssigen Körper charakterisirt, so ist es klar, dass wachsenden Werthen von μ Körper (**123**) entsprechen, die sich allmählich vom flüssigen Zustande entfernen, um sich mehr und mehr dem vollkommen festen Zustand zu nähern. Es kann also zwischen λ und μ keine allgemeine Beziehung geben, die von dem fraglichen Körper unabhängig ist: besonders braucht die Grösse σ nicht bei allen Körpern, welche man gewöhnlich als feste bezeichnet, dieselbe zu sein.[1])

Nach de Saint-Venant[2]) ist jedoch für jeden wirklich festen Körper $\lambda = \mu$ oder $\sigma = \frac{1}{4}$. Man gelangt nothwendig zu dieser Folgerung, „wenn man die Druckkräfte als Resultanten der molecularen Wirkungen betrachtet, mithin als stetige Functionen der Entfernungen sehr naher Molecüle, und wenn man voraussetzt, dass sie vor Eintritt der Deformationen Null sind.“ Die isotropen festen Körper würden alsdann nicht zwei verschiedene Parameter haben, sondern nur einen, wie es Navier und Poisson angenommen haben.

Die Gleichungen (10) lassen sich leicht in der Bezeichnungsweise der Differentialrechnung schreiben. Da das Parallelepiped nach Voraussetzung von unendlich kleinen Dimensionen ist, so werden, wenn die Coordinaten des Punktes A (x, y, z) bezw. um ξ, η, ζ wachsen, diejenigen des Punktes H $(x + dx, y + dy, z + dz)$ um $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ zunehmen: die Verlängerung längs AB wird für die Länge dx den Werth $d\xi$ erhalten, die relative

---

[1]) Damit λ positiv wird, muss σ, welches selbst nothwendigerweise positiv ist, $< \frac{1}{2}$ sein; man kann also nur als sicher annehmen, dass σ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen muss, wo der Werth $\frac{1}{2}$ nach Gleichung (13) dem Werthe $\mu = 0$ entspricht.

[2]) De Saint-Venant, C. R., LIII, 1107; 1861.

Verlängerung ist $\frac{d\xi}{dx}$; die relativen Verlängerungen längs AC und AE sind demgemäss $\frac{d\eta}{dy}$ und $\frac{d\zeta}{dz}$. Man hat folglich, wenn man für P, Q, R die normalen elastischen Kräfte N_1, N_2, N_3 (**137**) einführt,

$$\begin{cases} N_1 = \lambda\Theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}, \\ N_2 = \lambda\Theta + 2\mu\frac{d\eta}{dy}, \\ N_3 = \lambda\Theta + 2\mu\frac{d\zeta}{dz}, \end{cases} \tag{14}$$

wo für Θ oder für den kubischen Ausdehnungs-Coefficienten die Beziehung gilt:

$$\Theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}. \tag{15}$$

143. II. Deformation der Winkel.[1]) — Betrachten wir jetzt ein Kräftepaar P, das auf die Seitenflächen $ABCD$ und $EFGH$ parallel zu diesen Flächen und in der Richtung von AB wirkt. Dies sucht offenbar die Rechtecke $ABEF$ und $CDGH$ in schiefwinklige Parallelogramme zu transformiren, indem jede Linie, die auf den Grundflächen $ABCD$ und $EFGH$ senkrecht steht, um einen Winkel φ gedreht wird, den Clebsch den *Verschiebungswinkel* nennt, und indem jede zu den Grundflächen parallele Schicht in Folge dessen von einer tangentialen elastischen Kraft angegriffen wird, die der Grösse nach der Kraft P gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt ist. Wir können ausserdem, wie bei den linearen Deformationen,

$$\varphi = \frac{1}{K}P$$

setzen, wo K ein Proportionalitätsfactor ist, um dessen Bestimmung es sich jetzt handelt. Zu diesem Zweck betrachten wir einen Würfel aus der gegebenen Substanz, welcher an seiner oberen Seitenfläche befestigt ist und an dessen unterer Seitenfläche eine Zugkraft Q wirkt. Unter diesen Umständen wird der Würfel in ein Parallelepipedon verwandelt, indem die vertikalen Kanten L in $L\left(1+\frac{Q}{\mathrm{E}}\right)$ und die horizontalen Kanten in $L\left(1-\frac{\sigma Q}{\mathrm{E}}\right)$ übergehen, wo E stets den Elasticitäts-Coefficienten und σ das Verhältniss des

[1]) Siehe Clebsch, loc. cit.

Coefficienten der transversalen Contraction zum Coefficienten der longitudinalen Dilation bedeutet. Die zu der Zugrichtung parallelen Seitenflächen des Würfels, wie $MNPQ$, werden Parallelogramme $M_1N_1P_1Q$. Die Diagonalen M_1Q_1 und N_1P_1, welche vor der Wirkung

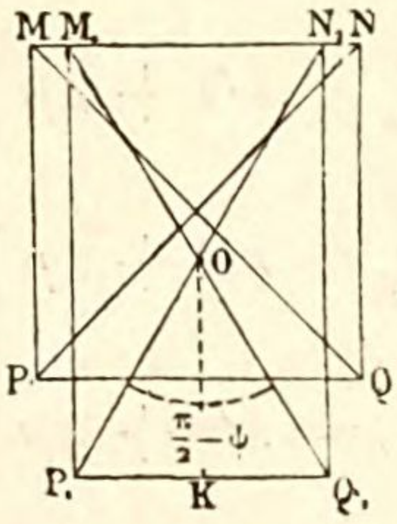


Fig. 206.

der Zugkraft auf einander senkrecht standen, schliessen jetzt einen Winkel $P_1OQ_1 = \frac{\pi}{2} - \psi$ ein, der leicht zu berechnen ist. Ziehen wir nämlich die Linie OK und betrachten alsdann das rechteckige Dreieck P_1OK, so folgt

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}} = \frac{P_1K}{OK} = \frac{\frac{L}{2}\left(1-\frac{\sigma Q}{E}\right)}{\frac{L}{2}\left(1-\frac{Q}{E}\right)}$$

oder, da $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ und ψ innerhalb der Grenzen, auf welche wir uns beschränken, immer sehr klein ist,

$$\frac{1-\frac{\psi}{2}}{1+\frac{\psi}{2}} = \frac{1-\frac{\sigma Q}{E}}{1+\frac{Q}{E}}$$

und mit Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung

$$\psi = \frac{1+\sigma}{E} Q.$$

Der auf diese Weise bestimmte Winkel ψ ist indessen genau der Verschiebungswinkel der Ebenen, welche man sich vor der Wirkung der Zugkraft in dem Würfel parallel zur Diagonale MQ und der entsprechenden auf der gegenüber liegenden Seitenfläche

gelegt denken kann. Im Anfang war die Parallele zur zweiten Diagonale NP, welche durch den Mittelpunkt des Würfels geht, zugleich die Normale für alle diese Ebenen und der Ort für die Mittelpunkte der Schnittflächen, welche sie mit dem Würfel bilden. Nach der Deformation liegen diese Mittelpunkte auch noch auf der Parallelen zu $N_1 P_1$, die durch den Mittelpunkt geht; aber diese Parallele bildet jetzt mit den Schnittebenen den Winkel $\frac{\pi}{2} - \psi$ oder mit der Normale zu dieser Ebene den Winkel ψ. Die Normale im Mittelpunkt der Schnittebenen, sowie alle anderen Normalen derselben sind also um den Winkel ψ gedreht; ψ ist daher der Verschiebungswinkel φ, der zu den betreffenden Ebenen gehört. In Folge dessen wirkt eine elastische Kraft P, die den Schnittebenen parallel ist, jetzt auf jede derselben in der Richtung $Q_1 O$ und zwar mit der Stärke

$$P = K\varphi = \frac{K(1+\sigma)}{\mathrm{E}} Q.$$

Diese Kraft P sucht jede Schicht in die ursprüngliche Lage zurückzuführen und hält der Componente der Zugkraft Q, welche den Ebenen der Schichten parallel ist, das Gleichgewicht. Die Zugkraft Q, die ihrerseits zu der vertikalen Kante des Würfels parallel ist, schliesst mit der Diagonalebene einen Winkel von 45^0 ein, ihre Projection auf diese Ebene ist also $Q \cos 45^0 = Q\sqrt{\frac{1}{2}}$. Da andererseits dieselbe Zugkraft mit der Intensität Q auf jede Flächeneinheit der Grundfläche wirkt, so muss die Intensität der zur Diagonalebene parallelen Componente, welche auf die Flächeneinheit dieser Diagonalebene bezogen ist, noch in dem Verhältniss von $1 : \sqrt{2}$ reducirt werden, weil der Flächeninhalt des Diagonalschnitts zu dem der Grundfläche im Verhältniss von $\sqrt{2} : 1$ steht. Die tangentiale Componente dieser Zugkraft, bezogen auf die Flächeneinheit der Ebenen, auf welche sie in tangentialer Richtung wirkt, ist folglich

$$Q\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{2},$$

und da dieser Kraft $\frac{Q}{2}$ durch die tangentiale elastische Kraft P genau das Gleichgewicht gehalten wird, so ist

$$P = \frac{Q}{2}$$

und man hat

$$\frac{Q}{2} = \frac{K(1+\sigma)}{\mathrm{E}} Q$$

oder

$$K = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\sigma)}$$

oder schliesslich nach Gleichung (b)

$$K = \mu.$$

Die tangentiale elastische Kraft, welche auf eine Ebene wirkt, deren Normale um den Winkel φ verschoben wird, ist also

$$P = \mu\varphi. \qquad (16)$$

144. Bestimmung der N und T. — Wir kommen nun auf das elementare Parallelepiped $ABCDEFGH$ zurück und be-

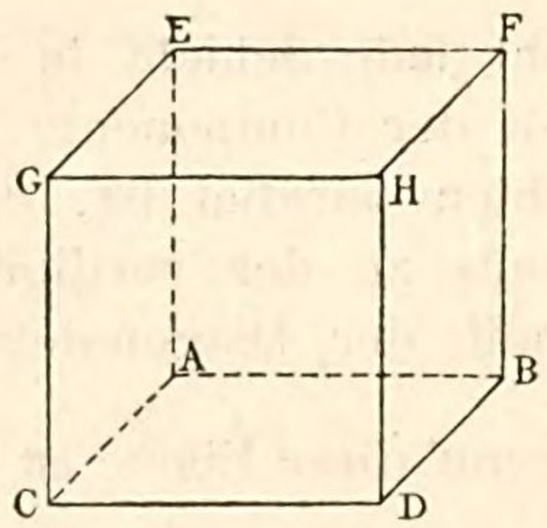


Fig. 207.

trachten die sechs tangentialen Kräftepaare Y_1, Z_1, X_2, Z_2, X_3, Y_3, welche zu je zwei zusammengefasst, wie z. B. Y_3 und Z_2, das Paralleleppiped im entgegengesetzten Sinne zu drehen trachten. Da dies sich aber nicht drehen darf, sondern im Gleichgewicht beharren muss, so müssen die Momente der Paare einander gleich sein, und daraus folgt, wie wir schon bemerkt haben, dass

$$Y_3 = Z_2 = T_1,$$
$$Z_1 = X_3 = T_2,$$
$$X_2 = Y_1 = T_3,$$

wo T_1, T_2, T_3, wie früher, die Intensitäten bedeuten, welche je zwei Kräfte Y_3 und Z_2, Z_1 und X_3, X_2 und Y_1 besitzen. Aber wenn alles im Gleichgewicht bleibt, so erzeugen die Kräftepaare Deformationen des Parallelepipeds, analog denjenigen, welche wir vorher bei den schiefen Querschnitten eines gedehnten

Würfels betrachtet haben. Wenn die Winkel des Parallelepipedon $C'A'E' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $B'A'E' = \frac{\pi}{2} - \chi$, $B'A'C' = \frac{\pi}{2} - \psi$ werden, so hat man

$$\begin{cases} T_1 = \mu\varphi,^{1}) \\ T_2 = \mu\chi, \\ T_3 = \mu\psi. \end{cases} \tag{17}$$

Man kann diese Kräfte auch als Functionen der molecularen Verschiebung darstellen. Zu diesem Zweck genügt es, die Richtungscosinus hinzuschreiben, welche die veränderten Kanten mit den Achsen bilden. Betrachten wir z. B. die Kante $A'B'$: die Coordinaten des Punktes A bezeichnen wir vor der Deformation mit x, y, z, diejenigen des Punktes B mit $x + dx, y, z$; nach der Deformation sind alsdann die Coordinaten des Punktes A

$$A' \qquad (x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta),$$

und diejenigen des Punktes B

$$B' \quad \left(x + dx + \xi + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx, \quad y + \eta + \frac{\partial\eta}{\partial x}dx, \quad z + \zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx\right).$$

Um die Richtungscosinus zu erhalten, welche $A'B'$ mit den Achsen bildet, dividiren wir die rechtwinkligen Projectionen dieser Linie, d. h. die Unterschiede der Coordinaten ihrer Endpunkte, durch die Länge der Linie, welche abgesehen von den unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung gleich $\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx$ ist. Wir finden auf diese Weise mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung

für	$A'B'$	$1,$	$\frac{\partial\eta}{\partial x},$	$\frac{\partial\zeta}{\partial x},$
	$A'C'$	$\frac{\partial\xi}{\partial y},$	$1,$	$\frac{\partial\zeta}{\partial y},$
	$A'E'$	$\frac{\partial\xi}{\partial z},$	$\frac{\partial\eta}{\partial z},$	$1,$

Die Cosinus der Linien $A'C'$ und $A'E'$ ergeben sich auf dieselbe Art.

---

[1]) Die Kraft T_1 wirkt, wenn wir sie an die Stelle von Z_2 setzen, in der Richtung AE tangential auf die Ebene $ABEF$; sie verwandelt daher den rechten Winkel, welchen die Normale AC dieser Ebene mit der Richtung der Kraft AE einschliesst, in einen spitzen Winkel $C'A'E' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Würden wir annehmen, dass T_1 die Kraft Y_3 darstellt, so würde derselbe Schluss gelten.

Hiernach ist der Cosinus des Winkels, welchen die beiden Kanten $A'C'$ und $A'E'$ mit einander einschliessen, unter Vernachlässigung der Grössen höherer Ordnung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}.$$

Da man nun aber wegen der geringen Grösse des Verschiebungswinkels $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ dem Winkel φ gleich setzen kann, so hat man

$$\varphi=\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

und ebenso

$$\chi=\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z},$$

$$\psi=\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Die tangentialen Componenten sind deshalb

$$\begin{cases} T_1=\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \\ T_2=\mu\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \\ T_3=\mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right). \end{cases} \tag{18}$$

Fassen wir alles zusammen, so sind bei den isotropen festen Körpern die normalen und tangentialen Componenten der Spannungen, welche auf drei ebene, zur x-, y- und z-Achse senkrechte Elemente wirken,

$$\begin{cases} N_1=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial\xi}{\partial x}, \\ N_2=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial\eta}{\partial y}, \\ N_3=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} T_1=\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \\ T_2=\mu\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \\ T_3=\mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \end{cases} \tag{18}$$

wo λ und μ zwei für jeden Körper verschiedene Constante sind, welche wir die Constitutions-Constanten genannt haben oder auch nach de Saint-Venant nur eine einzige Constante, von der die elastischen Kräfte allein abhängen; Θ ist der kubische Ausdehnungs-Coefficient

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{15}$$

145. Gesetze der Deformation. — Die sechs Functionen N und T müssen den drei folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, die aus der Bedingung für das Gleichgewicht eines elementaren Parallelepipeds abgeleitet sind:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \varrho X_0 = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \varrho Y_0 = 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \varrho Z_0 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Man hat also, wenn man den durch Gleichung (15) ausgedrückten Werth von Θ berücksichtigt,

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \varrho X_0 = 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) + \varrho Y_0 = 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right) + \varrho Z_0 = 0, \end{cases} \tag{19}$$

oder wenn man mit dem Zeichen $\Delta^2 F$ den *Differentialparameter zweiter Ordnung* der Function F,[1]) also den Ausdruck $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$,

[1]) Der Differentialparameter erster Ordnung ist

$$\Delta^1 F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}.$$

Man kann leicht beweisen, dass die beiden Parameter der ersten und zweiten Ordnung in jedem Punkte dieselbe Form und denselben numerischen Werth für jedes rechtwinklige Coordinatensystem beibehalten.

bezeichnet,

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\Delta^2\xi+\varrho X_0=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\Delta^2\eta+\varrho Y_0=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\Delta^2\zeta+\varrho Z_0=0. \end{cases} \tag{19a}$$

Diese partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellen die Gesetze für die molecularen Verschiebungen in der Mitte eines wenig deformirten isotropen Körpers dar.

Indem wir nochmals auf den Werth (15) von Θ zurückgehen, können wir diese Gleichungen auch, wie folgt, schreiben:

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\left\{\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)}{\partial y}-\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}-\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)}{\partial z}\right\}+\varrho X_0=0, \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\left\{\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial z}-\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)}{\partial x}\right\}+\varrho Y_0=0, \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\left\{\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}-\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)}{\partial x}-\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial y}\right\}+\varrho Z_0=0. \end{cases} \tag{20}$$

Wenn die äusseren Kräfte X_0, Y_0, Z_0, welche in den meisten Fällen sich auf die Componenten der Schwere reduciren, aus Anziehungen oder Abstossungen bestehen, welche von festen Centren ausgehen und im umgekehrten Quadrat der Entfernung abnehmen, d. h. wenn diese Kräfte ein Potential V (63) besitzen, so hat man

$$\frac{\partial X_0}{\partial x}+\frac{\partial Y_0}{\partial y}+\frac{\partial Z_0}{\partial z}=0.$$

Differentiirt man in diesem Falle die drei Gleichungen (20) nach x, y, z und addirt sie, so verschwinden die Terme, welche von den äusseren Kräften herrühren und ebenso die mit μ multiplicirten Klammerausdrücke, so dass wir bekommen:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0, \tag{21}$$

oder

$$\Delta^2\Theta=0. \tag{21a}$$

Durch diese bemerkenswerthe Gleichung wird die kubische Ausdehnung Θ im Innern eines isotropen festen Körpers für das Gleichgewicht der elastischen Kräfte bestimmt. Sie stellt ein Gesetz dar, welches wir für die Temperatur eines festen Körpers im stationären Wärmezustande und ebenso für das electrische Potential für den Fall des electrischen Gleichgewichts wiederfinden werden. Dasselbe Gesetz bestimmt ausserdem das Potential für die Anziehung der Sphäroide.

C. Anwendung der Formeln auf einige einfache Beispiele.

146. Ein in der Richtung seiner Länge gedehnter Stab. — Zum Schluss wollen wir die vorhergehenden Formeln auf einige einfache Beispiele anwenden. Wir kommen auf diese Weise zu Beziehungen, die uns theilweise schon bekannt sind und welche eine Bestimmung von λ und μ gestatten würden, wenn man die dem Experiment zugänglichen Coefficienten genau messen könnte.

Wir betrachten zuerst den Fall eines dünnen Stabes, auf den parallel zu seiner Längsrichtung eine Zugkraft P (bezogen auf die Flächeneinheit seiner beiden horizontalen Grundflächen) wirkt. Es entsteht alsdann eine Dehnung parallel den vertikalen Kanten und eine gleichförmige Contraction parallel den Grundflächen; in Folge dessen sind die Projectionen der Verschiebung eines beliebigen Punktes $(x,\ y,\ z)$

$$\xi = -Cx, \qquad \eta = -Cy, \qquad \zeta = Az,$$

wo C und A zwei noch zu bestimmende Constanten bedeuten. Man sieht leicht, dass

$$\Theta = A - 2C$$

ist und dass den Gleichungen für das Gleichgewicht der elastischen Kräfte (19) genügt wird, wenn man von der Schwere absieht. Berücksichtigt man die Werthe (14) und (18) der N und T, so folgt, dass alle T Null sind und dass

$$N_1 = N_2 = \lambda(A - 2C) - 2\mu C \quad \text{und} \quad N_3 = \lambda(A - 2C) + 2\mu A.$$

Da nun aber N_1 und N_2, welche überall denselben Werth haben, auf der Seitenfläche des Stabes verschwinden, und N_3 überall gleich P ist, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\lambda(A - 2C) - 2\mu C = 0,$$
$$\lambda(A - 2C) + 2\mu A = P;$$

hieraus folgt

$$A = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} P, \qquad C = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P.$$

Wenn man nun den *Coefficienten der longitudinalen Verlängerung*, d. h. die Verlängerung der Längeneinheit des Stabes, an dem ein Gewicht 1 zieht, mit a bezeichnet, so hat man

$$a = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu}, \tag{22}$$

eine Gleichung, die man auch unmittelbar nach dem bekannten Werthe (12) von E hinschreiben konnte, weil nach der früheren Definition

$$a = \frac{1}{E}.$$

Wenn ebenso c den *Coefficienten der transversalen Contraction* bezeichnet, d. h. die Contraction der Längeneinheit in einer zur Zugrichtung normalen Ebene unter Einwirkung der Gewichtseinheit, so ergiebt sich

$$c = \frac{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} \tag{23}$$

und das Verhältniss $\frac{c}{a}$ giebt für σ den bekannten Werth

$$\sigma = \frac{c}{a} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{13}$$

Endlich ist die kubische Dilatation, bezogen auf die Einheit des Drucks,

$$\Theta = a - 2c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}. \tag{24}$$

147. Ein fester Körper, der in einer Richtung comprimirt, in den beiden dazu senkrechten Richtungen aber vor Veränderungen geschützt wird. — Wir betrachten zweitens ein Parallelepipedon, das in einer einzigen Richtung parallel zur z-Achse durch eine Kraft $-P$ (auf die Flächeneinheit bezogen) comprimirt

wird, während man gleichzeitig verhindert, dass die Seitenflächen irgend eine transversale Dilatation erleiden. Man hat alsdann

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = A'z$$

folglich

$$\Theta = A'.$$

Ferner sind die T Null, und wenn man mit $-Q$ die Kraft bezeichnet, welche man aufwenden muss, um die Seitenflächen an einer Bewegung zu hindern, so erhält man für die N

$$\lambda A = -Q, \qquad (\lambda + 2\mu) A' = -P.$$

Man sieht also, dass die Kraft Q nur ein Bruchtheil[1]) der Kraft P ist. Für den Coefficienten der Verkürzung a' und denjenigen der kubischen Compression Θ' findet man

$$a' = \frac{1}{\lambda + 2\mu},$$

$$\Theta' = \frac{1}{\lambda + 2\mu}. \tag{25}$$

148. Ein fester Körper, der auf seiner ganzen Oberfläche gleichförmig comprimirt wird. — Wenn ein fester Körper auf seiner ganzen Oberfläche einem gleichförmigen Druck $-P$ ausgesetzt wird, so zieht er sich zusammen, wobei er aber sich selbst ähnlich bleibt. Man hat also

$$\xi = A''x, \qquad \eta = A''y, \qquad \zeta = A''z,$$

und folglich

$$\Theta = 3A''.$$

Ferner sind die T Null, die N reduciren sich alle drei auf $N = (3\lambda + 2\mu) A''$, und diese normale Componente, die überall dieselbe ist, ist nichts anderes als $-P$,

$$(3\lambda + 2\mu) A'' = -P;$$

---

[1]) Der Bruch $\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$ lässt sich nämlich auch $\frac{1}{\frac{1}{\sigma} - 1}$ schreiben und da $\sigma < \frac{1}{2}$, ist er selbst < 1.

folglich ist die lineare Contraction

$$a'' = \frac{1}{3\lambda + 2\mu},$$

und die kubische Contraction

$$\Theta'' = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}. \qquad (26)$$

Θ'' ist aber genau der *kubische Compressibilitäts-Coefficient* k. Folglich

$$k = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}; \qquad (26^a)$$

die kubische Compressibilität eines Körpers ist also gleich dem Dreifachen von der Volumenänderung (24) eines Stabes aus derselben Substanz, der nur in einer einzigen Richtung einer Zugkraft unterliegt und sich transversal zusammenziehen kann, und gleich dem $\frac{3}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = 3(1 - 2\sigma)$ fachen von der Verlängerung a desselben Stabes (22),

$$k = 3(1 - 2\sigma)a. \qquad (26^b)$$

Wenn also σ oder $\frac{\lambda}{\mu}$ bekannt wäre, so könnte man auf die einfachste Weise k aus a ableiten. Aber im allgemeinen ist der wahre Werth von σ unsicher.

149. Eine Hohlkugel, die auf ihren beiden Oberflächen verschieden stark gepresst wird. — Wir betrachten ferner noch den Fall einer Hohlkugel, die aussen und innen verschiedenen Druckkräften ausgesetzt ist; letztere sollen jedoch auf derselben Seite der Oberfläche an allen Stellen gleich stark sein. Es sei

R der Radius der inneren Oberfläche,
R' der Radius der äusseren Oberfläche,
P der Druck auf die innere Oberfläche,
P' der Druck auf die äussere Oberfläche.

Wir betrachten nun in dem Körper der Hohlkugel ein Molecül (x, y, z), das um $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vom Mittelpunkt entfernt ist. Unter dem Einfluss des inneren und äusseren Drucks erfährt dies

Molecül eine Verschiebung ϱ, die in radialer Richtung erfolgt. Wenn wir mit ξ, η, ζ die Projectionen der Verschiebung auf die drei Coordinatenachsen bezeichnen, so ist

$$\xi = \varrho \frac{x}{r}, \qquad \eta = \varrho \frac{y}{r}, \qquad \zeta = \varrho \frac{z}{r};$$

und die Aufgabe kommt darauf hinaus, ϱ als Function von r so zu bestimmen, dass den Gleichungen (19) Genüge geleistet wird. Wir vernachlässigen hierbei den Einfluss der Schwere und setzen $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$ und $Z_0 = 0$. Nun lässt sich aber leicht nachweisen, dass die gesuchte Function folgende Form hat

$$\varrho = ar + \frac{b}{r^2}, \tag{27}$$

wo a und b zwei Constanten sind, deren Bestimmung sich aus den gegebenen Bedingungen ergiebt.

Wenn man nämlich diesen Werth von ϱ einführt, so hat man

$$\xi = ax + \frac{bx}{r^3}, \qquad \eta = ay + \frac{by}{r^3}, \qquad \zeta = az + \frac{bz}{r^3};$$

folglich

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a + \frac{b}{r^3} - 3\frac{bx^2}{r^5}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -3\frac{bxy}{r^5}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -3\frac{bxz}{r^5},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -3\frac{bxy}{r^5}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = a + \frac{b}{r^3} - 3\frac{by^2}{r^5}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -3\frac{byz}{r^5},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = -3\frac{bxz}{r^5}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -3\frac{byz}{r^5}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = a + \frac{b}{r^3} - 3\frac{bz^2}{r^5}.$$

Darnach ist

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 3a,$$

das heisst

$$\Theta = \text{const.},$$

und

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0.$$

Es bleiben uns in den Gleichungen (19) jetzt nur noch die zweiten Terme übrig; aber wenn man die zweiten Derivirten berechnet

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -9\frac{bx}{r^5} + 15\frac{bx^3}{r^7}, \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -3\frac{bx}{r^5} + 15\frac{bxy^2}{r^7}, \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -3\frac{bx}{r^5} + 15\frac{bxz^2}{r^7}, \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

sieht man, dass die zweiten Terme auch verschwinden. Die Gleichungen werden also erfüllt.

Nachdem wir den Ausdruck (27) für die Verschiebung hergeleitet haben, bestimmen wir die elastische Kraft. Da längs allen Radien die Verschiebung und ebenso die Kraft dieselbe ist, betrachten wir den zur x-Achse parallelen Radius:

$$\begin{aligned} x &= r, \quad & y &= 0, \quad & z &= 0, \\ \xi &= \varrho, \quad & \eta &= 0, \quad & \zeta &= 0. \end{aligned}$$

Die T sind Null, und für N erhält man folgende Gleichung:

$$N = (3\lambda + 2\mu)\, a - 4\mu \frac{b}{r^3}.$$

Auf der inneren Oberfläche hat man

$$r = R, \qquad N = -P,$$

und auf der äusseren Oberfläche

$$r = R', \qquad N = -P';$$

daraus folgt

$$P = -(3\lambda + 2\mu)\, a + 4\mu \frac{b}{R^3}$$

und

$$P' = -(3\lambda + 2\mu)\, a + 4\mu \frac{b}{R'^3},$$

und für die Bestimmung von a und b:

$$a = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3},$$

$$b = \frac{1}{4\mu} \frac{(P - P')\, R^3 R'^3}{R'^3 - R^3}.$$

Wenn man diese Werthe in die allgemeine Gleichung für ϱ

$$\varrho = ar + \frac{b}{r^2}$$

einsetzt, so erhält man für die Verschiebung ϱ eines beliebigen Molecüls, das um r vom Mittelpunkt entfernt ist,

$$\varrho = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3} r + \frac{1}{4\mu} \frac{(P - P')\, R^3 R'^3}{R'^3 - R^3} \frac{1}{r^2}. \quad (28)$$

Wir nehmen zunächst an, die Hohlkugel würde nur auf ihrer äusseren Oberfläche gepresst, also

$$P = 0.$$

Alsdann ist

$$\varrho = -\left\{ \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R'^3}{R'^3 - R^3} + \frac{1}{4\mu} \frac{R^3 R'^3}{R'^3 - R^3} \frac{1}{r^3} \right\} r P'. \quad (29)$$

Die Verschiebung eines Molecüls ist also seiner Entfernung vom Centrum nicht proportional, da der Ausdruck in der Klammer ein Glied mit $\frac{1}{r^3}$ enthält: die Punkte, in denen r den kleinsten Werth hat, welche also der inneren Oberfläche am nächsten liegen, erleiden die grösste relative Verschiebung. Der Radius R der inneren Oberfläche verkürzt sich um

$$\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{4\mu} \right) \frac{R'^3}{R'^3 - R^3} R P'.$$

Wenn aber der Radius R den Werth $R(1 - \varepsilon)$ annimmt, so reducirt sich das Volumen V auf $V(1 - 3\varepsilon)$; man hat also, wenn Δv die Verkleinerung der Volumeneinheit des Körpers der Hohlkugel bedeutet,

$$\Delta v = 3 \left\{ \frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{4\mu} \right\} \frac{R'^3}{R'^3 - R^3} P'. \quad (30)$$

Würde der gleiche äussere Druck P' auf eine *volle* Kugel wirken, so erhielte man aus der Gleichung (28), wenn man $R = 0$ setzt,

$$\varrho = -\frac{1}{3\lambda + 2\mu} r P'; \quad (31)$$

in diesem Falle ist ϱ dem Radius r proportional; und die Verkleinerung der Volumeneinheit für einen beliebigen Radius ist

$$\Delta v_1 = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} P' = kP', \tag{32}$$

in Übereinstimmung mit Formel (26ª).

Bei einer Hohlkugel ist die Abnahme des Volumens bedeutender,

$$\Delta v = \frac{3}{4}\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right)\frac{R'^3}{R'^3 - R^3} kP'; \tag{33}$$

die Kenntnis von Δv reicht zur Bestimmung von k nicht aus; man muss ausserdem den Werth für $\frac{\lambda}{\mu}$ oder eine andere äquivalente Grösse, z. B. den Elasticitäts-Coefficienten E, kennen.

In Folge der Beziehungen (a) und (b) lässt sich nämlich Gleichung (30) auch auf folgende Weise schreiben

$$\Delta v = \frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{\mathrm{E}}\frac{R'^3}{R'^3 - R^3} P' \tag{34}$$

und hieraus kann man σ berechnen, wenn Δv und E bekannt sind; hat man σ gefunden, so lässt sich nach denselben Relationen k daraus unmittelbar finden, da

$$k = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} = 3\frac{1-2\sigma}{\mathrm{E}}. \tag{35}$$

Wir nehmen zweitens an, dass die Hohlkugel auf ihrer inneren und äusseren Oberfläche gleich stark gepresst wird, also

$$P = P'.$$

Man hat alsdann

$$\varrho = -\frac{1}{3\lambda + 2\mu} rP;$$

und daraus folgt für die Abnahme der Volumeneinheit des Hohlraumes der Hohlkugel

$$\Delta u = 3\frac{1}{3\lambda + 2\mu} P = kP, \tag{36}$$

d. h. diese Abnahme ist dieselbe wie diejenige, welche ein fester Kern aus demselben Stoff erleiden würde, wenn auf dessen ganze

Oberfläche derselbe Druck auf die Flächeneinheit wirkte. Dies Resultat ist a priori klar. Denn die Hohlkugel, deren innere Höhle von einem festen Kern vollständig ausgefüllt wird, würde seitens dieses Kerns eine normale Rückwirkung erfahren, die dem Drucke P gleich ist; der Kern würde sich also zusammenziehen, wie wenn er durch die Kraft P direct gepresst würde. Sehen wir von dem Kern ab und ersetzen wir ihn durch einen inneren Druck P, so wird für die Hohlkugel nichts geändert, und die innere Höhlung wird sich ebenso wie der zusammengedrückte Kern verhalten.

Wir nehmen drittens an, dass die Hohlkugel auf ihrer inneren Oberfläche allein einen Druck erleidet, also

$$P' = 0.$$

Sie dehnt sich aus, und der Zuwachs der Volumeneinheit ist

$$\Delta w = 3 \left\{ \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R^3}{R'^3 - R^3} + \frac{1}{4\mu} \frac{R'^3}{R'^3 - R^3} \right\} P. \qquad (37)$$

Wenn der Druck, welcher in den drei verschiedenen Fällen ausgeübt wird, der gleiche ist, so muss offenbar

$$\Delta w = \Delta v = \Delta u. \qquad (38)$$

sein, was sich leicht beweisen lässt.

150. Ein cylindrischer Stab, der normal zu seiner Achse tordirt wird. — Ein Stab AO ist an seinem einen Ende A

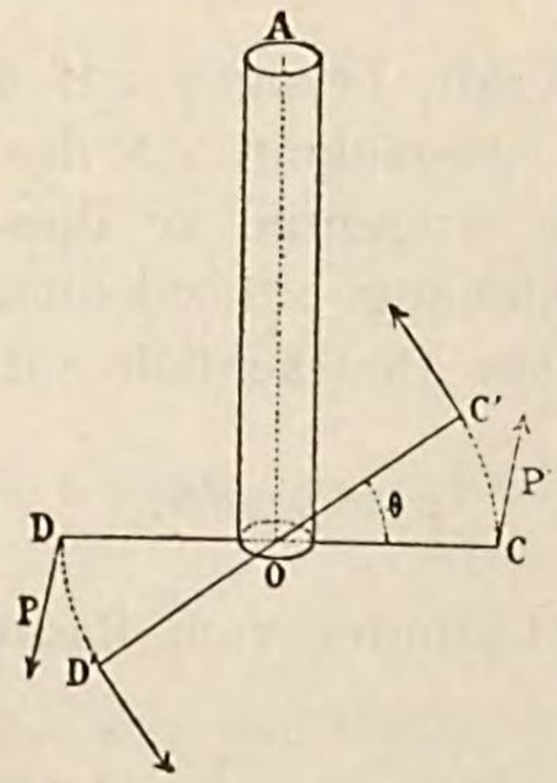


Fig. 208.

befestigt; an seinem anderen Ende O greift ein Kräftepaar P und $-P$, das an dem Hebelarm $CD = l$ wirkt, senkrecht zur

Richtung des Stabes an. Unter dem Einfluss dieses Kräftepaars P und $-P$ tordirt sich der Stab, und nachdem der Hebelarm CD um einen Winkel COC' gedreht ist, welchen man den *Torsionswinkel* nennt, stellt sich Gleichgewicht ein, da die durch die Torsion hervorgerufenen elastischen Kräfte dieselbe Wirkung ausüben, wie ein gleiches, aber entgegengesetztes Kräftepaar vom Moment Pl: dies Kräftepaar, durch welches man die gesammten elastischen Rückwirkungen darstellen kann, wird das *Torsionskräftepaar* genannt. Man wendet auch oft den Ausdruck *Torsionskraft* an, um die Kraft zu bezeichnen, welche, wenn sie am Hebelarm 1 wirkt, dieselbe Wirkung wie das Torsionskräftepaar hervorbringt.

Wir wollen nun theoretisch die Torsion dieses Stabes betrachten, wobei wir uns aber immer auf kleine Deformationen beschränken. Jeder gerade Querschnitt des Cylinders dreht sich um die Achse als Mittelpunkt um einen gewissen Winkel,[1]) welcher von dem Werthe ϑ für das Ende, wo das Kräftepaar P und $-P$ angreift, bis zu dem Werthe 0 für das feste Ende abnimmt. Wenn wir aber zwei benachbarte Querschnitte betrachten, so befinden sich die Molecüle, die zu Anfang auf derselben Erzeugenden des Cylinders lagen, nach der Torsion auf einer Linie, die mit der ersteren einen Winkel φ einschliesst. Dieser ist überall derselbe, welche Stelle des Cylinderumfanges wir auch betrachten mögen; mit anderen Worten: eine Molecülreihe, die der Achse parallel ist, bildet nach der Torsion eine Schraubenlinie, die gegen die Achse um den Winkel φ geneigt ist. Dieser Winkel φ ist offenbar der Verschiebungswinkel der geraden Querschnitte des Cylinders gegen einander; wir haben also

$$P = \mu\varphi,\ ^{2}) \tag{16}$$

wenn P die elastische Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, darstellt, welche auf den Querschnitt dS des betrachteten Molecülfadens wirkt, und zwar tangential zu diesem Querschnitt und in der Richtung der Verschiebung. Bezeichnet man mit p die Intensität der Kraft PdS, welche thatsächlich auf das Element dS wirkt, so folgt

$$p = \mu\varphi dS. \tag{16}$$

Wickelt man aber den Cylinder vom Radius ϱ, auf welchem sich

---

[1]) Wir vernachlässigen die Deformation des Querschnittes. (Die genaue Rechnung siehe De Saint-Venant, Mémoires des savants étrangers; 1855).

[2]) Man hat

$$N_1 = 0,\quad N_2 = 0,\ N_3 = 0;$$
$$T_1 = \mu\varphi,\ T_2 = 0,\ T_3 = 0.$$

der betrachtete Faden befindet, ab, so erhält man unmittelbar, wenn man die Länge des Stabes mit l und den Torsionswinkel mit ϑ bezeichnet,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho \vartheta}{l}, \tag{39}$$

oder, da der Winkel φ sehr klein ist,

$$\varphi = \frac{\varrho \vartheta}{l}.$$

Daraus folgt

$$p = \mu \frac{\varrho \vartheta}{l} dS.$$

Im Zustande des Gleichgewichts muss die Summe der Momente aller Kräfte p, die auf jedes Element eines beliebigen Querschnittes des Cylinders wirken, dem Moment C des Kräftepaares gleich sein, das die Deformation hervorbringt. Also ist

$$\Sigma p \varrho = C,$$

oder

$$\Sigma \mu \frac{\varrho^2 \vartheta}{l} dS = C,$$

oder, wenn man für dS den Werth $2\pi\varrho d\varrho$ setzt,

$$\frac{\mu \vartheta}{l} \int_0^r 2\pi \varrho^3 d\varrho = C,$$

oder endlich

$$\vartheta = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{lC}{\frac{\pi}{2} r^4}. \tag{40}$$

Diese Formel enthält alle Gesetze der Torsionselasticität, und nach ihr wird die Constante μ oft der *Torsionscoefficient* genannt.

151. Prismatischer Stab, der senkrecht zu seiner Länge gebogen wird. — Die Biegung ist die am häufigsten vorkommende Art der Deformation, sie ist zugleich die complicirteste. Wir beschränken uns hier auf die Untersuchung des einfachsten Falles, wo das eine Ende eines prismatischen Stabes in einen Schraubstock

eingespannt ist, während an seinem anderen Ende eine Kraft P senkrecht zu seiner Längsrichtung wirkt. Es sei l die Länge,

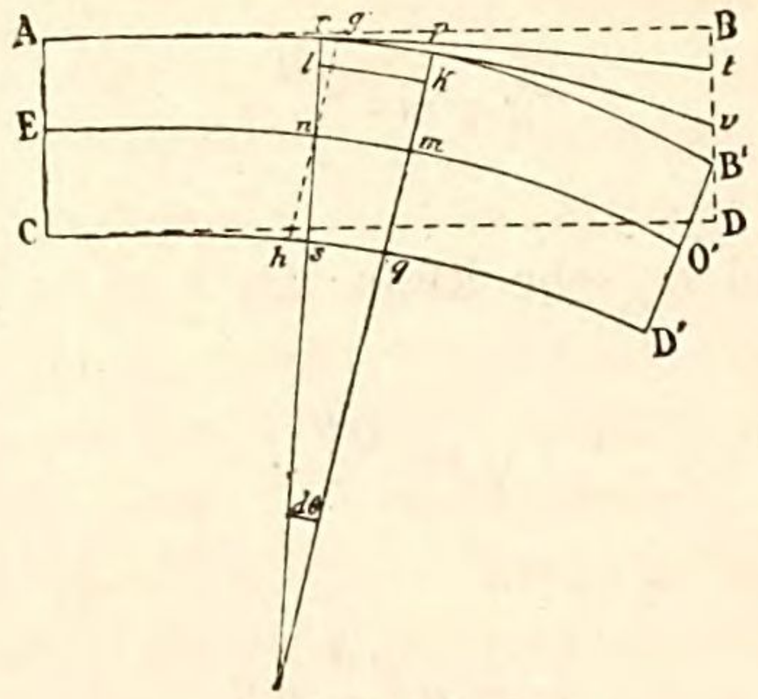


Fig. 209.

e die Dicke, d. h. diejenige Querdimension, welche der Richtung der Kraft P parallel ist, und b die Breite des Stabes. Wir legen durch die Achse des Stabes eine vertikale Ebene $ABCD$ und betrachten die Deformation, welche in ihr stattfindet. Das Ende B wird nach B' herabgebogen, und da es sich immer nur um sehr kleine Deformationen handelt, kann man B' als in der Vertikalen durch den Punkt B gelegen betrachten: die Verschiebung BB' nennt man die Einsenkung der Biegung. Gleichzeitig krümmt sich der Stab; die oberen Linien, wie AB', verlängern sich, die unteren, wie CD', verkürzen sich, und die mittlere Linie EO' behält allein ihre anfängliche Länge. Aus diesen Verlängerungen und Verkürzungen gehen elastische Kräfte hervor, die der äusseren Kraft P das Gleichgewicht halten. Es sei pq ein transversaler Querschnitt durch den Stab, der in der Entfernung $O'm = x$ vom freien Ende liegt und rs ein unendlich benachbarter Querschnitt. Alsdann werden alle Linien, wie lk, die über mn liegen, verlängert, unterhalb von mn dagegen alle verkürzt: jeder Punkt k des Querschnittes pq wird von einer elastischen Kraft angegriffen, welche die Richtung von kl hat und den Querschnitt um m zu drehen sucht, um ihn in die erste Lage zurückzuführen: Die Summe der Momente aller dieser Kräfte in Bezug auf den Punkt m muss dem Moment der äusseren Kraft P, bezogen auf denselben Punkt, gleich sein, welche pq im entgegengesetzten Sinne drehte. Setzen wir $mn = dx$, $mk = z$ und bezeichnen wir mit $d\vartheta$ den Winkel zwischen den beiden convergirenden Linien pq und rs, so ist

$$lk = dx + z\,d\vartheta,$$

wie man leicht sieht, wenn man gh als Parallele zu pq zieht. Die

elastische Kraft, welche im Element $b\,dz$ in k durch die Verlängerung $z\,d\vartheta$ entsteht, ist nach der bekannten Formel (9),

$$\mathrm{E}\frac{z\,d\vartheta}{dx}\,b\,dz,$$

und das Moment dieser Kraft bezogen auf den Punkt m ist

$$\mathrm{E}\frac{z\,d\vartheta}{dx}\,b\,dz\,.\,z = \mathrm{E}\frac{b\,d\vartheta}{dx}\,z^2dz.$$

Da die Deformation sehr klein ist, so kann man für das Moment der Kraft P die Grösse

$$Px$$

setzen. Die Gleichung für das Gleichgewicht des Querschnittes pq ist also

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \mathrm{E}\frac{b\,d\vartheta}{dx}\,z^2dz = Px,$$

oder

$$\mathrm{E}\frac{b\,d\vartheta}{dx}\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} z^2dz = Px,$$

oder

$$\frac{\mathrm{E}}{12}\frac{be^3}{dx}\,d\vartheta = Px. \qquad (41)$$

Ziehen wir in den Punkten r und p die Tangenten rt und pv an die Curve AB', so schliessen diese den Winkel $d\vartheta$ mit einander ein, und wenn man tv mit df bezeichnet, so hat man

$$dx = x\,d\vartheta,$$

oder, nachdem man in die vorhergehende Gleichung den Werth von ϑ eingesetzt hat, der aus dieser letzten Beziehung folgt,

$$df = \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{12P}{be^3}\,x^2dx. \qquad (42)$$

Durch Integration von $x = 0$ bis $x = l$ bekommt man schliesslich

$$f = \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{4l^3P}{be^3}, \qquad (43)$$

eine Formel, die alle Gesetze der Biegung für den einfachen Fall, welchen wir betrachtet haben, umfasst.

Die Einsenkung ist dem biegenden Gewicht proportional, sie ist ferner proportional dem Kubus der Länge, umgekehrt proportional der Breite (ein a priori einleuchtendes Gesetz) und dem Kubus der Dicke; endlich unter sonst gleichen Verhältnissen umgekehrt proportional dem Elasticitäts-Coefficienten E der Substanz.

II. Experimente.

A. Zug.

152. Verlängerung eines Stabes, auf den eine Zugkraft wirkt. — *Gesetze.* Das Gesetz, nach dem ein fester Stab von der Länge L und dem Querschnitt S sich ausdehnt, wenn in seiner Längsrichtung das Gewicht Π eine Zugkraft auf ihn ausübt, haben wir (**142**) durch die Formel

$$l = \frac{\Pi L}{\mathrm{E} S} \qquad (9)$$

ausgedrückt.

Versuche von S'Gravesande.[1]) — Die ersten genauen Versuche sind diejenigen von S'Gravesande. Dem zu untersuchenden Stoffe gab er die Form eines Drahtes von der Länge $2L$, welcher unveränderlich an seinen beiden Endpunkten befestigt war; auf seine Mitte setzte er eine Rolle, deren Gehäuse unten eine Schale für die Aufnahme von Gewichtsstücken trug, während vom oberen Ende ein Faden über einer zweiten Rolle führte, welche mit einem vor einer Kreistheilung spielenden Zeiger versehen war.

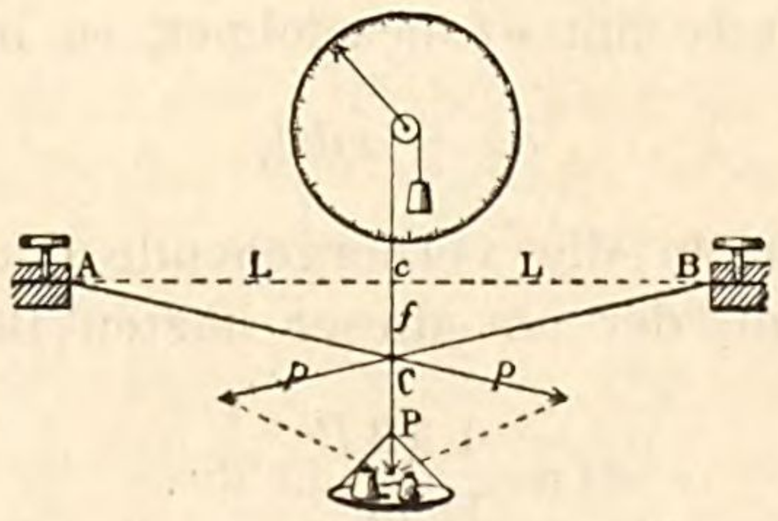


Fig. 210.

Ein Gegengewicht am Ende des Fadens diente zur Äquilibrirung der Wagschale und der ersten Rolle; der Draht war nahezu horizontal, wenn die Schale leer war, und der Zeiger befand sich als-

---

[1]) S'Gravesande, loc. cit., I.

dann vor dem Nullpunkt der Theilung. Man setzte nun Gewichte auf die Schale, welche ein schwaches Sinken derselben bewirkten. In Folge dessen rückte der Zeiger fort und mit Hülfe von vorher ausgeführten Beobachtungen, deren nähere Besprechung sich jetzt nicht lohnt, liess sich die Grösse f messen, um welche sich die Mitte des Drahtes gesenkt hatte. Die halbe Länge des Fadens hat den Werth $BC = \sqrt{L^2 + f^2}$ angenommen, sie war ursprünglich $Bc = L$, die Verlängerung ist also

$$l = \sqrt{L^2 + f^2} - L.$$

Das Gewicht P, welches sich in der Wagschale befindet, wird durch die Spannungen getragen, welche CA und CB, den beiden Hälften des Fadens, parallel sind; jede dieser beiden Spannkräfte hält derjenigen Componente p von P das Gleichgewicht, die einer der beiden Hälften des verlängerten Fadens parallel ist: diese Componente p ist also in Wirklichkeit das spannende Gewicht. Das Kräfteparallelogramm ist mithin ein Rhombus, und man hat

$$p = \frac{\frac{P}{2}}{\cos(p, P)} = \frac{\frac{P}{2}}{\cos(cCB)} = \frac{P}{2}\frac{f}{\sqrt{L^2 + f^2}}.$$ [1])

Wenn man die Verlängerung und das spannende Gewicht bestimmt, kann man durch Variiren der Versuchsbedingungen alle Gesetze beweisen.

Da f, verglichen mit L, immer sehr klein ist, so kürzt man die Berechnung der oben behandelten Grössen etwas ab, wenn man

---

[1]) Wenn das Gewicht P klein ist, muss man auch das Gewicht des Drahtes berücksichtigen: zu diesem Zwecke denkt man sich das Gewicht $\frac{\varpi}{2}$ jeder Hälfte in zwei Kräfte zerlegt. Die eine $\frac{\varpi}{4}$ greift am festen Ende an und wird durch den Widerstand des Stützpunktes aufgehoben, die andere $\frac{\varpi}{4}$ greift in C an; die beiden Kräfte $\frac{\varpi}{4}$ im Punkte C geben eine Resultante $\frac{\varpi}{2}$, welche sich zu P addirt. Für die Berücksichtigung des Drahtgewichts ϖ genügt es also, das Gewicht P, welches, sich in der Wagschale befindet, um $\frac{\varpi}{2}$ zu vermehren: der genaue Werth des spannenden Gewichts ist mithin

$$p = \frac{1}{2}\left(P + \frac{\varpi}{2}\right)\frac{f}{\sqrt{L^2 + f^2}}.$$

$$l \text{ oder } L\left(1+\frac{f^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} - L = \frac{1}{2}\frac{f^2}{L}$$

setzt, und

$$p = \frac{P}{2}\frac{f}{L},$$

also

$$\mathrm{E} = \frac{PL}{fS}.$$

Die Versuche von S'Gravesande sind nicht einwurfsfrei: Sie beziehen sich nämlich weniger auf die Elasticität des Zuges als auf diejenige der Biegung, da die verschiedenen, der Drahtachse parallelen Molecülreihen sich ungleichmässig verlängern. In Folge der Starrheit des Materials runden sich die Winkel A, B und C ab, so dass der Draht nicht genau die Form eines Dreiecks ABC annimmt, wie man es vorausgesetzt hat. Endlich bringen die Reibungen in dem System des Zeigers einen weiteren Fehler hervor. S'Gravesande fand indessen die Gesetze, welche er suchte: der numerische Werth des Coefficienten E blieb freilich ungenau.

Man vermeidet alle diese Schwierigkeiten, wenn man direct mit dem Kathetometer die Verlängerungen eines vertikalen Stabes misst, der unveränderlich an seinem oberen Ende befestigt ist und an dessen unterem Ende Gewichte in der Richtung des Stabes wirken, genau so, wie die Definition es angiebt.

Nach dieser Methode beobachteten nach einander F. Savart, Masson, Wertheim.

Versuche von Savart[1]) *und von Masson.*[2]) — Savart wandte cylindrische Stäbe an, auf denen er mit Hülfe der Theilmaschine mehrere gleich weit von einander entfernte Striche anbrachte. Der Stab war mit seinem oberen Ende in einen Schraubstock gespannt, und auf sein unteres Ende übten Gewichte eine Zugkraft aus. War die definitive Verlängerung eingetreten, so bestimmte man mit Hülfe des Kathetometers die neuen Entfernungen der Theilstriche. Savart bestätigte auf diese Weise die verschiedenen von S'Gravesande angegebenen Gesetze und erhielt für die Elasticitäts-Coefficienten genaue Werthe. Durch die Messung der Verlängerungen verschiedener Theile desselben Stabes liess sich beweisen, dass die Verlängerung der ursprünglichen Länge proportional ist. Die Verlängerungen gleicher Stücke waren jedoch nicht genau einander gleich, wie auch Masson wieder fand. Dies beweist, dass

---

[1]) Savart, Ann. de chim. et de phys., (2), LXV, 337; 1837.
[2]) Masson, Ann. de chim. et de phys., (3), III, 451; 1841.

man mit dem Zieheisen keinesfalls vollständig homogene Stäbe oder Drähte erhalten kann.

Beobachtung von Weber.[1]) — Es ist ausserdem bemerkenswerth, dass es bei fast allen Körpern Stunden lang dauert, bevor unter der Einwirkung einer deformirenden Kraft die Deformation des Körpers sich vollzieht, selbst wenn diese weit unter der Elasticitätsgrenze bleibt; das gleiche gilt für die vollständige Rückkehr zu der ursprünglichen Form, wenn man die äussere Einwirkung aufhebt. W. Weber, welchem man die erste Beobachtung dieser elastischen *Nachwirkung* verdankt, bemerkte, dass ein Seidenfaden sich mehr als 36 Stunden hindurch verlängerte, obgleich das ihn spannende Gewicht viel zu klein war, um eine permamente Deformation hervorzubringen. Nachdem derselbe Faden von seinem Gewicht befreit war, verkürzte er sich allmählich 20,5 Stunden lang, ehe er seine ursprüngliche Länge wieder annahm. Die elastische Nachwirkung ist besonders bei organischen Stoffen bemerkbar, aber sie lässt sich in gleicher Weise auch beim Glase und bei den Metallen beobachten. Man muss deshalb bei den Messungen so lange mit den Ablesungen warten, bis die Deformation constant geworden ist. Bei gewissen Körpern erreicht man jedoch nie den stationären Zustand. Der Körper wird durch die fortdauernd wirkende Kraft immer mehr deformirt, und es sind in diesem Falle keine sicheren Messungen möglich.

Beobachtungen von Wertheim.[2]) — Indem Wertheim alle diese Schwierigkeiten berücksichtigte und die grösste Sorgfallt darauf verwandte, mit chemisch reinen Substanzen zu beobachten, bestimmte er mit grösster Genauigkeit die Elasticitäts-Coefficienten einer grossen Zahl von Körpern. Gleichzeitig untersuchte er die Änderung dieses Coefficienten mit der Temperatur und anderen verschiedenen Nebenbedingungen.

Der Apparat von Wertheim besass eine Schraubzwinge, welche den Stab an seinem oberen Ende festhielt, einen Haken, welcher an dem unteren Ende befestigt war, um die Gewichte zu tragen und ein Kathetometer, um die Länge des Stabes in den verschiedenen Phasen des Versuchs zu bestimmen. Die obere Schraubzwinge wurde aus zwei halbcylindrischen Backen gebildet, welche den Stab auf seinem ganzen Umfang umspannten. Dies hatte den Vortheil, dass der Stab nicht breitgequetscht wurde, was bei einem gewöhnlichen Schraubstocke, der denselben nur in zwei gegenüber-

---

[1]) W. Weber, Pogg. Ann., XXXIV, 247; 1835, und LIV, 1; 1841. Siehe auch F. Kohlrausch, Pogg. Ann CXIX, 337; CXXVIII, 1 und CLVII, 337. Boltzmann, Wiener Sitzungs-Ber. 1874.

[2]) Wertheim, Ann. de chim. et de phys., (3), XII, 385; 1844.

liegenden Punkten fasst, nicht zu vermeiden gewesen wäre. Die Klemme E war an einem starken eisernen Träger befestigt, der in die Wand eingelassen war. An dem unteren Ende des Stabes trug eine ganz ähnliche Klemme F mittelst eines Hakens den Holzkasten CC, welcher für die Aufnahme der Gewichte P bestimmt war. Ein Vorsprung des Kastens glitt in einem an dem Balken

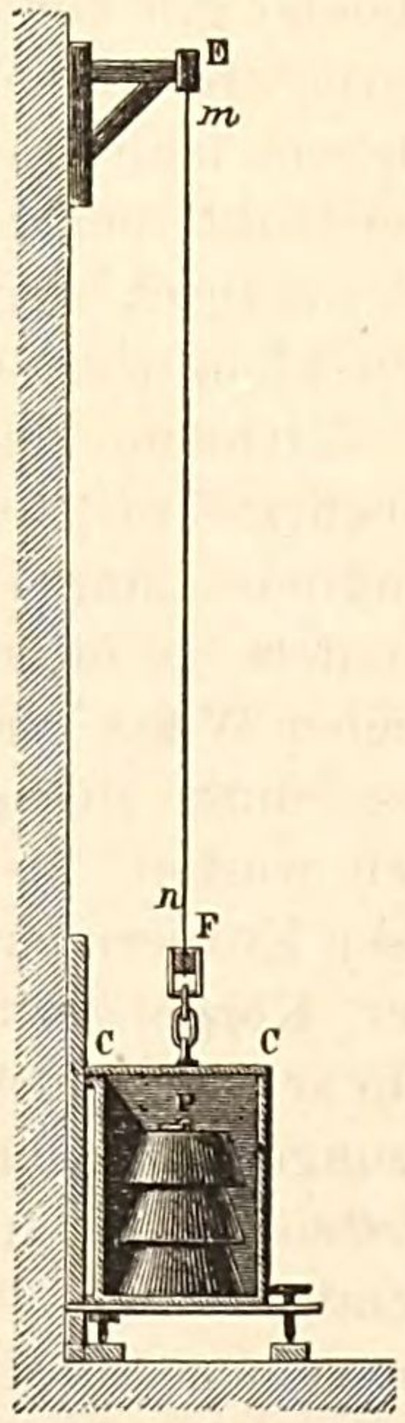


Fig. 211.

angebrachten Falz, um jede Erschütterung zu verhindern und Schwingungen zu vermeiden, welche die Elasticität des Körpers bedeutend ändern können. Ausserdem wurde der Kasten von Fussschrauben getragen, welche man langsam in die Höhe schraubte, wenn man den Zug wirken lassen wollte: man erhielt auf diese Weise ohne Erschütterung eine der Achse des Stabes parallele Zugkraft.

Die Entfernung der auf dem Stabe angebrachten Marken m, n bestimmt man vor jedem Zuge, legt alsdann die Gewichte auf und misst wiederum die Lage der Marken. Nach einer gewissen Zeit macht man eine neue Einstellung und giebt diese dasselbe Resultat, wie die erste, so ist die Verlängerung des Stabes bestimmt. Haben sich aber die Striche noch weiter von einander entfernt, so wartet man noch eine Zeit lang und stellt dann von neuem ein. Man fährt auf diese Weise fort, bis man bei zwei auf einander folgenden Einstellungen dasselbe Resultat erhält.

Der Querschnitt des Stabes wird im Voraus bestimmt, entweder mit dem Sphärometer oder durch eine Wägung, wenn die Dichte vorher gemessen war. Man hat damit alle nothwendigen Werthe, um den Elasticitäts-Coefficienten zu bestimmen.

Wollte man bei höheren oder tieferen Temperaturen als die des umgebenden Zimmers beobachten, so umgab man den Stab mit einer vorn offenen Hülle, welche an den drei anderen Seiten aus drei concentrischen Wänden bestand. Der Zwischenraum zwischen der innersten und mittleren Wand, die beide aus Kupfer hergestellt waren, wurde mit Sand ausgefüllt. Zwischen der mittleren und äusseren eisernen Wand befand sich unten auf einem Rost das Feuerungsmaterial, so dass die Verbrennungsgase beim Aufsteigen den ganzen eingeschlossenen Raum erwärmten. An Thermometern, die über die ganze Länge des Stabes vertheilt angebracht waren, konnte man den Grad der Erwärmung ablesen. Wenn diese bis zu dem beabsichtigten Punkte gestiegen war, schloss man die Thür, welche der Luft den Zutritt zum Feuerherd gestattete; es trat alsdann eine Abkühlung ein, aber ungefähr eine Stunde lang veränderte sich die Temperatur des Stabes kaum, da das Sandbad sehr lange die Wärme behielt. Sobald die Temperatur zu sinken begann, liess man wieder so lange Luft zum Feuerraum treten, bis die Thermometer wieder stiegen, darauf schloss man von neuem den Zugang für die Luft ab u. s. w. Man konnte auf diese Weise die Temperatur während der ganzen Dauer der Messungen, bis auf etwa 2^0 bis 3^0 constant halten. Dies reicht aber vollkommen für den vorliegenden Zweck aus. Denn in Folge der ganzen Anordnung zeigen die unteren Termometer immer eine höhere Temperatur an, als die oberen, und der auf einer Seite offene Schutzkasten verhindert nicht kleine Schwankungen in der Temperatur des Stabes. Für niedrige Temperaturen wandte man eine Kältemischung an, welche in einem doppelten Schutzkasten eingeschlossen wurde. Letzterer umgab den Stab von allen Seiten mit Ausnahme einer Spalte, welche zum Durchvisiren frei gelassen war.

Wertheim hat seine Messungen nach einer zweiten, vollständig verschiedenen Methode controlirt, die auf der Erscheinung der longitudinalen Schwingungen der Stäbe beruht. Wir werden später darauf zurückkommen.

Er bewies ferner durch ein optisches Verfahren, welches später beschrieben werden wird, dass die durch einen gegebenen Druck entstehende Verkürzung gleich der Verlängerung ist, welche eine dem Drucke gleiche Zugkraft hervorruft: diese äusserst empfindliche Methode hat den ersten strengen Beweis für die bis

dahin ohne directen Beweis angenommene Voraussetzung geliefert, dass die Gesetze für die Elasticität des Druckes dieselben sind, wie für die Elasticität des Zuges.

Tabelle der Elasticitäts-Coefficienten. — Die folgenden Tabellen geben die Resultate der Wertheim'schen Versuche an: der Elasticitäts-Coefficient[1]) ist das Gewicht in Kilogrammen, welches man an einem Stabe von 1 qmm Querschnitt anbringen müsste, um ihn um seine eigene Länge zu dehnen.[2])

1. *Metalle.*

	Dichte	Elasticitäts-Coefficient, direct gemessen. bei −15°	bei 15°[a])	bei 100°	bei 200°	Coefficient. aus longitud. Schwing. abgeleitet. bei 15°
		kg	kg	kg	kg	kg
Blei, gehämmert	—	—	1 803	—	—	2 278
„ ausgeglüht	11,23	—	1 727	1 630	—	2 146
Gold, gehämmert	—	9 351	8 131	—	—	8 599
„ ausgeglüht	18,04	—	5 585	5 408	5 482	6 372
Silber, gehämmert	—	7 800	7 357	—	—	7 576
„ ausgeglüht	10,30	—	7 140	7 274	6 374	7 242
Zink, gehämmert	7,06	—	8 734	—	—	9 555
Palladium, gehämmert . .	—	10 659	11 759	—	—	12 395*
„ ausgeglüht	11,23	—	9 789	—	—	11 281*
Kupfer, gehämmert . . .	—	13 052	12 449	—	—	12 536
„ ausgeglüht	8,94	—	10 519	9 827	7 862	12 540
Platin, gehämmert . . .	—	16 224	17 044	—	—	17 165
„ ausgeglüht	21,08	—	15 518	15 178	12 964	15 611
Engl. Stahl, gehämmert .	—	—	18 809	—	—	19 445
„ „ ausgeglüht .	7,62	—	17 278	21 292	19 278	19 200
Gussstahl, gehämmert . .	—	—	19 549	—	—	19 823
„ ausgeglüht	7,92	—	19 561	19 014	17 926	19 828
Gewöhnl. Eisendraht, gehäm.	—	17 743	20 869	—	—	19 903
Eisen aus Berry, ausgeglüht	7,76	—	20 794	21 877	17 700	19 925

[a]) Diese Werthe sind mit denen der anderen Colonnen nicht absolut vergleichbar, da die benutzten Drähte nicht dieselben waren wie diejenigen, welche bei den anderen Bestimmungen gebraucht wurden.

*) Der Coefficient ist aus transversalen Schwingungen berechnet.

---

[1]) Da der Coefficient der longitudinalen Verlängernng a (**146**) gleich $\frac{1}{E}$ ist, so stellt der reciproke Werth der in diesen Tabellen angegebenen Zahlen den Bruchtheil der ursprünglichen Länge dar, um den ein Stab der fraglichen Substanz vom 1 qmm Querschnitt durch eine Zugkraft von 1 kg verlängert wird.

[2]) Um diese Coefficienten in das C.-G.-S.-System zu übertragen, muss man sie mit 98 100 000 multipliciren, da 1 kg gleich 981 000 Dynen und 1 qmm gleich 0,01 qcm ist. Man würde bei 15° z. B. finden: Blei, gehämmert $1{,}17 \times 10^{11}$, Silber, gehämmert $7{,}22 \times 10^{11}$, Eisen, gehämmert $2{,}04 \times 10^{11}$, u. s. w.

Die Coefficienten, welche nach der akustischen Methode erhalten wurden, sind alle grösser als die direct bestimmten: es kommt dies daher, dass die Verlängerung bei einem in Tonschwingungen versetzten Körper in sehr kurzer Zeit entsteht, deshalb kleiner ist als die bei den directen Messungen beobachtete vollständige Ausdehnung.

Eisen und Stahl haben den grössten Elasticitäts-Coefficienten: er ist mehr als zehnmal grösser als derjenige des Bleis. Das Härten auf kaltem Wege vergrössert gewöhnlich die Elasticität: wenig merkbar bei Eisen und Stahl (**163**), ist die Wirkung bei Kupfer sehr ausgeprägt, dessen Elasticität um $\frac{1}{5}$ beim Durchgang durch das Zieheisen wächst, und noch mehr bei Gold, dessen Elasticität sich in Folge des Hämmerns um $\frac{1}{3}$ vermehrt. Im allgemeinen vergrössern alle Bearbeitungen die Elasticität, wenn sie die Dichte vergrössern. Bei der Mehrzahl der Metalle führt die Erhöhung der Temperatur eine Verminderung der Elasticität herbei: die Wirkung ist sehr merkbar bei Platin und noch mehr bei Kupfer, dessen Coefficient bei 200^0 nicht mehr als $\frac{3}{4}$ von dem Werthe beträgt, den er bei gewöhnlicher Temperatur besitzt. Eisen und englischer Stahl, sowie Silber machen jedoch zeitweilig eine Ausnahme, die Elasticität wächst zuerst bis 100^0, um alsdann abzunehmen. Der Durchgang eines elektrischen Stromes scheint eine besondere Wirkung auszuüben: denn abgesehen von der Verminderung, welche durch die Temperaturerhöhung hervorgerufen wird, scheint noch eine besondere Verminderung des Elasticitäts-Coefficienten einzutreten, welche nach Wertheim von den Schwingungen in Folge des Stromdurchgangs herrührt.[1])

2. *Legirungen.*

	Dichte	Coefficient
Reines Messing $ZnCu_2$	8,61	8 543 kg
Messing im Handel $ZnCu_2$ . . .	8,66	9 271
Argentan $Zn_4Cu_{18}Ni_5$	8,54	10 788
Packfong $Zn_5Cu_6Ni_3$	8,44	11 500

Der Coefficient der Legirungen ist ungefähr das Mittel der Coefficienten der Metalle, welche die Legirung bilden. Die Contraction oder Dilatation, folglich auch die Dichtigkeitsänderungen, welche bei der Bildung der Legirung eintraten, üben keine Wirkung auf den Werth des Elasticitäts-Coefficienten aus.

---

[1]) Die Abnahme des Elasticitäts-Coefficienten in einem vom elektrischen Strom durchflossenen Leiter ist durch die Messungen von Streintz nicht bestätigt, welche er über die Schwingungsdauer eines tordirten, vom Strom durchflossenen Drahtes anstellte; bei derselben Temperatur war der Elasticitäts-Coefficient in beiden Fällen derselbe, ob ein Strom durch den Draht floss oder nicht (Pogg. Annalen, CL, 381; 1873).

3. *Glas.*[1])

	Dichte	Coefficient nach der Verlängerung	Coefficient nach den long. Schwing.
Fensterglas aus Saint-Quirin . .	2,517	— kg	7 917 kg
Spiegelglas aus Cirey	2,454	6 722	7 015
Glaswaaren aus Valerysthal . . .	2,446	6 040	6 890
Krystallglas aus Baccarat	3,320	—	5 477

Die chemische Zusammensetzung variirte bei den verschiedenen Gläsern, man kann also keine Beziehung zwischen der Dichte und dem Elasticitäts-Coefficienten aufstellen.

4. *Holz*, welches 20 % Feuchtigkeit enthält.[2])

	Dichte	Coefficient, berechnet aus der Verlängerung und den long. Schwing. längs der Faser	längs des Radius	längs der Tangente
Pappel.	0,477	517 kg	73 kg	39 kg
Pinus sylvestris . .	0,559	564	98	29
Eiche	0,872	921	189	130
Buche	0,823	980	270	159
Birke	0,812	997	81	155
Ahorn	0,674	1021	157	73
Erle.	0,601	1108	98	59
Tanne	0,493	1113	95	34
Esche	0,697	1121	111	102
Ulme	0,723	1165	123	63
Acazie	0,717	1262	—	—

Obgleich die chemische Zusammensetzung dieser verschiedenen Hölzer fast die gleiche ist, hat die Dichte hier nicht dieselbe Bedeutung wie bei den Metallen. Die Richtung, in welcher der Zug ausgeübt wird, spielt dagegen eine vorherrschende Rolle: die Elasticität in der Richtung der Fasern ist oft zehnmal grösser als senkrecht dazu; und in der zu den Fasern senkrechten Ebene ist die Elasticität längs der Tangente immer kleiner als längs des Radius. Der Feuchtigkeitszustand des Holzes übt eine sehr auffallende Wirkung aus: der Elasticitäts-Coefficient nimmt mit dem Austrocknen zu.

5. *Verschiedene Substanzen* (nach Frankenheim).[3])

	Coefficient		Coefficient
Schiefer	11 035 kg	Knochen	1 635 kg
Marmor	2 609	Kokonseide	861
Kalkstein	1 187	Fischbein	603
Sandstein	631	Eis	541
Gips	360		

[1]) Wertheim und Chevandier, Ann. de chim. et de phys., (3), XIX, 129 und 25, 1847.

[2]) Wertheim und Chevandier, C. R., XXIII, 663; 1846.

[3]) Frankenheim, Cohäsionslehre, p. 272; Breslau 1835.

Bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Kautschuk bei verschiedenen Temperaturen fand Exner,[1]) dass sie von 56 bis auf 29 Meter abnimmt, wenn die Temperatur von 0^0 auf 74^0 steigt. Der Elasticitäts-Coefficient des Kautschuks nimmt also mit wachsender Temperatur ab. Diese Thatsache ist nicht ohne Bedeutung, da der Kautschuk auch unter dem Einfluss der Wärme Anomalien zeigt, die wir an ihrem Ort betrachten werden.

Elasticitätsgrenze. — Wertheim hat ferner die Elasticitätsgrenze einer ziemlich grossen Anzahl von Körpern zu bestimmen gesucht, indem er das Gewicht in Kilogramm feststellte, bei welchem ein Draht von 1 Millimeter Durchmesser eine dauernde Verlängerung von 0,5 Millimeter auf 1 Meter erfährt. Es mögen hier einige seiner Resultate folgen, welche sich auf die gewöhnlichen Metalle beziehen:

	Elasticitätsgrenze bei 15°		Elasticitätsgrenze bei 15°
Blei, gezogen . . .	0,25 kg	Kupfer, gezogen . .	12,00 kg
„ ausgeglüht . .	0,20	„ ausgeglüht .	3,00
Zinnn, gezogen . . .	0,45	Platin, gezogen . .	26,00
„ ausgeglüht . .	0,20	„ ausgeglüht .	14,50
Gold, gezogen . . .	13,50	Engl. Stahl, gezogen .	43,00
„ ausgeglüht . .	3,00	„ „ ausgeglüht .	15,00
Silber, gezogen . . .	11,20	Gussstahl, gezogen . .	55,60
„ ausgeglüht . .	2,70	„ ausgeglüht .	5,00
Zink, gezogen . . .	0,75	Eisen, gezogen . .	32,50
„ ausgeglüht . .	1,00	„ ausgeglüht .	5,00[2])
„ gegossen . . .	3,20		

Wie man sieht, sind die Zahlen bei den einzelnen Metallen sehr verschieden. Gewisse Körper, wie der Kautschuk, können eine bedeutende Deformation ertragen, ohne dass die Elasticitätsgrenze überschritten wird; andere dagegen, das Blei z. B., werden

---

[1]) Exner, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, p. 20; 1874.

[2]) Beispiel. — Es ist die maximale Länge eines cylindrischen Lothes aus gezogenem englischen Stahl zu berechnen. Damit keine dauernde Deformation entsteht, darf der obere Querschnitt höchstens ein Gewicht von 43 kg auf 1 qmm Querschnitt tragen. Man hat also

$$Ld = 43\,000,$$

wo L die gesuchte Länge in Meter und d die Dichte 7,8 des Stahls ist. Daraus folgt

$$L = 5510 \text{ m}.$$

Unter dem Einfluss des Eigengewichts P verlängert sich dieser Stab, wie man leicht sieht, um die Länge l, wo

$$l = \frac{1}{2}\frac{43 \times 5510}{19\,000} = 6{,}24 \text{ m},$$

da der Elasticitäts-Coefficient des Stahls gleich 19 000 ist.

schon durch sehr schwache Kräfte dauernd deformirt. Deshalb sagt man, der Kautschuk ist sehr elastisch, während das Blei es wenig ist. Diese Benennung kann neben der anderen beibehalten werden, wonach wir einen Körper unter seiner Elasticitätsgrenze als vollkommen elastisch bezeichnet haben.

Bei vielen Körpern ist die Elasticitätsgrenze unsicher, z. B. bei Drähten von Blei, Zinn und Zink, wenn diese nur sehr schwach belastet sind. Andere Körper, wie gehärteter Stahl, Glas und Marmor können dagegen einige Augenblicke lang bis zum Bruch belastet werden, ohne eine dauernde Verlängerung anzunehmen: ihre Ductilität ist Null.

Bei allen betrachteten Metallen, mit Ausnahme des Zinks, drückt das Ausglühen die Elasticitätsgrenze herab: besonders zeigt sich dies bei Platin, Eisen und Stahl. Im allgemeinen sinkt ferner die Elasticitätsgrenze mit steigender Temperatur.

Wenn man die Elasticitätsgrenze überschreitet, so beharrt der von den äusseren Einwirkungen befreite Körper in seiner angenommenen Gestalt, in welcher er noch bis zu einer gewissen Grenze vollkommen elastisch ist und merkwürdigerweise behält er denselben Elasticitäts-Coefficienten, welchen er in seinem ursprünglichen Zustande hatte (Gerstner, Wertheim). Überschreitet man die neue Elasticitätsgrenze, so nimmt der den äusseren Kräften entzogene Körper eine dritte dauernde Form an, wobei er immer denselben Elasticitäts-Coefficienten bewahrt, und so fort, bis der Stab sich nicht mehr dehnt. Diese Thatsache lässt sich sehr gut bei fast allen Metallen beobachten.

Die Zeit, während welcher die Zugkraft wirkt, übt auf die Hervorbringung der permanenten Verlängerung einen bemerkenswerthen Einfluss aus: eine weit geringere Belastung als diejenige, welche bei vorübergehender Wirkung an die Elasticitätsgrenze hinanreicht, ruft bei andauernder Wirkung eine bleibende Deformation hervor, deren Grösse von der Dauer der Belastung abhängt. Vicat beobachtete bei Eisendrähten eine fortschreitende Verlängerung, die sich fast über den Zeitraum von drei Jahren erstreckte. Die Belastung betrug dabei kaum den vierten Theil derjenigen, bei welcher der Stab zerrissen wäre. Wertheim constatirte manche analoge Thatsachen.

Es ist wahrscheinlich, dass die schwächste Belastung bei jedem Metall eine dauernde Dehnung hervorbringt, wenn sie nur hinreichend lange Zeit wirkt. Bei der Biegung und der Torsion werden wir ähnlichen Thatsachen begegnen, welche zeigen, dass die Elasticitätsgrenze keineswegs absolut fest ist, sondern von den begleitenden Nebenumständen abhängt.

Savart hat beobachtet, dass ein durch ein Gewicht belasteter metallischer Draht sich bedeutend ausdehnte, wenn er ihn in Schwingungen versetzte, obwohl das angewandte Gewicht viel zu klein war, um ihn bis zur Elasticitätsgrenze zu belasten.

153. Transversale Contraction eines gezogenen Stabes.

Gleichzeitig mit der Zunahme der Länge eines gezogenen Stabes findet eine Verkleinerung seines Querschnitt statt. Wenn die Verlängerung bedeutend ist, wie z. B. beim Kautschuk, so entsteht zugleich eine Deformation, da der mittlere Theil dünner wird als die Enden; aber diese Wirkung ist vollständig unmerklich bei schwachen Verlängerungen: die Einschnürung kann dann längs der ganzen Länge als gleich betrachtet werden.

Theorien von Navier und Poisson. — Aus einer unvollständigen Theorie hatte Navier[1]) geschlossen, dass der Coefficient der transversalen Contraction c ein Viertel des Coefficienten der longitudinalen Verlängerung sei. Von gewissen Hypothesen über die Art der Anziehung ausgehend, welche die aus ihrer Gleichgewichtslage gebrachten Molecüle eines festen Körpers auf einander ausüben, gelangte Poisson[2]) zu demselben Schluss:

$$\sigma = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}.$$

Versuch von Cagniard-Latour. — Ein klassisches Experiment,

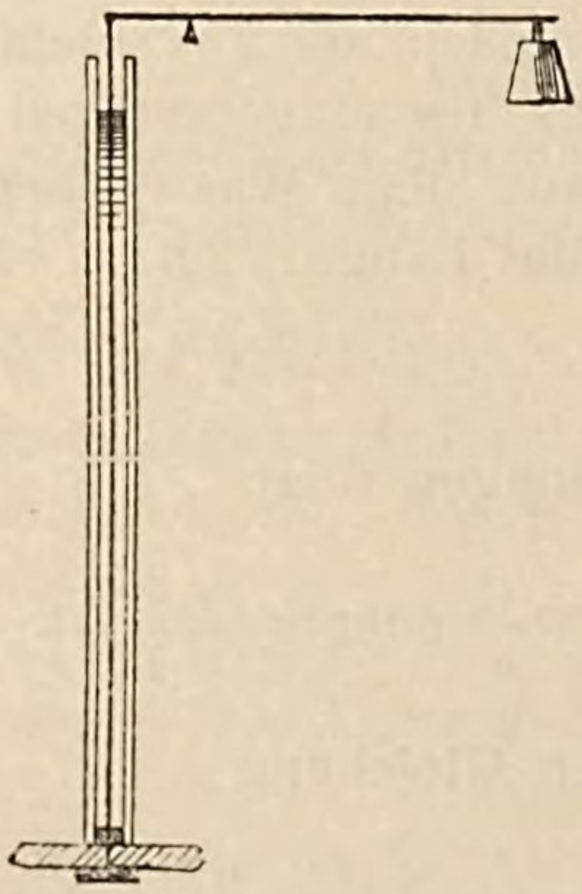


Fig. 212.

das wir Cagniard-Latour verdanken, bestätigt diesen Werth. Ein Kupferdraht von 2,03 m Länge wurde in die Achse einer cylindrischen

---

[1]) Navier, loc. cit.
[2]) Poisson, loc. cit.

Glasröhre gebracht und an einer metallischen Platte, welche die Röhre unten abschloss, befestigt. Oben war der Draht an dem Ende eines kleinen Hebelarms befestigt, mittels dessen eine Zugkraft in seiner Längsrichtung auf ihn einwirken konnte. Die Glasröhre wurde mit Wasser gefüllt.

Wenn man den Draht unten löste und ihn um 6 Millimeter hob, so sank das Niveau des Wassers um 5 Millimeter. Brachte man den Draht in seine Stellung zurück und übte einen hinreichend starken Zug auf ihn aus, so dass er sich um 6 Millimeter verlängerte, so sank das Niveau des Wassers um 2,5 Millimeter. Diese Thatsachen genügen, um die Frage zu entscheiden.

Wir bezeichnen mit s den Querschnitt des Fadens, mit S den ringförmigen Querschnitt der Röhre (also die Fläche zwischen der inneren Wand der Röhre und dem Draht); aus dem ersten Versuch folgert man

$$6s = 5S.$$

Bei dem zweiten Versuch hat man eine Verlängerung von 6 Millimeter hervorgebracht; und wenn L die ursprüngliche Länge des Drahts bedeutet, so ist La die Verlängerung, also

$$La = 6.$$

In transversaler Richtung wird die Einheit der Länge um c verkürzt, folglich ist die Einheit des Querschnittes in $(1 - c)^2$ übergegangen, oder wegen der geringen Grösse von c,[1]) in $(1 - 2c)$. Der Querschnitt ist demnach um $2cs$ kleiner geworden, und die Änderung des Volumens des eingetauchten Theiles ist, abgesehen von der Länge, die aus dem Wasser herausragt (eine im Verhältniss zu L sehr kleine Länge), $2Lcs$. Man hat folglich

$$2Lcs = 2{,}5\,S.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\frac{c}{a} \text{ oder } \sigma = \frac{2{,}5}{12}\frac{S}{s},$$

und da nach der ersten Gleichung

$$\frac{S}{s} = \frac{6}{5},$$

so kommt zuletzt

$$\sigma = \frac{1}{4}.$$

---

[1]) Es handelt sich immer nur um kleine Deformationen.

Dieser Versuch ist jedoch keiner grossen Genauigkeit fähig, da die Menisken unsichere Ablesungen liefern und die Menge des durch den gehobenen Draht mitgeführten Wassers nicht zu vernachlässigen ist.

Wenn man den Werth $\sigma = \frac{1}{4}$ als richtig annimmt, so ist die Änderung des Volumens Vu eines Stabes, der allein in der Richtung seiner Länge gezogen wird, $Vu = L(1+a)s(1-2c) - Ls$, oder, wenn man das Glied mit ac vernachlässigt, so erhält man:

$$Vu = V(a - 2c) = V\frac{a}{2},$$

d. h. die Änderung u der Volumeneinheit eines gezogenen Stabes ist die Hälfte der Änderung der Längeneinheit. Das Volumen wächst demnach mit der Zugkraft, folglich wird die Dichte kleiner.

Der Druck würde, wenn er allein in der Längsrichtung wirkte, genau die umgekehrten Resultate hervorbringen: Verminderung der Länge, Wachsen des Querschnittes um die Hälfte der Verkürzung der Längeneinheit, Verminderung der Volumeneinheit um die Hälfte der Abnahme der Querschnittseinheit und Wachsen der Dichte.

Theoretische Untersuchungen von Cauchy, Lamé und Kirchhoff. — Die Voraussetzungen, auf denen der Werth $\sigma = \frac{1}{4}$ beruht, sind nicht unbedingt richtig. Auch gegen den Versuch von Cagniard-Latour lassen sich, wie wir sahen, Einwände erheben. Deshalb wurde die Frage vom mathematischen Gesichtspunkt durch Cauchy[1]) wieder aufgenommen und ferner von Lamé, welcher zwar in seiner ersten Arbeit mit Clapeyron[2]) den Werth $\sigma = \frac{1}{4}$ angenommen hatte, später aber neue Betrachtungen darüber anstellte[3]): aus diesen theoretischen Untersuchungen, an denen sich auch Kirchhoff[4]) betheiligte, geht hervor, dass σ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen muss.

Versuche von Wertheim. — Wertheim machte neue experimentelle Untersuchungen.

Er stellte zuerst einen sehr einfachen Versuch an: ein Prisma aus gutem Kautschuk von 30 cm Länge und quadratischem Quer-

---

[1]) Cauchy, loc. cit.
[2]) Lamé und Clapeyron, Mémoires des savants étrangers, IV; 1833.
[3]) Lamé, loc. cit.
[4]) Kirchhoff, loc. cit.

schnitt, dessen Seite zwischen 0,9 cm und 4,7 cm betrug, wird an jedem Ende in einer eisernen Fassung befestigt, die mit einem Haken versehen ist. Vermittelst des oberen Hakens hängt man das Prisma an einem festen Stützpunkt auf, an dem unteren Haken bringt man Gewichte an. Wenn man den Kautschuk stark dehnt, kann man leicht die Verlängerung messen; ebenso leicht lässt sich die transversale Contraction mit dem Taster bestimmen. So lange die Verlängerung nicht die Hälfte der ursprünglichen Länge des Prismas überschreitet, entsteht keine merkbare Deformation und man findet ziemlich übereinstimmend $\frac{c}{a}$ oder $\sigma = \frac{1}{3}$.

Auf den Rath von Regnault stellte Wertheim darauf Versuche mit hohlen Röhren aus Krystallglas oder Messing an und suchte zu bestimmen, welche Änderung des Volumens der innere Hohlraum der Röhre erfährt, wenn man längs der Achse eine Zugkraft anbringt. Es ist in der That leicht zu sehen, dass diese Änderung des Volumens ganz dieselbe sein muss, wie bei einem massiven Stabe aus demselben Stoffe, der die innere Weite des Rohres ausfüllt und auf dessen Querschnittseinheit dieselbe Zugkraft wirkt. Es folgt dies offenbar aus dem Princip, welches wir schon oben erwähnt haben (**142**): Fügt man zwei oder mehrere Stäbe von demselben Querschnitt so zusammen, dass sie einen einzigen Stab bilden, so verhält sich jeder einzelne Stab unter dem Einfluss einer der Achse parallelen Zugkraft genau so, als ob die anderen nicht vorhanden wären. Nach diesem Princip werden sich zwei Ebenen AB und CD, die beide der Achse der Röhre parallel sind, um

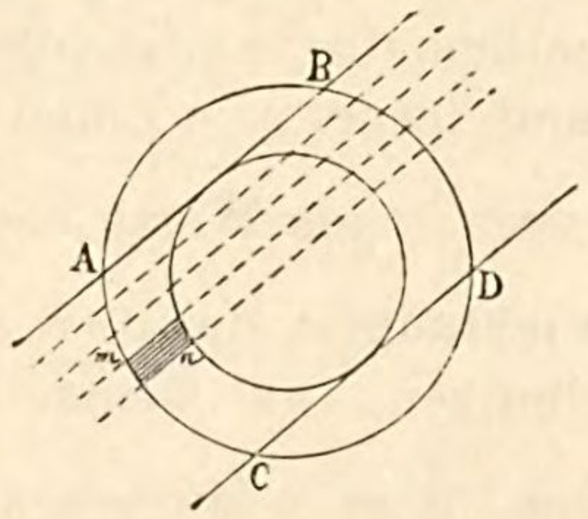


Fig. 213.

dieselbe Grösse nähern, ob der Stab hohl oder massiv ist, wenn nur die Zugkraft auf der Einheit des Querschnittes dieselbe bleibt; denn jedes der elementaren Prismen mn, welche man erhält, wenn man zwischen AB und CD unendlich viele zu AB und CD parallele Ebenen legt, verhält sich in beiden Fällen auf gleiche Weise.

Die Röhren waren an ihren beiden Enden an dicke cylindrische Stücke aus Metall gelöthet oder gekittet: das Stück a schloss die Röhre PQ unten ab und trug einen Haken, an welchen man das

spannende Gewicht befestigte. Das obere Ansatzstück war mit einem vorspringenden Rand versehen, mit welchem man es in einem Schraubstock festklemmte. Die Röhre durchsetzte die Bohrung des Ansatzstückes und endigte in eine capillare Glasröhre t. Der ganze Apparat wurde bis in die capillare Röhre hinauf mit destillirtem Wasser angefüllt. Da die Cylinder an den Enden in Folge ihrer Dicke keine Änderung erlitten, so beschränkte sich die beobachtete Volumenänderung auf das Stück zwischen zwei Strichen, welche vorher möglichst nahe an den Ansatzcylindern auf der Röhre angebracht waren. Man hatte im Voraus den äusseren Durchmesser der Röhre (mit dem Sphärometer) und ihren inneren Durchmesser (durch eine Quecksilberwägung) gemessen, man kannte also den inneren Querschnitt S, ebenso den ringförmigen Querschnitt (der zur Berechnung der Belastung für die Einheit des Querschnittes dient). Ferner war der innere Querschnitt ω der capillaren Röhre bestimmt. Die Länge L der Röhre beobachtete man vor der Wirkung der Zugkraft, liess als dann das Gewicht wirken und beobachtete die Verlängerung La der Röhre und das Sinken des Wassers λ in der Capillare t. Da $\frac{\omega\lambda}{LS}$ die Änderung u der Volumeneinheit bedeutet, so hat man unmittelbar das Verhältniss $\frac{u}{a}$, woraus man ohne Mühe $\frac{c}{a}$ ableitet, weil

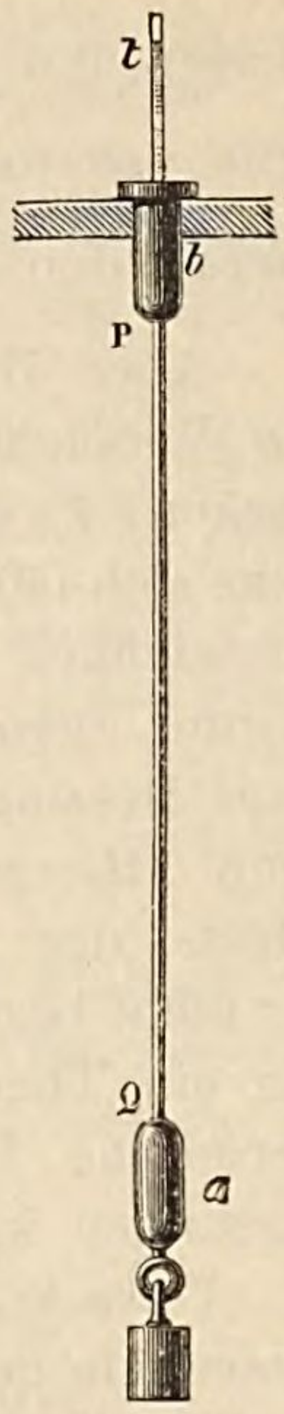


Fig. 214.

$$u = a - 2c.$$

Wir haben gesehen, dass, wenn $\frac{c}{a}$ oder $\sigma = \frac{1}{4}$ ist, $\frac{u}{a} = \frac{1}{2}$ wird; wenn $\sigma = \frac{1}{3}$ ist, würde $\frac{u}{a} = \frac{1}{3}$ sein. Nun ist aber dieser Werth $\frac{u}{a} = \frac{1}{3}$ genau gleich demjenigen, welchen Wertheim erhielt:

Röhren		Vu: beobachtet	Vu: berechnet, wenn $\frac{u}{a} = \frac{1}{3}$
Krystallglas	I	3,8613	3,5767
	II	2,4217	2,7093
	III	1,1472	1,0188
	VI	0,7786	0,7959
Messing . .	I	0,52017	0,54032
	II	0,54363	0,58578
	III	0,56104	0,59299

Er schloss deshalb aus seinen Messungen, dass $\sigma = \frac{1}{3}$ sein müsse, und da er schon vorher bei Kautschuk $\sigma = \frac{1}{3}$ gefunden hatte, so folgerte er, dass σ bei allen Körpern gleich sei und überall den Werth $\frac{1}{3}$ habe.

Aber abgesehen von der geringen Genauigkeit, welche sich bei den Versuchen mit Kautschuk[1]) erreichen lässt, müssen wir bemerken: 1) dass in der Nähe der Marken die Änderung des Volumens sich offenbar anders verhält, als Wertheim annimmt; 2) dass die Ungleichheit in der Dicke der Rohrwandungen, die fast unvermeidlich ist und ausserdem nicht untersucht wurde, beim Glase sowohl als beim Messing hinreichend grosse Fehler in die Messungen bringen kann. Hierzu kommen 3) noch die Fehler wegen des thermischen Effects, der mit der Spannung auftritt. Diesen hat Wertheim aber gar nicht berücksichtigt, obwohl sein Apparat im Grunde genommen nur ein Thermometer mit grossem Gefäss bildet und deshalb für thermische Einflüsse sehr empfindlich ist. Die Resultate dieser Messungen können deshalb nicht als sicher angesehen werden.

Versuche von Kirchhoff, Okatow und Schneebeli. — Kirchhoff[2]) unternahm neue Experimente mittelst einer besonderen Deformation, die zugleich aus einer Biegung und einer Torsion bestand und deren theoretischen Werth er vorher als Function von σ berechnet hatte, so dass er aus der Messung der durch ein gegebenes Gewicht hervorgebrachten Biegung und Torsion σ berechnen konnte. Er stellte besonders Versuche mit gehärtetem Stahl an, den er als vollständig homogen und isotrop ansah: bei drei verschiedenen Stäben fand er:

1. Stab aus gehärtetem Stahl		$\sigma = 0{,}293$
2. „ „ „ „		0,295
3. „ „ „ „		0,294
	Im Mittel	0,294

Ferner ergab ein Messingstab, der in Folge des Durchganges durch das Zieheisen hart geworden war,

Messingstab $\sigma = 0{,}387$.

---

[1]) Als Naccari und Bellati nach der Regnault'schen Methode Versuche mit vier Kautschukröhren anstellten, die aus derselben Fabrik stammten, fanden sie Werthe, die zwischen 0,31 und 0,41 schwankten (Nuovo Cemento (3), II, 217; 1877).

[2]) Kirchhoff, Pogg. Ann., CVIII, 369; 1859.

Obwohl diese letzte Zahl nicht genau mit derjenigen vergleichbar ist, die sich auf den gehärteten Stahl bezieht, da das Messing, welches durch das Zieheisen gegangen war, sicher viel weniger homogen war als der Stahl, so scheint dennoch die bedeutende Abweichung des Messings vom Stahl einen wirklichen Unterschied zwischen den Werthen von σ anzuzeigen, die sich auf zwei verschiedene Körper beziehen.

Okatow[1]) nahm die Messungen mit dem Stahl wieder auf und fand, dass σ mit der Natur und dem Zustand des Metalles variirt.

	Stricknadel	Draht aus engl. Stahl
Im Anfangszustande	$\sigma = 0{,}275$	$\sigma = 0{,}299$
Nach einer Erhitzung in Öl . .	0,297	0,319
Vollständig ausgeglüht	0,304	0,328

Durch die Untersuchung der Schwingungen von Stahlstäben, welche bis zu einem Meter lang waren und 2 cm Durchmesser hatten, hat Schneebeli[2]) die Zahlen von Kirchhoff und Okatow bestätigt; er fand nämlich:

Stahl, gehämmert	$\sigma = 0{,}296$
„ ausgeglüht	0,303

Aus allen diesen Arbeiten, sowie aus anderen, welche wir an ihrer Stelle besprechen werden, scheint hervorzugehen, dass σ bei den verschiedenen natürlichen festen Körpern verschieden und zugleich auch von deren mechanischem Zustande abhängig ist.

Untersuchungen von de Saint-Venant; Experimente von Cornu. — Wir wollen indessen nicht vergessen zu erwähnen, dass de Saint-Venant, welcher das Newton'sche Gesetz auf die molecularen Wirkungen anwandte, den Werth $\sigma = \frac{1}{4}$ für alle wirklich isotropen festen Körper fand (**142**). Cornu kam bei seinen neueren Untersuchungen zu demselben Schluss (**162**).

154. Deformation eines auf seiner ganzen Oberfläche gleichmässig gepressten Körpers. — Ein besonders wichtiger Fall für die Untersuchung der Elasticität des Druckes ist der, wo ein voller oder hohler Körper gleichförmig und zwar normal zu seiner ganzen Oberfläche gepresst wird. Alle Dimensionen des

---

[1]) Okatow, Pogg. Ann., CXIX; 11; 1863.
[2]) Schneebeli, Pogg. Ann., CXL; 598; 1870.

Körpers werden alsdann kleiner, aber das kleinere Volumen bleibt sich selbst ähnlich, wenn der Körper isotrop ist. Nennt man k den Compressibilitäts-Coefficienten, so hat man

$$V = V_0 (1 - kP).$$

Theoretische Compressibilität. — Der Coefficient k ist mit dem Coefficienten der Verlängerung a durch die folgende sehr einfache Gleichung verknüpft:

$$k = 3 (1 - 2\sigma) a. \qquad (26^b)$$

Nach Navier und den meisten französischen Gelehrten ist bei den isotropen festen Körpern $\sigma = \frac{1}{4}$, also

$$k = \frac{3}{4} a.$$

Nach Wertheim hat man bei allen festen Körpern $\sigma = \frac{1}{3}$, folglich

$$k = a.$$

Nach anderen endlich ist σ bei den verschiedenen Körpern verschieden und

$$k = m a,$$

wo $m = 3 (1 - 2\sigma)$ einen bei den einzelnen Körpern verschiedenen Werth hat.

Experimente von Regnault. — Die directe Messung der kubischen Compressibilität ist nur in wenigen Versuchen ausgeführt. In seiner Arbeit über die Compressibilität der Flüssigkeiten hat Regnault[1]) nebenbei einige Messungen der Compressibilität der festen Körper gemacht. Er experimentirte mit Gefässen von geometrisch bestimmter Form, kugelförmigen oder cylindrischen mit halbkugligen Enden. Das beim Experiment gebrauchte Gefäss, welches oben getheilte Rohre trug, wurde mit frisch ausgekochtem Wasser angefüllt und mitten in ein ebenfalls mit Wasser angefülltes, weiteres Gefäss aus Metall gebracht. Ein System von Röhren und Hähnen, die man sich leicht hinzudenken kann, gestattete es, das kleine und grosse Gefäss mit einem grossen Raum, der comprimirte Luft

---

[1]) Regnault, loc. cit., 429.

enthielt, oder mit der äusseren Luft in Verbindung zu setzen, so dass man den Druck entweder allein auf die innere, oder gleichzeitig auf die innere und äussere Oberfläche des kleinen Gefässes

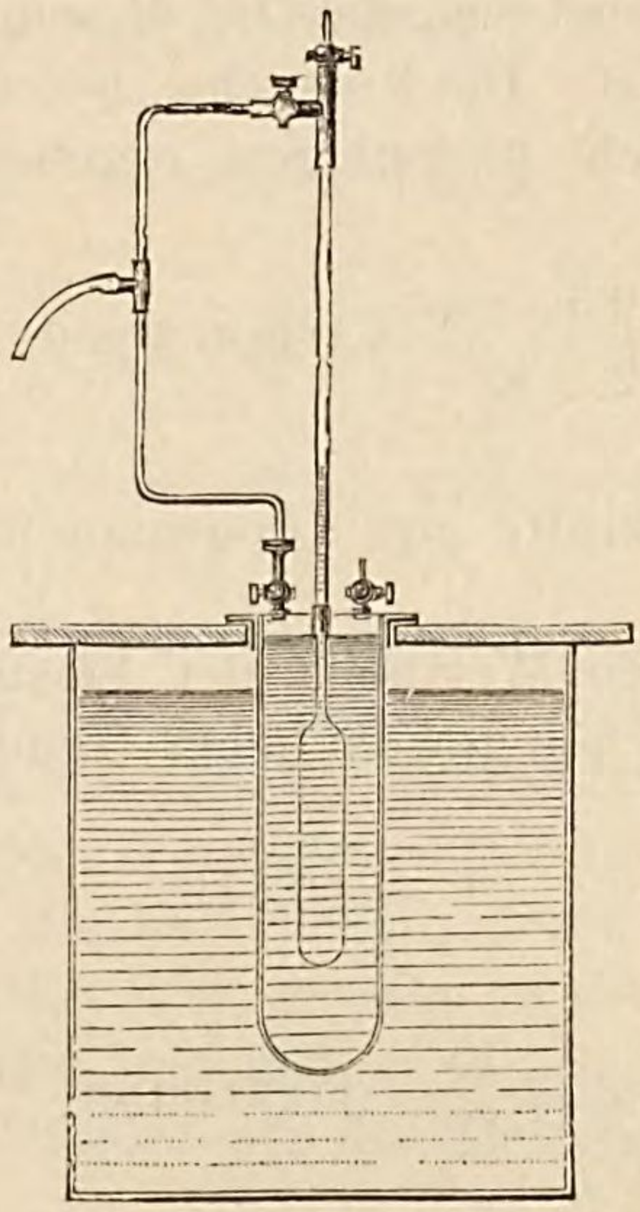


Fig. 215.

wirken lassen konnte. Das grosse Gefäss selbst stellte man wieder in einen weiten, mit Wasser gefüllten Bottich, um die thermischen Wirkungen des Drucks zu vernichten.

Nachdem die vorläufigen Constantenbestimmungen ausgeführt worden sind, genügt es für unseren vorliegenden Zweck, an der getheilten Röhre die Volumenänderung des inneren Hohlraumes zu beobachten, wenn auf das innere Gefäss von aussen allein ein Druck ausgeübt wird. Der innere Hohlraum desselben erfährt alsdann eine Verkleinerung des Volumens, die bedeutender ist als diejenige, welche ein fester Kern von derselben Substanz und denselben Dimensionen erleiden würde. Denn da die Wand auf ihrer Innenseite keinen Druck erfährt, so zieht sie sich mehr zusammen, als wenn ein innerer Kern auf sie eine Rückwirkung ausübte. Aus der gemessenen Abnahme des inneren Volumens und dem Elasticitäts-Coefficienten der Substanz lässt sich aber σ (und folglich k) finden, wie wir oben gesehen haben (**149**).

Regnault hat nach einander mit einer hohlen Kupferkugel, einer hohlen Messingkugel und einem hohlen Cylinder aus Glas, der halbkuglige Enden hatte, Versuche angestellt.

Wenn man den Werth von $\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E}$ (34) aus den Resultaten des Experiments mit der Kugel berechnet, so findet man, dass diese Grösse bis auf sechs Atmosphären constant ist, alsdann aber zunimmt. Hiermit ist bewiesen, dass bei diesem Druck die Elasticitätsgrenze überschritten ist. Die Versuche, bei denen die Druckkräfte sechs Atmosphären nicht überstiegen, ergeben

$$\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E} = 0{,}000\,303\,9,$$

wenn man die Druckkräfte auf Kilogramm und Quadratmillimeter zurückführt.

Nun ist aber nach Wertheim der Elasticitäts-Coefficient des ausgeglühten Kupfers bei gewöhnlicher Temperatur

$$E = 10\,519,$$

folglich

$$a = \frac{1}{E} = 0{,}000\,095\,1.$$

Man hätte also

$$\sigma = 0{,}290$$

und

$$k = 0{,}000\,119\,9.$$

Die Messingkugel gab für $\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E}$ bis zu zehn Atmosphären constante Werthe. Dies beweist, dass bei diesem Druck die Elasticitätsgrenze noch nicht erreicht war. Man kann also hier alle Versuche in Rechnung ziehen und erhält:

$$\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E} = 0{,}000\,325\,6.$$

Nach Wertheim ist

$$E = 9\,217,$$

folglich

$$a = 0{,}000\,107\,8.$$

Man hätte also

$$\sigma = 0{,}329$$

und

$$k = 0{,}000\,110\,5.$$

Wenn man endlich bei dem cylindrischen Glasgefäss von einer Formel ausgeht, analog derjenigen, welche sich auf kugelförmige Gefässe bezieht und ferner annimmt, dass

$$E = 6\,040,$$

so ist

$$a = 0{,}000\,165\,5,$$

man findet also

$$\sigma = 0{,}319$$

und

$$k = 0{,}000\,179.$$

Die Versuche ergeben mithin, dass σ bei den einzelnen Körpern verschieden ist. Wir haben jedoch zu bedenken, dass bei der Berechnung der Endresultate der Elasticitäts-Coefficient, welcher an einem Probestück gemessen wurde, mit der kubischen Compressibilität verglichen ist, die an einem anderen Probestück derselben Substanz bestimmt wurde. Ferner nahmen wir an, dass die Wandung des Gefässes vollkommen homogen ist und die vorausgesetzte genaue Form hat und dass letztere bei der Deformation sich selbst ähnlich bleibt.

155. Manometer von Cailletet, welches auf der Compressibilität des Glases beruht. — Cailletet hat für die Messung von hohen Druckkräften ein Manometer ausgedacht, welches darauf beruht, dass ein cylindrisches Gefäss Deformationen erleidet, wenn man auf seine Aussenwände einen Druck ausübt. Messungen, die er mittelst eines offenen Luftmanometers von grossen Dimensionen anstellte, zeigten ihm nämlich, dass die Volumenabnahme eines Glasgefässes dem darauf ausgeübten Druck fast bis zur Bruchgrenze proportional ist und dass ausserdem, wenn die Druckkraft nicht zu lange wirkt, das Glas keine merkbare dauernde Änderung erfährt. Das Manometer von Cailletet ist sehr einfach: es besteht aus einer Art von Glasthermometer, dessen cylindrisches Gefäss mit halbkugligem Ende mit irgend einer Flüssigkeit gefüllt ist. Die genau calibrirte capillare Röhre T, welche an das Gefäss angeschmolzen ist, hat eine Erweiterung, die mittelst Guttapercha in einem kupfernen Verbindungsrohr befestigt ist. Letzteres wird durch die Schraube B hermetisch geschlossen und setzt sich in eine sehr feste Stahlröhre A fort, die als Gefäss dient und die den Druck durch die feste kupferne Röhre C erhält. Bevor man diesen wirken lässt, bringt man den Nullpunkt der getheilten Scala auf

das Niveau der Flüssigkeit in der capillaren Röhre, indem man die Scala längs der Führungsstange *M* verschiebt und sie mittelst

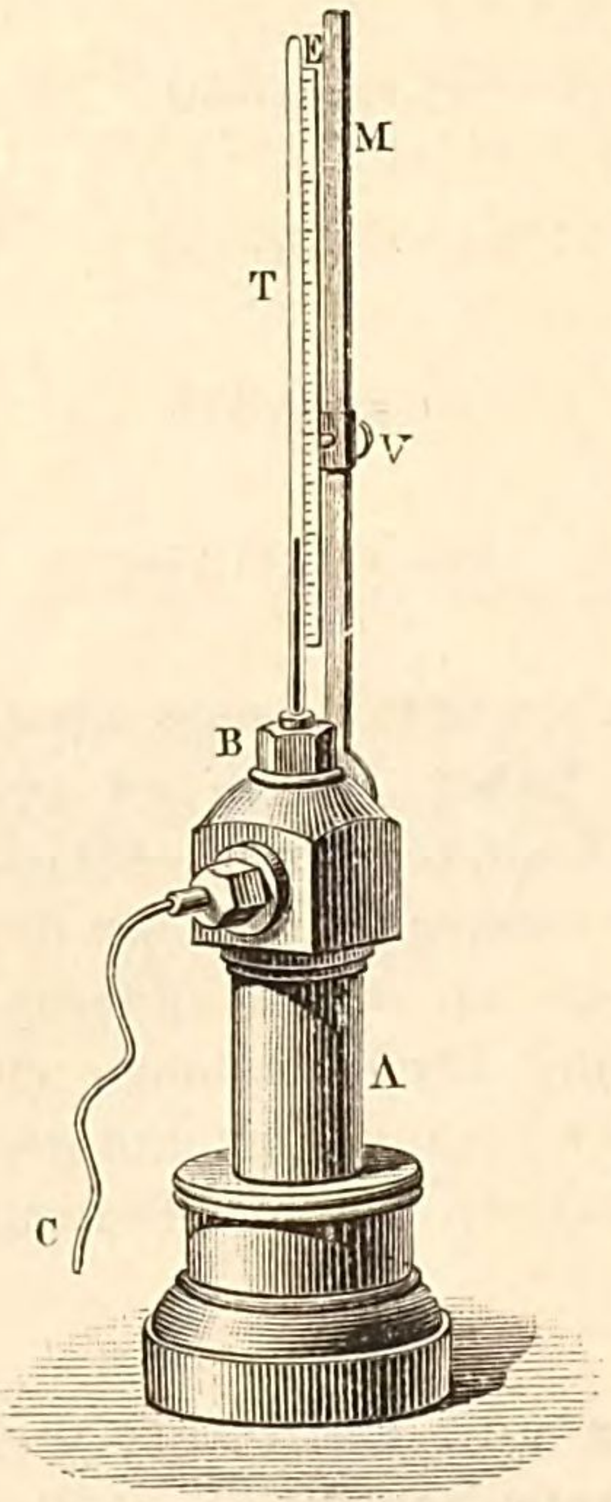


Fig. 216.

der Klemmschraube *V* feststellt. Die Höhe, bis zu welcher sich die durch die Volumenverminderung verdrängte Flüssigkeit erhebt, zeigt unmittelbar den Druck an.

B. Torsion.

156. Arbeiten von Coulomb. — Die Gesetze der Torsion sind von Coulomb[1]) auf folgende Weise gefunden worden: Ein sehr feiner Metalldraht *AB*, der an seinem oberen Ende in einer starken Klemme befestigt ist, trägt an seinem unteren Ende ein kugel- oder cylinderförmiges Gewicht *C*. Unter dieses ist ein sehr leichter Zeiger geklebt, der sich über einem Theilkreis *MN* bewegt, dessen Mittelpunkt in der Verlängerung des Fadens liegt. Man ergreift den Cylinder mit der Hand, dreht ihn um einen gewissen

[1]) Coulomb, loc. cit. und Biot, Traité de physique, I.

Winkel und überlässt alsdann den Apparat sich selbst. Die Rückwirkung der Torsion tritt nun auf, der Faden dreht sich ab und das System kommt in die Gleichgewichtslage zurück. Die erlangte

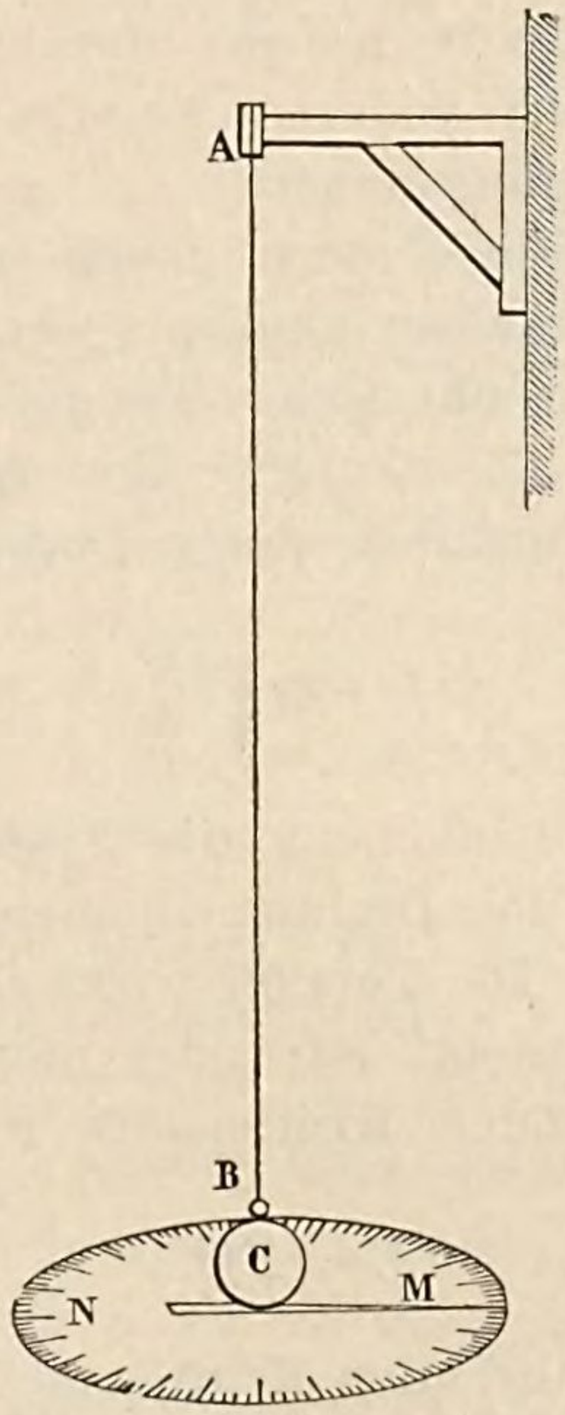


Fig. 217.

Geschwindigkeit lässt es aber über diese Lage hinausschwingen, und der Faden tordirt sich im entgegengesetzten Sinne um einen fast gleichen Winkel wie zuerst. Darauf kommt das System zum Stillstand, kehrt zurück und führt in dieser Weise eine Reihe von Schwingungen aus, die sich ohne die passiven Widerstände unbegrenzt fortsetzen würden und die in Wirklichkeit mit langsam abnehmender Amplitude sehr lange andauern.

Nun zeigen diese Schwingungen einen bemerkenswerthen Charakter, welcher Coulomb sofort auffiel: sie sind nämlich isochron, wie gross auch immer der Torsionswinkel ist.[1]) Um diese That-

[1]) Es ist klar, dass dieser Satz nicht buchstäblich aufgefasst werden darf; die Grenze für die Amplitude, bis zu welcher die Schwingungen isochron sind, ist aber immer sehr weit. So war sie 180° bei den Eisendrähten No. 12 und No. 7, welche 9 Zoll Länge hatten und durch Gewichte von $^1/_2$ oder von 2 Pfund gespannt waren; bei Kupferdrähten von denselben Nummern und unter denselben Bedingungen trat die Grenze erst bei 360° auf; bei einem Kupferdraht No. 7 von 36 Zoll Länge stieg sie

sache mit aller Strenge festzustellen, wendet man die Methode der Durchgänge an (**91**), indem man aus der Ferne den Zeiger mit einem Fernrohr beobachtet: man bestimmt die Dauer einer gewissen Anzahl von Schwingungen, welche eine beliebige, auf dem Theilkreis gemessene Amplitude haben; darauf macht man dieselbe Messung bei einer ganz anderen Amplitude und findet alsdann genau dieselbe Schwingungsdauer.

Weil die Schwingungsdauern gleich sind, so folgt, dass die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist. Wir wissen nämlich (**88**), dass ein physisches Pendel unter der Einwirkung einer Kraft, die dem Ablenkungswinkel Θ proportional ist, isochrone Schwingungen ausführt, deren Dauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{Q}{T}}$$

ist, wo Q das Trägheitsmoment des Systems, bezogen auf die Drehungsachse, und T das Drehungsmoment für den Ablenkungswinkel Eins bedeutet. Die Torsion wirkt also wie eine Kraft, die der Ablenkung proportional ist; oder mit anderen Worten, das Moment C des tordirenden Kräftepaars ist dem Torsionswinkel proportional

$$C = T\Theta. \tag{44}$$

Das Moment T des tordirenden Kräftepaars für einen Winkel, der gleich der Einheit ist, heisst die *Torsionsconstante.*

Die Dauer einer einfachen Schwingung ist also

$$t = \pi \sqrt{\frac{Q}{T}}. \tag{45}$$

Bei dem Versuch von Coulomb ist das Trägheitsmoment des Fadens gegen dasjenige des daran befestigten Cylinders vollständig zu vernachlässigen.

Das Trägheitsmoment eines Cylinders von dem Radius r und der Höhe h, bezogen auf seine Achse, ist $\frac{1}{2} Mr^2$, wenn man mit M die Masse $\pi r^2 h D$ des Cylinders bezeichnet (**60**). Man hat alsdann

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2} Mr^2}{T}}.$$

---

auf $3 \times 360°$. Sie war nicht grösser als 45° für einen Eisendraht und nicht mehr als 50° für einen Kupferdraht No. 1 von 9 Zoll Länge, die durch ein Gewicht von 2 Pfund gespannt waren.

Wenn man statt des Cylinders eine Kugel vom Radius r nimmt, so hat man

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} M r^2}{T}}.$$

Es würde übrigens vorzuziehen sein, das Trägheitsmoment experimentell zu bestimmen, wie es Gauss bei seinen Messungen der Intensität des Erdmagnetismus gethan hat.

Auf alle Fälle liefert alsdann die Messung von t die Torsionsconstante T der Formel (45).

Wenn man dasselbe spannende Gewicht beibehält, folglich $\Sigma m r^2$ constant lässt, aber die Dimensionen oder den Stoff des Fadens ändert, so sind die Werthe T und T' der Torsionsconstante bei zwei verschiedenen Versuchen dem Quadrat der Schwingungsdauer umgekehrt proportional

$$\frac{T}{T'} = \frac{t'^2}{t^2}.$$

Man kann also aus der beobachteten Schwingungsdauer in jedem einzelnen Fall den Einfluss irgend einer Bedingung des Versuchs ableiten, wenn die übrigen Verhältnisse dieselben bleiben.

Auf diese Weise fand Coulomb:

1. *Das Gesetz der Länge.* — Die Torsionsconstante eines bestimmten Drahtes ist der Länge umgekehrt proportional.

Zwei Kupferdrähte No. 7 von verschiedener Länge, 9 Zoll und 36 Zoll, ergaben mit derselben Belastung (2 Pfund)[1]) für die Dauer von 20 Schwingungen die Werthe von 110 Sec. und 222 Sec., d. h. zwei Zahlen, die im Verhältniss von 1 zu 2 stehen. Das Gesetz leuchtet

---

[1]) Die Torsionsconstante ist unabhängig vom spannenden Gewicht. Coulomb hat dies dadurch bewiesen, dass bei verschiedenen Gewichten von demselben Durchmesser, welche in Folge dessen denselben Gyrationsradius hatten, die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Masse proportional war. So fand er für die Dauer von 20 Schwingungen:

für	einen	Eisendraht	No.	12,	gespannt	durch	$^1/_2$	Pfund	120 Sec.
„	„	„	„	12	„	„	2	„	242
„	„	„	„	7	„	„	$^1/_2$	„	42
„	„	„	„	7	„	„	2	„	85
„	„	Kupferdraht	„	12	„	„	$^1/_2$	„	220
„	„	„	„	12	„	„	2	„	442
„	„	„	„	7	„	„	$^1/_2$	„	57
„	„	„	„	7	„	„	2	„	110

(No. 12, 7 und 1 entsprechen dem Durchmesser 0,15, 0,45 und 1,90 mm.)

übrigens a priori ein. Denn ein Draht, der an seinem oberen Ende befestigt ist und unten durch ein Kräftepaar tordirt wird, bleibt in seiner oberen Hälfte im Gleichgewicht, wenn man das Kräftepaar in die Mitte des Fadens versetzt, also dahin, wo der Torsionswinkel offenbar nur halb so gross ist als am unteren Ende; dasselbe Kräftepaar tordirt einen Draht von der halben Länge nur um den halben Winkel oder anders ausgedrückt, um einen Draht von der halben Länge um denselben Winkel zu tordiren, ist ein Kräftepaar vom doppelten Moment nöthig.

2. *Das Gesetz der Durchmesser.* — Die Torsionsconstante für einen gegebenen Draht ist der vierten Potenz des Durchmessers proportional.

Coulomb kam durch eine scharfsinnige Folgerung zu diesem Gesetz. Die Kraft, welche an einem beliebigen Punkt des Fadens angreift, ist der Verschiebung proportional, welche unter sonst gleichen Bedingungen wiederum dem Durchmesser proportional ist; folglich ist die Kraft selbst dem Durchmesser proportional und das Moment dieser Kraft dem Quadrat des Durchmessers. Da andererseits die Zahl der in Betracht kommenden Punkte dem Querschnitt des Drahtes proportional ist, d. h. dem Quadrat des Durchmessers, so ist die Summe aller Momente der elastischen Kräfte der vierten Potenz des Drahtdurchmessers proportional. Bei drei Kupferdrähten von derselben Länge (9 Zoll), aber von verschiedenem Durchmesser (No. 12, 7 und 1), welche durch dasselbe Gewicht (2 Pfund) gespannt waren, beobachtete Coulomb für die Dauer von 20 Schwingungen die Werthe von 442 Sec., 110 Sec. und 32 Sec.; nun wog aber dieselbe Länge (6 Fuss) eines jeden dieser Drähte 5, 18,5 und 66 Gran, und wenn man jede Zeitdauer mit dem entsprechenden Gewicht multiplicirt, so erhält man: 2210, 2035 und 2112, d. h. drei fast gleiche Zahlen, womit das Gesetz bewiesen ist. Drei Eisendrähte (No. 12, 7 und 1) von gleicher Länge und gleicher Belastung ergaben in ähnlicher Weise 242 Sec., 85 Sec. und 23 Sec., und da die Gewichte einer Länge von 6 Fuss dieser Drähte 5, 14 und 56 Gran waren, so erhielt man als Producte 1210, 1190 und 1288: das Gesetz ist also bewiesen.

3. *Der Einfluss des Stoffes.* — A priori einleuchtend, geht dieser Einfluss auch unmittelbar aus den obigen Experimenten hervor.

Fassen wir alles zusammen, so ist die Torsionsconstante für einen bestimmten Draht umgekehrt proportional der Länge und direct proportional der vierten Potenz des Durchmessers; ausserdem hängt sie von der Natur des Drahtes ab.

Man hat also

$$T = A\frac{r^4}{l}; \qquad (46)$$

folglich

$$\Theta = \frac{1}{A}\frac{l}{r^4}C,$$

wo A ein für denselben Stoff constanter Coefficient ist und C das Moment Pl des Kräftepaares bezeichnet, das die Torsion hervorbringt.

Man sieht, dass man bei einem Draht von bestimmter Natur und von hinreichender Länge und Feinheit der Grösse T einen beliebig kleinen Werth geben kann: man hat auf diese Weise ein Mittel, durch die Torsionselasticität den kleinsten Kräften das Gleichgewicht zu halten und gleichzeitig sie zu messen, da das tordirende Kräftepaar immer dem Torsionswinkel proportional ist. Es ist dies das Princip der Coulomb'schen Drehwage, die in einer speciellen Form, wie wir schon gesehen haben, zur Messung der Erddichte dient (**105**).

Coulomb erkannte ferner, dass eine zu starke Torsion eine permanente Deformation verursacht; aber der so deformirte Draht gehorcht denselben Gesetzen und hat denselben Torsions-Coefficienten, die Elasticitätsgrenze ist nur weiter hinausgeschoben; der Faden erträgt, ohne eine neue permanente Deformation zu erfahren, stärkere Torsionen als diejenige, welche ihn zum ersten Male deformirt hat. Man kann darauf eine neue permanente Wirkung erzeugen und beobachtet alsdann dieselben Erscheinungen; dies dauert so lange fort, bis endlich der Draht bricht.

157. Versuche von Savart und von Wertheim. — Coulomb hatte nur mit Drähten experimentirt, Savart's[1]) Versuche erstreckten sich auch auf feste Stäbe. Der Stab, der horizontal auf einer Drehbank lag, war an einem seiner Enden in einem Schraubstock befestigt, während das andere, gegen eine Spitze gestützt, einen Hebel trug, an welchen man ein Gewicht befestigte.

Wertheim[2]) nahm diese Versuche wieder auf. Der zu untersuchende Stab AB wurde an seinen beiden Enden in zwei Futtern einer starken gusseisernen Bank befestigt. Das eine derselben D war fest, das andere C dagegen konnte sich um seine Achse

---

[1]) Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), XLI, 373; 1829.
[2]) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3), L, 195; 1857.

bewegen und trug ein Rad S, an dessen Peripherie zwei gleiche Gewichte P und P' mittelst Schnüren und einer Führungsrolle derart angriffen, dass sie ein Kräftepaar bildeten. Unter dessen

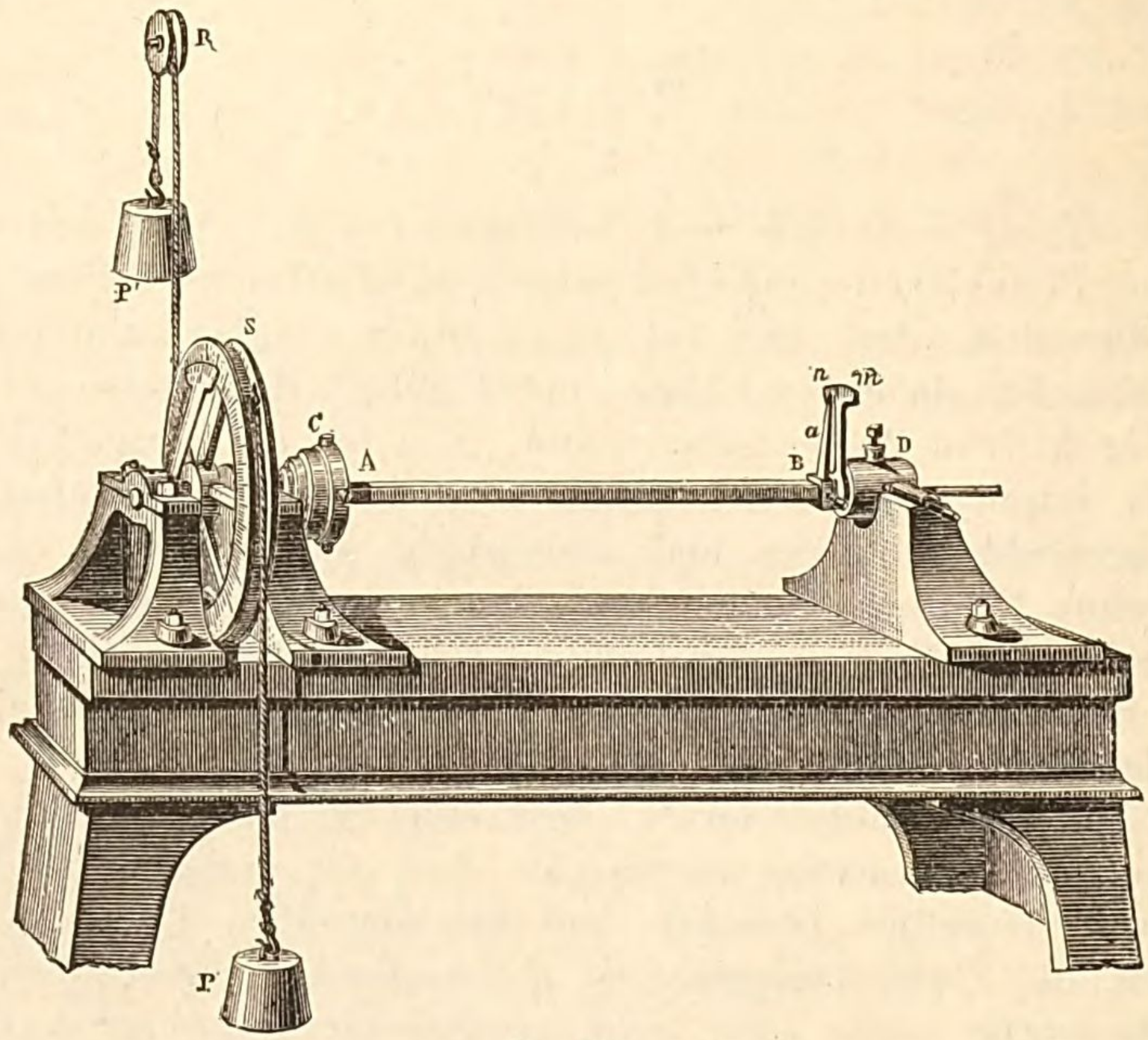


Fig. 218.

Einwirkung wurde der Stab um einen Winkel tordirt, den man durch die Drehung maass, welche eine auf dem Rade angebrachte Kreistheilung gegen eine unbewegliche Alhidade erfuhr. Das feste Futter hat gleichfalls eine Theilung, vermittelst deren sich controliren liess, ob sich das Stabende in dem einspannenden Futter nicht bewegte. Das Stabende trug zu diesem Zwecke eine Alhidade a, die der Theilung mn gegenüber lag.

Wertheim fand, dass der Torsionswinkel etwas schneller wächst als das Kräftepaar, welches die Torsion hervorbringt, gerade als ob der Widerstand in dem Maasse abnimmt, in welchem die Torsion wächst. Er fand ferner, dass der Torsionswinkel weniger schnell wächst als die Länge und dass er einer Grenze zustrebt, welche er erreichen würde, wenn die transversalen Dimensionen im Verhältniss zur Länge zu vernachlässigen wären. Indem er auch hohle Röhren untersuchte, die in ein Capillarrohr endigten, fand er eine Abnahme des inneren Volumens, die um so bedeutender ist, je mehr die beiden transversalen Dimensionen sich von einander unterscheiden. Er beobachtete ferner stets eine gewisse

dauernde Wirkung, wie schwach die Torsion auch immer war. Von diesen Einschränkungen abgesehen, sind die von Coulomb aufgestellten Gesetze zutreffend; und es gilt:

$$\Theta = \frac{1}{\mu}\frac{lC}{B^4}, \qquad (48)$$

wo B^4 ein Ausdruck vierten Grades ist, der folgende Werthe hat:

für einen runden Stab vom Radius r .	$\frac{\pi r^4}{2}$,
für eine Röhre mit den Radien r und r'	$\frac{\pi (r^4 - r'^4)}{2}$,
für einen rechteckigen Stab von der Breite b und der Dicke e . .	$\frac{be(b^2 + e^2)}{12}$.

Es mögen noch einige Torsions-Coefficienten μ folgen, die von Wüllner[1]) nach den Experimenten von Wertheim berechnet sind; wenn man sie mit den Elasticitäts-Coefficienten E vergleicht, die gleichfalls von Wertheim bestimmt sind, so kann man mittelst der Formel

$$\mu = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\sigma)} \qquad (b)$$

die Werthe von σ aufstellen, welche die letzte Colonne der Tabelle giebt.

	Radius des Stabes	μ aus der Torsion	E aus der Verlängerung	σ
Engl. Stahl	5,055 mm	7458	19542	0,31
Eisen	8,220	6837	17805	0,32
	5,501	6677		
Kupfer	5,031	3612	9395	0,30
Glas	3,535	2383	6200	0,32
	3,423	2308		

F. Kohlrausch und Loomis[2]) arbeiteten nach der Coulomb'schen Methode und fanden für μ etwas andere Werthe:

	μ aus der Torsion	E aus longit. Schwingungen
Eisen	6940	20310
Kupfer	3900	12140
Messing	3200	9810

---

[1]) Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 4. Aufl., I, 227; Leipzig 1882.

[2]) Kohlrausch und Loomis, Pogg. Ann., CXLI; 1870.

Hieraus ergeben sich für σ noch höhere Werthe als aus den Versuchen von Wertheim; aber die Messungen von E, welche hier nach einer indirecten Methode angestellt wurden, sind für eine strenge Berechnung zu ungenau.[2])

158. Nachwirkung der Torsion; Versuche von F. Kohlrausch. — Wertheim hatte die von Weber für die Zugelasticität aufgefundene Nachwirkung (**152**) auch für die Torsionserscheinungen constatirt. Kohlrausch[3]) untersuchte sie genauer. Zu diesem Zweck benutzte er eine Torsionswage mit einem sehr feinen Glasfaden, der eine kleine Magnetnadel trug: er tordirte den Faden oben um drei ganze Umdrehungen, wodurch die Nadel um fast 90^0 aus dem magnetischen Meridian bewegt wurde. Sie blieb aber nicht in dieser Lage, sondern näherte sich allmählich der Ebene des magnetischen Meridians. Man drehte nun den oberen Kreis so, dass trotz dieser Verschiebung immer eine Torsion von genau drei Umdrehungen erhalten blieb und notirte zu verschiedenen Zeiten t die Werthe des Winkels α, welchen die Nadel mit dem magnetischen Meridian bildete. Der Sinus dieses Winkels kann als Maass für das Moment des Kräftepaares der Torsion dienen; man fand dafür:

t	$\sin \alpha$	t	$\sin \alpha$
1,25 min.	0,9247	110 min.	0,9120
2,50	0,9231	206	0,9071
5,25	0,9211	452	0,9051
12	0,9181	1310	0,9042
25	0,9154	1780	0,8995
50	0,9138	2760	0,8995

---

[2]) Der Hauptzweck der Versuche von Kohlrausch und Loomis war, den Einfluss der Temperatur auf den Torsions-Coefficienten zu untersuchen. Sie fanden, dass dieser Coefficient bei allen untersuchten Körpern stets mit der Temperatur abnimmt; und indem sie σ als constant betrachten, berechneten sie die Änderung von E, wofür sie folgende Werthe erhielten:

Eisen . . . . $E = E_0 (1 - 0{,}000\,483\,t - 0{,}000\,000\,12\,t^2)$,
Kupfer . . . $E = E_0 (1 - 0{,}000\,572\,t - 0{,}000\,000\,28\,t^2)$,
Messing . . . $E = E_0 (1 - 0{,}000\,485\,t - 0{,}000\,001\,36\,t^2)$;

diese Werthe stimmen abgesehen von denen des Eisens mit denjenigen Wertheims überein (**152**).

[3]) Kohlrausch, Pogg. Ann., CXIX, 337; 1863; CXXVIII, 1; 1866; CLVIII, 337; 1876 und CLX, 225; 1877.

Das Moment des tordirenden Kräftepaares erreicht also für einen bestimmten Winkel nur allmählich seinen definitiven Werth.

Umgekehrt kehrt ein tordirter Faden nicht sogleich nach dem Verschwinden der äusseren Kraft in seine Gleichgewichtslage zurück. Bei einem Silberdraht, der 2, 5 oder 10 Minuten lang um 180^0 tordirt war, beobachtete man nach der Poggendorf'schen Methode die Grösse x, um welche der Draht t Minuten nach dem Verschwinden der Kraft von der Gleichgewichtslage entfernt war; die bezüglichen Werthe von x folgen hier in Scalentheilen (um sie in Bogenminuten zu verwandeln, muss man sie mit 0,706 multipliciren).

t	x		
0,17 min.	38	—	74
0,33	33,6	53,5	65,9
1	24,3	41,3	53,4
2	19,3	33,6	44,8
5	13,9	23,8	33,7
10	11,0	17,9	26,0
20	7,9	13,4	19,6
50	—	8,9	12,6
80	—	7,2	10,5

Selbst nach einer Torsion von kurzer Dauer ist also die Nachwirkung noch merkbar. Sie wächst rasch mit der Dauer und der Grösse der Torsion. Aber die bemerkenswertheste Thatsache, die Kohlrausch beobachtete, ist die Superposition der Nachwirkungen, welche von auf einander folgenden Torsionen herstammen. Während der Draht nach einer starken Torsion oder nach einer Verlängerung sich in einem gewissen Sinne allmählich der Gleichgewichtslage nähert, tordirt man ihn einige Augenblicke lang von neuem im entgegengesetzten Sinne. Von dieser zweiten Torsion befreit, nähert er sich alsdann der Lage, aus welcher man ihn zum zweiten Male tordirt hat, erreicht sie und hält darin einen Augenblick an; darauf entfernt er sich wieder im entgegengesetzten Sinne, um sich der anfänglichen Gleichgewichtslage zu nähern, wie wenn die zweite Torsion gar nicht stattgefunden hätte.

Alle diese Erscheinungen der elastischen Nachwirkung haben vielfach die deutschen Physiker[1]) beschäftigt. Sie sind ohne Zweifel

---

[1]) O. E. Meyer, Pogg. Ann., CLI, 108; 1874. Neesen, Pogg. Ann., CLVIII, 579; 1876. Boltzmann, Pogg. Ann., Ergänzungsband VII, 624; 1876. Schmidt, Wied. Ann., II, 48 und 241; 1877. Warburg, Wied. Ann., IV, 232; 1878 und X, 13; 1880.

interessant, da sie auf eine Art Reibung von besonderer Natur im Innern der Körper hindeuten. Es giebt jedoch bis jetzt keine genügende Erklärung dafür.

159. Permanente Torsion; Untersuchungen von G. Wiedemann. — Ausser der temporären, mehr oder weniger starken Nachwirkung giebt es noch immer eine dauernde Wirkung, die man leicht beobachtet, sobald die Kraft etwas stärker ist (**156**). G. Wiedemann[1]) hat besonders die dauernde Torsion untersucht.[2]) Ein Messingdraht von ungefähr 0,50 m Länge und 2 mm Durchmesser, der durch ein Gewicht von 10 kg gespannt wurde, konnte ohne Erschütterung mittelst einer Rolle, die durch ein Gewicht p bewegt wurde, tordirt werden: eine passende Vorrichtung gestattete, sowohl die temporäre, als auch die permanente Torsion zu messen. In der folgenden Tabelle bedeutet T die im ersten Augenblick beobachtete Torsion: diese Torsion wächst allmählich bis zu einem gewissen Werthe T_1. Sobald dies Wachsen aufhört, setzt man das Gewicht p ausser Wirkung und beobachtet das Residuum der Torsion R, welches allmählich bis zu einer gewissen Grenze R_1 abnimmt; diese Grenze ist die eigentliche permanente Torsion. Die Gewichte p sind in Gramm mitgetheilt, die Torsionen in willkürlichen Einheiten.

p	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
T	0	312	416	523	628	733	844	956,5	1070	1191	1338	1510	1725
T_1	0	312	416	523	628	734	845	959	1074	1204	1351	1543	1820
R	0	0,6	1,3	2,3	3,8	5,8	9,8	16	26,3	44	73,3	132,8	253
R_1	0	0,6	1,3	2,3	3,8	5,8	9,8	16	26,3	43,3	71,8	130	245
$T_1 - R_1$	0	311,4	414,7	520,7	624,2	728,2	835,2	943	1048,7	1160,7	1279,2	1413	1575
Δ	(3×103,8)	103,3	106	103,5	104	107	107,8	105,7	112	118,5	134	162	

Die Differenzen Δ, welche auf der letzten horizontalen Reihe stehen, zeigen, dass die Zunahme der temporären Wirkung, welche von einer Zunahme des Gewichts p herrührt, mit dem absoluten Werth von p wächst.

Wenn man mit dem Draht, der bei der ersten Versuchsreihe benutzt ist, eine zweite Reihe mit denselben Gewichten 0, 30, 40 . . . Gramm anstellt, so bekommt man die dauernde Torsion, die unter der Einwirkung des letzten Gewichts von 140 g erhalten wurde, vollständig wieder, und die temporäre Torsion $T_1 - R_1$ nimmt wieder dieselben Werthe an wie im ersten Fall.

---

[1]) G. Wiedemann, Wied. Ann., VI, 485; 1879 und Journal de physique (Bouty) VIII, 349.

[2]) Siehe auch Boltzmann, Sitzungsber. d. Acad. d. Wissensch. in Wien 1874 und Warburg, Wied. Ann., X, 13; 1880.

Wenn ein gut ausgeglühter Draht zuerst in einem Sinn tordirt wird und darauf im entgegengesetzten, so superponiren sich diese Torsionen entgegengesetzten Sinns, ohne sich aufzuheben, wie man auch an den longitudinalen Streifen sieht, welche an der Oberfläche des Drahtes aufzutreten pflegen. Es folgt daraus, dass das genaue Gesetz der Torsionsschwingungen sehr verwickelt sein muss und dass die Bewegung nur dann die vollständige Regelmässigkeit annehmen kann, welche von Cornu und Baille beobachtet wurde (**105**), wenn der Draht in Folge sehr zahlreicher Schwingungen in einen unveränderlichen Zustand übergegangen ist. Die Versuche von G. Wiedemann zeigen das Auftreten dieses endgültigen Zustandes bei dem Draht sehr deutlich, aber sie beweisen nicht das Gesetz der ersten Schwingungen.

160. Gesetz der Torsionsschwingungen. — Wenn der Draht sich in dieser Weise angepasst hat, so zeigen die Schwingungen eine regelmässig abnehmende Amplitude. Gauss und Weber,[1]) welche zuerst diese Abnahme der Schwingungsweite genau beobachteten, fanden, dass die *auf einander folgenden Amplituden bei hinreichend kleinen Werthen* (kleiner als 4^0 oder 5^0) *in geometrischer Progression abnehmen.* Wenn Θ_0, Θ_1, Θ_2 . . . die Schwingungsweiten in absolutem Mass bedeuten, so hat man

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_1} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_3} = \cdots = a,$$

oder

$$\log \Theta_0 - \log \Theta_1 = \log \Theta_1 - \log \Theta_2 = \cdots = \log a,$$

die Differenz der natürlichen Logarithmen zweier auf einander folgenden Amplituden, das *logarithmische Decrement,* ist constant. Aus dieser Thatsache folgt, dass die Bewegung des Drahtes in jedem Augenblick einen Widerstand erfährt, der der Geschwindigkeit proportional ist. Nach den Formeln nämlich, die wir oben (**86**) entwickelt haben, um die Wirkung des Luftwiderstandes auf ein einfaches Pendel zu finden, macht ein Draht, wenn er einen Widerstand erfährt, der in absolutem Maass gleich $2\varepsilon \frac{d\Theta}{dt}$ ist, isochrone Schwingungen von der Dauer

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{T - \Sigma m r^2 \times \varepsilon}}, \qquad (49)$$

---

[1]) Gauss und Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins; Leipzig 1841.

wo Σmr^2 das Trägheitsmoment des Systems (Draht und Gewicht) und T die Torsionsconstante bedeutet; die zu den Epochen $0, \tau, 2\tau, \ldots n\tau$ auf einander folgenden Amplituden sind abgesehen vom Vorzeichen gleich Θ_0, $\Theta_0 e^{-\varepsilon\tau}$, $\Theta_0 e^{-2\varepsilon\tau}$, $\ldots \Theta_0 e^{-n\varepsilon\tau}$. Mit anderen Worten: sie bilden eine abnehmende geometrische Progression, die Differenz der natürlichen Logarithmen zweier auf einander folgender Amplituden ist

$$\Lambda = \varepsilon\tau. \qquad (50)$$

Mittelst des logarithmischen Decrements kann man also den Widerstand bestimmen, den die Bewegung erfährt. Wir kommen später auf diesen Gegenstand zurück.

Das Gesetz der Abnahme in geometrischer Progression gilt in Wirklichkeit nur für äusserst kleine Amplituden. Sobald diese etwas grösser werden, tritt die elastische Nachwirkung auf, und es zeigt sich eine Störung. Cornu und Baille[1]) haben dies analytisch untersucht, um den Einfluss der Glieder zu bestimmen, die dem Quadrat der Amplitude proportional sind. Sie bestimmten dieselben experimentell durch Beobachtungen an ihrem Apparat, der zur Messung der mittleren Dichte der Erde diente, und erkannten, dass „die gestörte Bewegung als die Superposition zweier Bewegungen aufgefasst werden kann: die erste ist die Schwingung mit abnehmenden Amplituden um eine Gleichgewichtslage $\omega = 0$, die wir schon oben besprachen; die zweite ist die periodische Verschiebung dieser Gleichgewichtslage, die wegen der Störung als beweglich angesehen werden muss.“ Die Betrachtung dieser Bewegung führt zu folgenden Schlussfolgerungen:

1. Die mittlere Lage[2]) ω_1, abgeleitet aus den Elongationen, stimmt nicht mit der mittleren Lage ω_2 überein, die aus Zeitbeobachtungen in der Nähe der Mitte der Schwingung[3]) hervorgeht. Dies findet nur statt, wenn die Störung zu vernachlässigen ist.

2. Weder die eine, noch die andere dieser Mittellagen giebt die Gleichgewichtslage, d. h. die, welche der ruhende Körper unter dem Einfluss der Kräfte, die auf ihn einwirken, einnehmen würde; die wirkliche Gleichgewichtslage ω_0 liegt vielmehr symmetrisch zu ω_2 und ω_1.

---

[1]) Cornu und Baille, C. R., LXXXVI; 1878.

[2]) Dies ist der Punkt der Schwingung, welcher den Abstand zweier auf einander folgender Umkehrpunkte im Verhältniss von 1 zu z theilt, wenn z das Verhältniss der abnehmenden geometrischen Progression der Amplituden bedeutet, welches durch die stattfindende Störung nicht merkbar geändert wird.

[3]) Es ist dies der Punkt der Schwingung, wo drei auf einander folgende Durchgänge in gleichen Zeitintervallen stattfinden.

C. Biegung.

161. Experimentelle Untersuchung der Biegung. — Der zu untersuchende Stab ist mit einem seiner Enden in einem Schraubstock befestigt, und eine Kraft wirkt senkrecht zu seiner Längsrichtung auf das andere Ende; man visirt mit dem Kathetometer auf einen am freien Ende gezogenen Theilstrich und muss sich bei jeder Visirung davon überzeugen, dass das im Schraubstock feste Ende unbeweglich geblieben ist. Man kann auch, wie es G. Wiedemann gethan hat, an das freie Ende des Stabes einen kleinen, zu der Längsrichtung des Stabes senkrechten Spiegel befestigen und nach der Poggendorf'schen Methode die Verschiebung messen. Kupffer wandte bei seinen umfangreichen „Experimental-Untersuchungen über die Elasticität der Metalle", die im Jahre 1860 im physikalischen Central-Observatorium von Russland angestellt wurden, ein analoges, aber weniger bequemes Verfahren an: einem Spiegel gegenüber, der normal zur Längsrichtung des Stabes an dessen Ende befestigt war, stellte er einen Theodolith auf, welchen

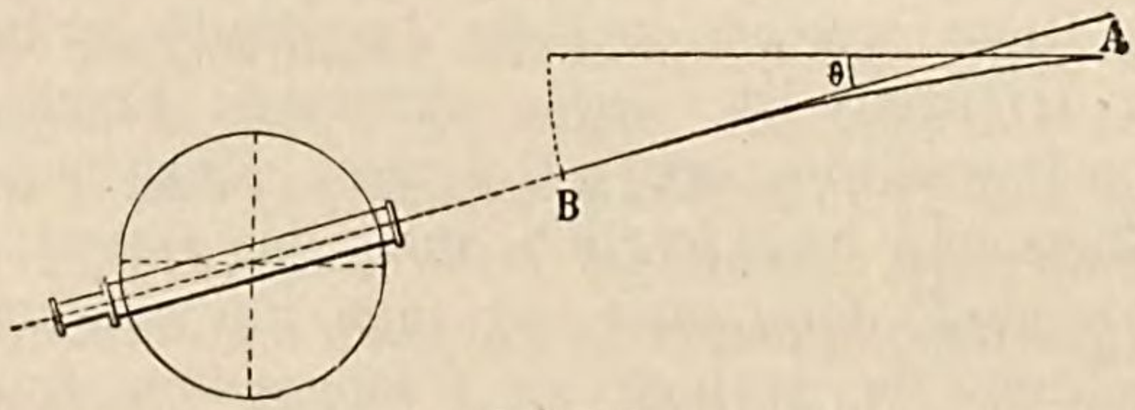


Fig. 219.

er hob und senkte, während er gleichzeitig das Fernrohr so lange drehte, bis das Fadenkreuz (das durch eine seitliche Öffnung beleuchtet wurde) mit seinem vom Spiegel reflectirten Bilde zusammenfiel (Gauss'sches Ocular): die optische Achse des Fernrohrs stand alsdann auf dem Spiegel senkrecht, und der Winkel, welchen das Fernrohr mit dem Horizont bildete, war der *Biegungswinkel* ϑ. Aus diesem Winkel kann man die Sehne nach der Gleichung $f = \frac{2}{3} l \operatorname{tg} \vartheta$ [1])

---

[1]) Wenn man nämlich die Gleichung

$$\frac{E}{12} b e^3 d\vartheta = P x dx \qquad (41)$$

integrirt, so erhält man

$$\vartheta = \frac{6 l^2 P}{E b e^3};$$

daraus folgt, wenn man Gleichung (43) berücksichtigt und für den Bogen Θ die Tangente setzt,

$$f = \frac{2}{3} l \operatorname{tg} \vartheta.$$

berechnen. Wenn man einen prismatischen Stab untersucht, so kann man auf diese Weise alle Gesetze beweisen, welche die Formel

$$f = \frac{1}{\mathrm{E}} \frac{4 l^3 P}{b e^3} \qquad (43)$$

einschliesst. Handelt es sich um einen cylindrischen Stab, so gilt dieselbe Formel, wenn man nur be^3 durch $3\pi r^4$ ersetzt, wo r den Radius des Stabes bedeutet; bei einer Röhre vom inneren Radius r' hätte man $3\pi(r^4 - r'^4)$.

Welches auch immer die Form des Querschnittes ist, in allen Fällen ist die Biegung dem biegenden Gewicht proportional: die Kraft, welche den Stab in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, ist also immer der Entfernung davon proportional; folglich sind die Schwingungen, welche der Stab beim Rückgang in diese Gleichgewichtslage macht, isochron, welche Amplitude sie auch haben mögen (innerhalb der Elasticitätsgrenze). Die Erfahrung bestätigt vollständig diesen Schluss: der Ton, der durch die transversalen Schwingungen eines Stabes hervorgebracht wird, ist immer von derselben Höhe, welches auch die Amplitude der Schwingungen (in passenden Grenzen) ist. Diese akustische Erscheinung bildet einen strengen Beweis des ersten Gesetzes. Es ist bemerkenswerth, dass diese Thatsache und folglich auch das Gesetz besteht, wie man den Stab auch unterstützt, ob man ihn nun unveränderlich befestigt, ob man ihn einfach an einem seiner Enden oder an allen beiden oder an zwischenliegenden Punkten unterstützt.

Setzt man allgemein

$$f = \frac{1}{\mathrm{E}} \frac{k l^3 P}{m^4},$$

wo m das Glied bedeutet, das sich auf die transversalen Dimensionen bezieht (be^3, $3\pi r^4$ oder $3\pi(r^4 - r'^4)$ je nach dem Fall), so hat man:

Fig. 220.

A) für ein festes und ein freies Ende . . . . . $k = 4$

B) für zwei unterstützte Enden . . . . . $\frac{1}{4}$

C) für zwei feste Enden . . . . . $\frac{1}{16}$

Demnach verhalten sich unter derselben Belastung die Sehnen der Biegungswinkel desselben Stabes in diesen drei Fällen wie $1 : \frac{1}{16} : \frac{1}{64}$; die Widerstände für dieselbe Biegung sind diesen Zahlen umgekehrt proportional.

Wir kommen nochmals auf den Fall eines horizontalen, prismatischen Stabes zurück, der an seinen einem Ende fest ist und auf dessen anderes Ende eine äussere vertikale Kraft P wirkt. Ein gerader Querschnitt $PQP'Q'$ bleibt normal während der Biegung, wie Kupffer bewiesen hat, aber der Schnitt des gebogenen Stabes hat die nebenstehende Form $P_1Q_1P'_1Q'_1$, wo die obere Seite $P_1P'_1$

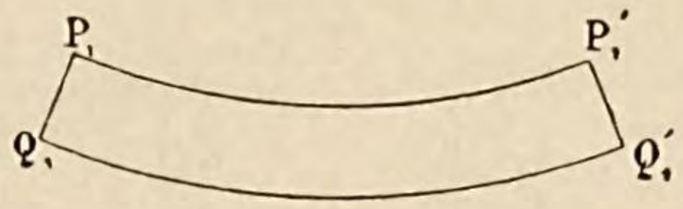


Fig. 121.

concav und die untere $Q_1Q'_1$ dagegen convex ist. Aus der Verlängerung der Molecülfäden nämlich, welche über der Ebene der mittleren Fasern liegen, folgt, dass der Querschnitt aller dieser oberer Fäden abnehmen muss, während die unteren Fäden anschwellen und gleichzeitig sich verkürzen: die Seitenflächen entfernen sich unten von einander und kommen oben näher zusammen. Diese Deformation, welche beim Kautschuk sehr hervortritt, ist unter den gewöhnlichen Bedingungen bei den Körpern mit bedeutenden Elasticitäts-Coefficienten, wie die Metalle und das Glas, unmerklich; Cornu hat diese Deformationen indessen vollständig sichtbar gemacht und sie beim Glase mit den geringsten Belastungen gemessen, um daraus σ abzuleiten.[1])

162. Versuche von Cornu. — Die von Cornu angewandte Methode beruht auf demselben Princip, welches Fizeau für die Messung der Ausdehnung benutzt hat. Ein rechteckiges Prisma liegt horizontal auf zwei Stützen und wird durch Gewichte gebogen, die an seinen Enden angebracht werden. Man erzeugt alsdann Farbenringe zwischen der oberen Seite des Stabes und einer zweiten ebenen, durchsichtigen Platte, die sich in sehr geringer Entfernung davon befindet. Man hat auf diese Weise ein wirkliches Bild der gepressten Oberfläche. Nun ergiebt aber die optische Untersuchung dieses Bildes ein System von conjugirten Hyperbeln, welche die-

---

[1]) Cornu, loc. cit.

selben Asymptoten haben. Nach den Formeln von de Saint-Venant ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen jede Asymptote mit der Richtung der Achse einschliesst, gleich der reciproken Quadratwurzel aus dem gesuchten Verhältniss σ. Mikrometrische Messungen, die bei photographischen Abbildungen angestellt wurden, gestatteten, diese Tangente und folglich σ genau zu bestimmen. Die folgende Tabelle enthält die Resultate von Versuchen, welche mit ziemlich langen Platten aus Spiegelglas aus Saint-Gobain angestellt sind. Sie waren sehr rein, und Cornu glaubte, dass sie viel besser die Bedingungen der Isotropie verwirklichen als die Metalle, welche im gewalzten Zustande immer sehnig und im gegossenen krystallinisch sind.

Platte	Dicke	Verhältniss der Querdimensionen	σ
No. 2	1,380	18,4	0,225
3	2,037	12,3	0,226
4	1,370	7,3	0,224
5	2,040	6,4	0,257
7	1,554	8,7	0,236
1	8,500	3,8	0,243 0,250*)

*) Diese letzte Zahl ist nach einer andren optischen Methode erhalten.

Alle diese Werthe von σ sind fast gleich 0,25; $\sigma = 0{,}25$ würde also die charakteristische Constante der isotropen Körper sein.

163. Nachwirkung; dauernde Wirkungen. — Entsprechend der elastischen Nachwirkung, sowie entsprechend der Elasticitätsgrenze und dem Einfluss der Zeit auf die dauernde Deformation bietet die Biegung ähnliche Erscheinungen, wie wir sie bei der Dehnung und der Torsion besprochen haben.

Nach G. Wiedemann, welcher sich hauptsächlich mit der Untersuchung der Torsion und der Biegung fester Körper beschäftigt hat, theils um ihrer selbst willen, theils wegen ihrer Beziehungen zu den magnetischen Erscheinungen, würde es im eigentlichen Sinne keine Elasticitätsgrenze geben. Denn Stäbe oder Röhren aus Metall oder Glas, welche an ihren Enden unterstützt sind, nehmen stets unter dem Einfluss ihres eigenen Gewichts eine dauernde Krümmung an. Die besten Federn werden schlaff, d. h. sie werden mit der Zeit deformirt.

Das Härten und Ausglühen übt ausserdem einen bedeutenden Einfluss auf den Widerstand gegen dauernde Deformation aus. So

nahm Coulomb drei Stahllamellen, von denen die erste glashart, die zweite vollständig ausgeglüht und die dritte auf dem Härtegrad guter Federn gebracht war, befestigte sie horizontal an einem ihrer Enden und hing Gewichte an das andere. So lange die Belastung nicht auf 7 Pfund stieg, bogen sich alle Stäbe auf gleiche Weise[1]) und nach Abnahme des Gewichts nahmen sie ihre erste Form vollständig wieder an. Bei der Belastung von 7 Pfund brach der erste, der zweite krümmte sich dauernd; der dritte konnte eine Belastung bis zu 18 Pfund ertragen und kehrte dennoch stets in seine Anfangslage zurück, wenn man ihn entlastete.

164. Anwendungen. — Die Biegungselasticität kommt bei den meisten Federn zur Anwendung (Dynamometer, Wagen, Schlösser, Fuhrwerken u. s. w.); sie verleiht den mit Pferdehaar

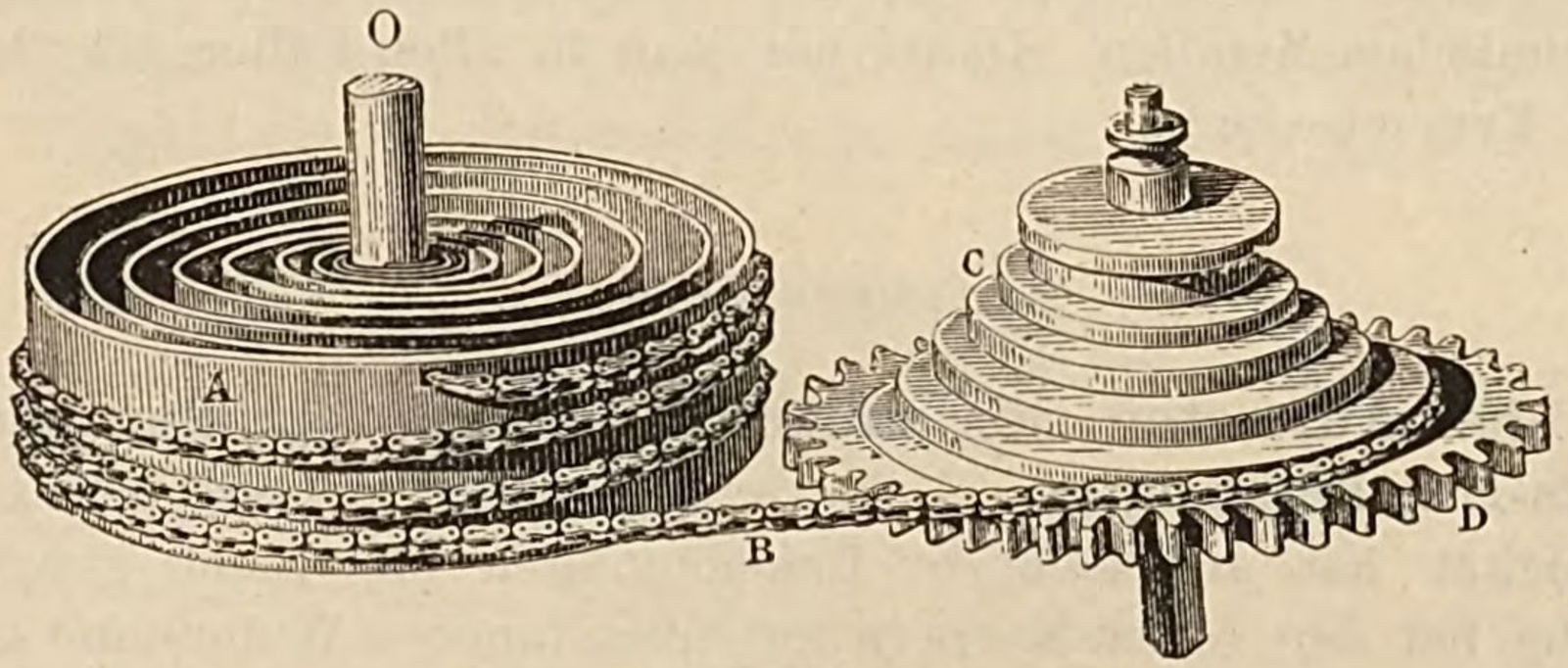


Fig. 222.

gepolsterten Kissen und den Sprungfedermatratzen ihre Elasticität und wird bei den metallischen Barometern und Manometern verwendet. Endlich bewirkt sie die Bewegung der Taschenuhren und vieler Wanduhren: eine spiralförmig gewundene Feder ist an einem Ende mit der festen Achse *O* verbunden, an dem anderen mit der Trommel oder Walze *A*, welche sich um diese Achse drehen kann: wenn man die Uhr aufgezogen hat, d. h. wenn die Windungen der Feder gespannt sind, so wickelt sie sich ab und dreht dabei die Trommel, mit der sie verbunden ist. Mittelst der Kette *B* und der Spindel *C* wird die Bewegung auf das ganze Werk übertragen.

Wir finden ferner eine Spiralfeder an der Unruhe der Taschenuhren, welche durch ihre isochronen Schwingungen die Bewegung

---

[1]) Seitdem hat Kymball durch ausgedehntere Versuche bewiesen, dass der Elasticitäts-Coefficient im umgekehrten Verhältniss mit der Härte des Stahles sich ändert. Je grösser die Härte, um so grösser ist die Biegung, die ein gegebenes Gewicht hervorbringt (American Journal of science; 1876).

des ganzen Systems regulirt. Dadurch, dass Phillips[1]) die genaue Formel für die Schwingungen aufstellte, schuf er eine scharfe Methode für die Messung des Elasticitäts-Coefficienten der Metalle: es genügt, wenn man aus einem Metalldraht die Unruhespirale

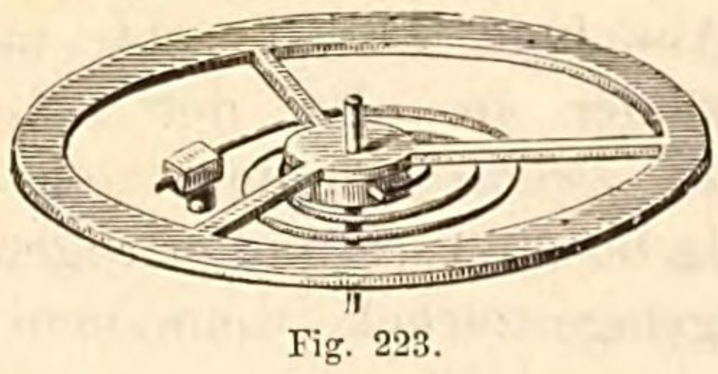


Fig. 223.

eines Chronometers herstellt, dessen Gang genau die Schwingungsdauer erkennen lässt. Dies Verfahren hat den Vorzug, nur eine äusserst geringe Stoffmenge zu fordern, und man kann deshalb mit seltenen Stoffen ebenso leicht Versuche anstellen, wie mit den gewöhnlichen Metallen. Dabei hat man in allen Fällen sehr homogene Versuchsstücke.

D. Innere Reibung.

165. Auftreten der inneren Reibung bei den Elasticitäts-Erscheinungen. — Die experimentelle Untersuchung der Elasticität hat auf mehrere Erscheinungen ein Licht geworfen, welche bei den festen Körpern auf einen inneren Widerstand gegen die molecularen Verschiebungen hindeuten.

Unter diesen Erscheinungen lässt sich die schwingende Bewegung, welche die Torsion hervorruft, am genauesten messen. Die Abnahme der Amplitude kleiner Schwingungen eines tordirten Fadens zeigt, wie wir schon gesehen haben (**160**), einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand an; wenn man diesen Widerstand mit $2\varepsilon v$ bezeichnet, so ist ε gleich dem logarithmischen Decrement Λ, dividirt durch die Schwingungsdauer τ,

$$\varepsilon = \frac{\Lambda}{\tau}. \qquad (50)$$

Der so bestimmte Widerstand setzt sich aus zwei Grössen zusammen: 1. dem Luftwiderstand, dessen Messung wir später kennen lernen werden; 2. dem Widerstand, welcher von der inneren Reibung herrührt.

Es ist leicht zu verstehen, wie man die innere Reibung bestimmen kann, nachdem von der ganzen beobachteten Wirkung

---

[1]) Phillips, loc. cit., 296.

der sehr geringe Antheil ausgeschieden ist, welcher von der Luft herrührt. Warburg[1]), Streintz[2]) und Schmidt[3]) sind auf diese Weise vorgegangen.

Die innere Reibung wird mit der Zeit geringer und nimmt auf die Dauer einen sehr kleinen Werth an. Diesen behält sie bei, wenn man sich auf hinreichend kleine Schwingungen beschränkt, um keine elastische Nachwirkung hervorzurufen und wenn man sonstige Störungen vermeidet (also das spannende Gewicht nicht berührt und eine neue Deformation, Erschütterung oder Erhitzung des Drahtes unterlässt).

Jenseits einer gewissen Grenze bilden die Amplituden keine geometrische Reihe mehr: der Widerstand ist nicht mehr der Geschwindigkeit proportional; die Aufgabe wird alsdann sehr complicirt.

Selbst in dem einfachen Falle, wo der Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist, ist man noch nicht dahin gelangt, den Einfluss, welchen einerseits die Form, andererseits die Natur des Drahtes auf die innere Reibung ausübt, sicher zu trennen.

---

[1]) Warburg, Monatsber. d. Berliner Acad. für 1869.
[2]) Streintz, Sitzungsber. d. Acad. d. Wissensch. in Wien; 1874 u. 1879.
[3]) Schmidt, Wied. Ann., II; 1877.

Drittes Capitel.

Gestaltsänderung. Festigkeit.

I. Gestaltsänderung.

166. Verschiedene Arten der Gestaltsänderung. — Alle festen Körper können dauernde, mehr oder weniger weit gehende Gestaltsänderungen erleiden, ohne zu zerbrechen, und zwar liegt für jeden derselben zwischen der Elasticitätsgrenze und dem Punkte, wo er bricht, eine Reihe von interessanten, aber noch wenig untersuchten Gleichgewichtszuständen. Gerade im Hinblicke auf diese Gestaltänderungen schreiben wir den verschiedenen Substanzen verschiedene Eigenschaften zu: *Geschmeidig* nennen wir einen Körper, der sich unter dem Hammer breit schlagen oder unter dem Walzwerk auswalzen lässt, *dehnbar* einen solchen, der sich drahtförmig ausziehen lässt, *hart* im Gegensatze hierzu jeden Körper, der einem oberflächlichen Einritzen resp. Abnützen bedeutenden Widerstand entgegensestzt.

167. Geschmeidigkeit; Dehnbarkeit. — Wenn auch Hammer, Walzwerk und Zieheisen im wesentlichen in demselben Sinne wirken, indem sie nämlich den festen Körper in bestimmten Richtungen zusammendrücken, um ihn in anderen wieder auszudehnen, so treten doch im einzelnen bei jedem dieser Werkzeuge noch ganz besondere Nebenumstände auf (beim Hammer der Schlag, beim Walzwerk[1]) und noch mehr beim Zieheisen der Zug), so dass sich nicht ein und derselbe Körper gleich gut auf alle drei Arten bearbeiten lässt. Nach Prechtl kann man die wichtigsten Metalle je nach der Leichtigkeit, mit welcher sie für die obigen drei Fälle eine Gestaltsänderung zulassen, in folgende Reihen ordnen:

---

[1]) Beim Walzwerk ist der Vorgang noch am einfachsten und regelmässigsten.

Unter dem Hammer	Unter dem Walzwerk	Unter dem Zieheisen
Blei	Gold	Platin
Zinn	Silber	Silber
Gold	Kupfer	Eisen
Zink	Zinn	Kupfer
Silber	Blei	Gold
Kupfer	Zink	Zink
Platin	Platin	Zinn
Eisen	Eisen	Blei.

Die beiden ersten Reihen weichen nicht wesentlich von einander ab; immerhin lassen sich die weichen Metalle unter dem Hammer leichter strecken, als unter dem Walzwerke. Gerade durch Hämmern z. B. stellt man die ausserordentlich feinen Goldplättchen her, von denen 10 000 auf einander gelegt noch kaum die Höhe eines Millimeters erreichen. Die beträchtlichen Abweichungen, welche die dritte Reihe gegenüber den beiden ersten aufweist, kommen daher, dass das Metall, um den Zug durch die engen Löcher des Zieheisens aushalten zu können, nicht nur sehr geschmeidig,[1]) sondern auch sehr zähe sein muss. Die feinsten Drähte erhält man mittels des Verfahrens von Wollaston: Man schickt einen verhältnissmässig dicken Silbercylinder, in welchen längs der Achse ein feiner Platindraht eingelegt ist, durch ein Zieheisen; hierbei werden beide Metalle gemeinschaftlich ausgezogen, und wenn man nach einer gewissen Anzahl von Zügen das Silber durch Salpetersäure auflöst, behält man einen Platindraht von äusserster Feinheit übrig. —

Mehrere Umstände beeinflussen die Geschmeidigkeit:

1. Die Structur: Eine amorphe oder faserige Structur wirkt günstig.

2. Das Vorhandensein wenn auch nur geringer Mengen anderer chemischer Elemente. Namentlich das Gold ist hiergegen höchst empfindlich, — schon bei einer Verunreinigung mit $\frac{1}{1000}$ Arsenik lässt es sich nicht mehr gut walzen.

3. Die Temperatur: Hitze macht im allgemeinen die Körper weicher und geschmeidiger. Bei gewissen organischen Substanzen, wie Harz, Pech, Wachs etc. ist das ja allgemein bekannt, aber auch bei den meisten Metallen ist es unverkennbar, ganz besonders beim Eisen und Platin (cf. § **152**). Das Zink jedoch lässt sich nur bis zu einer Temperatur von 150^0 walzen; schon bei gewöhnlicher

---

[1]) Mag auch ein Metall noch so geschmeidig sein, so hat doch stets ein aus dem Zieheisen kommender Draht einen etwas grösseren Durchmesser als das Loch, das er verlässt, da nur ein Theil der Gestaltsänderung noch fortdauert, wenn der Druck verschwunden ist.

Temperatur wenig geschmeidig, wird es bei mehr als 200° so brüchig, dass man es in einem Mörser zu Staub zerstossen kann.

168. Die Plasticität fester Körper. — Tresca stellte über die durch Zusammendrücken hervorgebrachte dauernde Gestaltsänderung wichtige Untersuchungen an, welche zeigen, dass jeder nach einer bestimmten Richtung ausgeübte Druck sich im festen Körper seitlich fortpflanzt und die Substanz bis zu den Wänden hin drängt.

Wenn ein Block, der zusammengepresst werden soll, aus einer Reihe von parallelen, über einander geschichteten Blättern besteht, so kann man aus der Gestaltsänderung eines jeden Blattes einen Schluss auf die Verschiebung der verschiedenen Theilchen der Masse ziehen.

Fig. 224 giebt einen Schnitt durch eine Scheibe, welche man

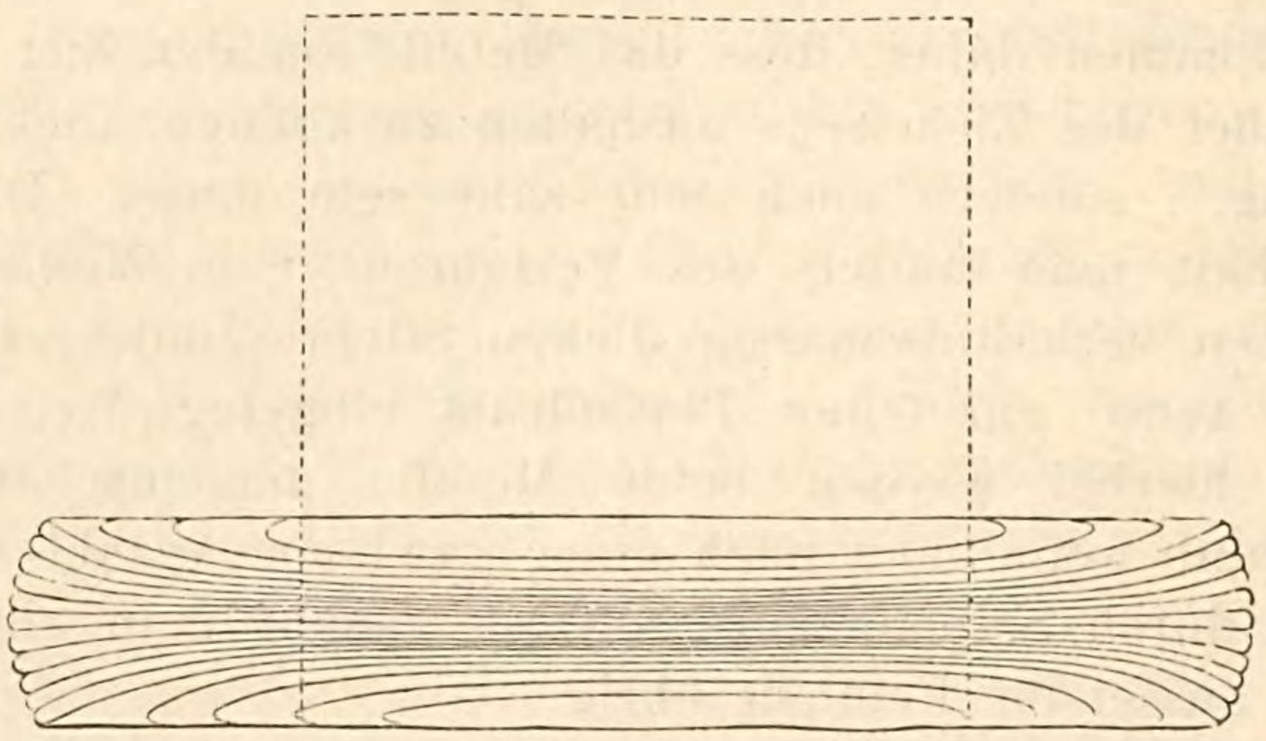


Fig. 224.

durch das Zusammenpressen eines aus 20 Bleilamellen bestehenden Blockes erhält (die Gestalt des Blockes ist durch die punktirten Linien angedeutet). Man sieht, dass namentlich im Inneren des

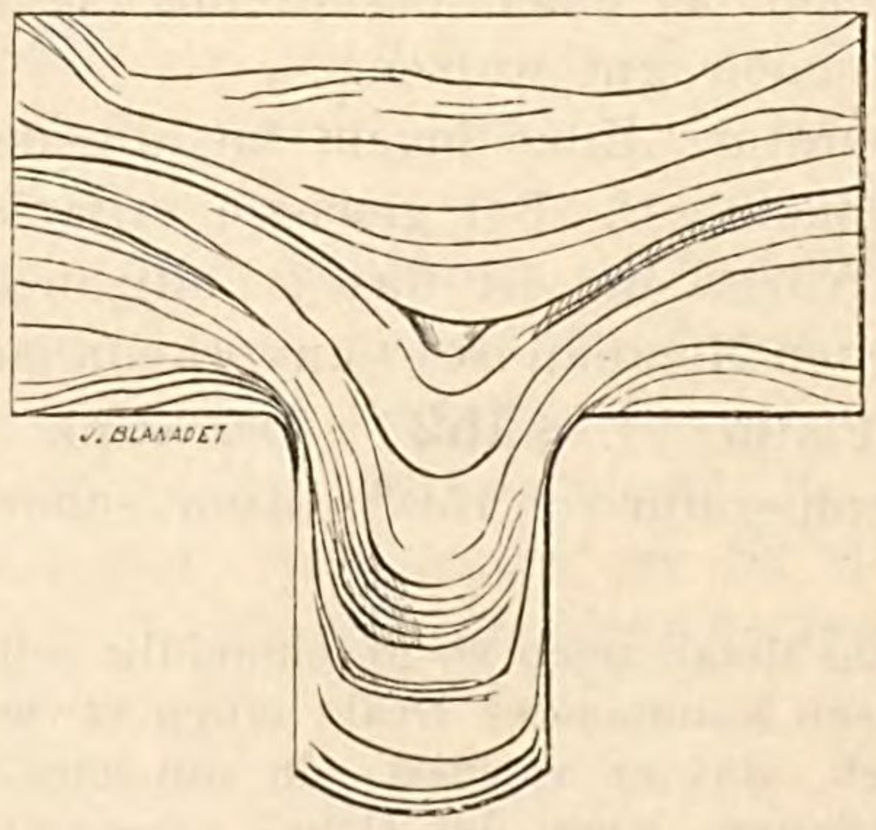


Fig. 225.

Blockes ein Ausweichen nach der Seite hin stattgefunden hat. Die Verbindungslinien, welche vorher parallel waren, bilden nach der Compression eine Art Garbe, die in der Mitte stark eingeschnürt und am Rande weit aufgebauscht erscheint.

Fig. 225 giebt den Schnitt durch einen festen Körper, wie er in Folge des seitlichen Ausweichens durch das Zusammenpressen von zwei heissen Eisenplatten unter einem Stempel entsteht, dessen stählernes Gegenstück, die Matrize, von einem kreisförmigen Loche durchbohrt ist. Fig. 226 endlich stellt einen Schnitt durch einen

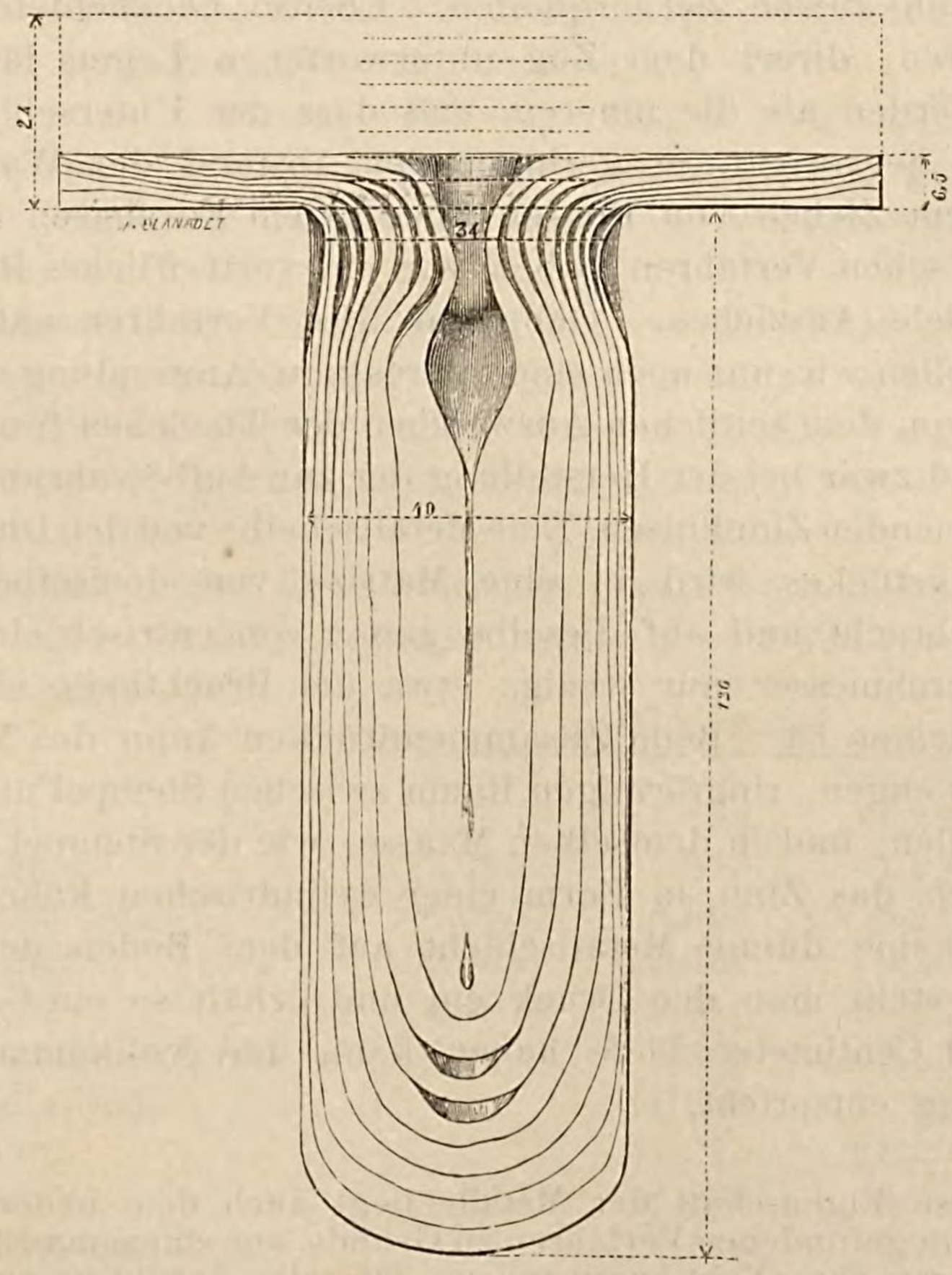


Fig. 226.

Zapfen dar, den man dadurch erhalten hatte, dass man acht Bleiplatten mittels einer hydraulischen Presse auf einer ähnlichen Matrize zusammenquetschte.

Tresca liess auf eine dünne Bleiplatte eine Reihe von gleich grossen Rechtecken graviren und schickte dieselbe sodann durch das Walzwerk; es ergab sich, dass jedesmal sämmtliche Rechtecke um das gleiche Stück verlängert wurden, während ihre Breite ungeändert blieb. Alle zur Achse der Platte parallelen Molecül-

reihen wurden also gleichmässig ausgereckt. Dass in der darauf senkrechten Richtung keine merkliche Verlängerung eintrat, lässt sich auf den Reibungswiderstand zurückführen, den die Platte längs der Berührungslinie mit den Cylindern des Walzwerkes erlitt. Als er denselben Versuch mit einem Blocke wiederholte, welcher aus mehreren dünnen, über einander geschichteten Plättchen bestand, verbreiterten sich die an den Rändern auf der obersten und untersten Platte befindlichen Rechtecke nur wenig, während die durch Reibung nicht zurückgehaltenen inneren Schichten wulstförmig nach aussen hervorquollen. Ebenso beobachtete er, dass die äusseren, direct dem Zug unterworfenen Lagen länger ausgereckt werden als die inneren, und dass der Unterschied um so deutlicher hervortritt, je geringer der Abstand der Walzen ist.[1])

In dem Ziehen von Röhren über einem Formeisen nach dem Wollaston'schen Verfahren haben wir ein vortreffliches Beispiel für das parallele Ausziehen. Ohne auf dies Verfahren näher einzugehen, wollen wir nur noch eine interessante Anwendung erwähnen, die man von dem seitlichen Ausweichen der Theilchen fester Körper macht, und zwar bei der Herstellung der zur Aufbewahrung von Ölfarben dienenden Zinnhülsen. Eine Metallscheibe von den Dimensionen eines Markstückes wird in eine Matrize von demselben Durchmesser gebracht und auf dieselbe genau concentrisch ein Stempel, dessen Durchmesser nur wenig, etwa um Bruchtheile eines Millimeters, kleiner ist. Beim Zusammendrücken kann das Metall nur durch den engen, ringförmigen Raum zwischen Stempel und Matrize emporquellen, und in demselben Maasse, wie der Stempel eindringt, erhebt sich das Zinn in Form einer cylindrischen Röhre. Wenn nur noch eine dünne Metallschicht auf dem Boden der Matrize übrig ist, stellt man den Druck ein und erhält so ein Gefäss, das bis zu 30 Centimeter Tiefe haben kann und vollkommen seiner Bestimmung entspricht.[2])

---

[1]) Diese Eigenschaft der Metalle liegt auch dem neuerdings von Mannesmann gefundenen Verfahren zu Grunde, aus einem massiven Metallblocke Röhren ohne Naht herzustellen. Dasselbe beruht im wesentlichen darauf, dass man den zur Rothgluth erhitzten Metallblock zwischen zwei schräg gerichtete conische, ungemein rasch rotirende Walzen bringt, welche die äusseren Schichten des Blockes über die inneren hinwegschieben und ihnen gleichzeitig eine Drehung um die Achse des Rohres ertheilen. Die durch dies Verfahren gewonnenen Röhren, welche, je nach der Form des verwendeten Metallblockes, offen oder geschlossen hergestellt werden können, zeichnen sich durch ganz aussergewöhnliche Festigkeit und Zähigkeit aus und haben bereits die vielseitigste Verwendung in der Technik gefunden. — G.

[2]) In ganz ähnlicher Weise wird bei der Fabrikation der überseeischen Kabel mittels hydraulischen Druckes die Bleiumhüllung hergestellt, welche den äussersten, schützenden Überzug bildet. — G.

169. Mechanisches Härten. — Jede mechanische Operation, wie Hämmern, Walzen oder Ziehen, durch welche ein Körper stark zusammengepresst wird, bildet eine Art von Härtung. Der Körper wird dadurch im allgemeinen dichter, härter und elastischer, aber auch spröder. Die Vermehrung der Dichtigkeit, wie sie fast ausnahmslos eine Folge des Hämmerns und Walzens[1]) ist, erfolgt nicht in gleicher Regelmässigkeit beim Ausziehen. Der Grund dafür ist in dem Umstande zu suchen, dass beim Ausziehen neben der Compression von der Seite her, welche die Dichtigkeit zu vergrössern strebt, noch ein der Länge nach wirkender Zug auftritt, der in entgegengesetztem Sinne wirkt.

Genügendes Erhitzen hebt die Folgen der mechanischen Härtung wieder auf: Der Körper wird wieder weich, geschmeidig und nimmt allmählich wieder die Dichte an, welche er nach dem Gusse hatte.

Baudrimont[2]) bestimmte die Dichte verschiedener gegossener, gehämmerter, gewalzter und gezogener Metalle; er fand, dass das Ausziehen zu feinem Draht eine so starke Vergrösserung der Dichte zur Folge hat, wie sie bei keiner der anderen Manipulationen auftritt.

Wertheim[3]) nahm diese Bestimmungen wieder auf und dehnte sie noch weiter aus; die Resultate seiner Arbeit sind in folgender Tabelle enthalten:

	Dichte des Metalls		
	gegossen	gezogen	ausgeglüht
Blei	11,215	11,169	11,232
Zinn	7,285	7,313	7,290
Cadmium . . .	8,605	8,665	8,520
Silber	10,366	10,369	10,304
Gold	19,407	19,514	19,035
käufliches Zink .	6,939	7,008	7,060
Palladium . . .	—	11,359	11,225
Platin	—	21,275	21,207
Kupfer	8,729	8,933	8,936
Eisen aus Berry .	—	7,748	7,757
Gussstahl . . .	—	7,717	7,719
Englischer Stahl .	—	7,718	7,628

---

[1]) Dagegen hat der Kapitän Caron (C. R. LXX, 1263; 1870) gefunden:

Reines Eisen, in Wasserstoffatmosphäre geschmolzen . . 7,880
Dasselbe, geschmiedet 7,868;

und Riche (Ann. de chim. et de phys. 4, XX, 351; 1873) fand, dass die mechanischen Einwirkungen (Walzen und Hämmern) in geringem Maasse die Dichte des geglühten Stahles vermindern.

[2]) Baudrimont, Ann. de chim. et de phys., 2, LX, 78; 1835.

[3]) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3), XII, 386; 1844.

170. Härten durch rasches Abkühlen. — Ausser auf mechanischem Wege erzielt man eine Härtung von Metallen und Glas auch noch dadurch, dass man den vorher stark erhitzten Körper in eine Flüssigkeit taucht, *ablöscht,* oder allgemeiner dadurch, dass man ihn plötzlich erkalten lässt.

Die äusseren Schichten, die bei der Abkühlung zusammengezogen werden, drücken stark auf den Kern im Innern, der seinerseits wieder seine Hülle auszudehnen sucht. Dann kühlt sich auch der Kern ab, zieht sich zusammen und sucht dabei die Hülle nachzuziehen, welche jedoch Widerstand leistet. So ensteht schliesslich in dem Kerne eine beträchtliche Spannung und eine Dichte, die geringer ist, als die gewöhnliche, — in der Schale umgekehrt ein starker Druck und eine aussergewöhnliche Dichte; in dem grössten Theile der Masse endlich, als Folge der Hindernisse, welche die freie Bewegung der Molecüle während des Erkaltens hemmen, eine nahezu vollständig isotrope Structur (**134**).

Härten von Stahl und anderen Metallen. — Um den Stahl zu härten, erhitzt man ihn bis zur Rothgluth und taucht ihn dann in Wasser oder eine andere Flüssigkeit.[1])

Obgleich nun, wie wir oben sahen, der Vorgang ein ziemlich verwickelter ist, — wir lassen dabei die chemischen Reactionen noch ganz aus dem Spiele, — kann man doch die Wirkung im Grossen und Ganzen recht gut mit der Wirkung des Hammers oder der Presse auf das weissglühende Metall vergleichen[2]): Dieser Vergleich wird durch die neuesten Untersuchungen von Clémandot[3]) über das Härten von Stahl mittels Compression gerechtfertigt. Der rothglühende Stahl wurde hierbei ganz plötzlich einem Drucke von 1000, 1500 oder 2000 kg pro Quadratcentimeter unterworfen und bis zum vollständigen Erkalten unter demselben belassen; er zeigte dann dasselbe feine Korn und die charakteristische Härte von gehärtetem Stahl. Man hat nicht einmal nöthig, ihn anzulassen, wie den auf dem gewöhnlichen Wege gehärteten Stahl, welchem hierdurch die stets auftretende Sprödigkeit genommen werden soll.

Dies Anlassen, das stets eine Verminderung der Härte im Gefolge hat, muss sich nach dem Zwecke richten, welchem der Stahl dienen soll. Zur Bestimmung der zum Anlassen nöthigen Temperatur bedient man sich der hauptsächlich bei polirten Metallen auf-

---

[1]) Quecksilber bringt eine ungemein rasche Abkühlung hervor. Weniger starke Härtegrade erzielt man, wenn man den Stahl in Öl, Wachs oder geschmolzenes Fett taucht. Kapitän Caron erhielt vortreffliche Resultate durch Eintauchen in Wasser von 55° oder 100°.

[2]) Caron, C. R., LVI, 211; 1863.

[3]) Clémandot, C. R., LXIV, 703; 1882.

tretenden Eigenthümlichkeit, dass sie in Folge oberflächlicher Oxydation die Farben dünner Plättchen annehmen. Der gehärtete Stahl zeigt beim Erhitzen nach einander folgende Farben: Strohgelb (220°), Goldgelb (240°), Purpurroth (260°), Violett (270°), Hellblau (290°), Dunkelblau (320°), endlich Schwarzblau (330°). In dieser Stufenleiter hält man unter Berücksichtigung der Natur des Metalles, dessen Härte sich um so weniger beim Erhitzen verliert, je vorzüglicher es ist, nach Bedürfniss bei dieser oder jener Farbe inne. Gewöhnlich werden die zum Bearbeiten von Metallen bestimmten Instrumente strohgelb oder goldgelb angelassen, die Messerschmiedewaaren purpurroth, Uhrfedern violet oder blau; bei denjenigen Instrumenten endlich, bei welchen man mehr auf Haltbarkeit als auf Härte zu sehen hat, wie bei feinen Sägen, Bohrern etc. geht man bis zum Schwarzblau.[1])

Die dem Härten unterworfenen Stahlgegenstände pflegen sich zu werfen, da sie ihre Dimensionen nach verschiedenen Richtungen ungleich stark ändern; in jedem Falle nimmt das specifische Gewicht dabei ab. Diese zuerst durch Réaumur angegebene, durch Rinmann bestätigte und von Karsten bestrittene Thatsache wurde durch Caron[2]) unzweifelhaft nachgewiesen; bei einer seiner Untersuchungen verminderte sich die Dichte nach dreissig auf einander folgenden Härtungen von 7,817 auf 7,743. Fromme[3]) fand, dass die Volumenzunahme eines Stahlstückes in Folge einer vollständigen Härtung 0,010—0,013 betrug; das Gelb-Anlassen verringerte diese Zunahme wieder auf die Hälfte, beim Blau betrug sie nur noch 0,003, beim Schwarz war das Volumen wieder auf seine ursprüngliche Grösse zurückgegangen.

Ebenso vermindert das Härten die Dichte des Kupfers[4]) und des Glases[5]), aber sie vermehrt diejenige des Messings[6]) und hauptsächlich

---

[1]) Durch systematische, in der Phys. Techn. Reichsanstalt angestellte Versuche (vergl. Löwenherz, Anlauffarben, Zeitschrift f. Instrk. 1889), wurde festgestellt, dass die längere Dauer einer niederen Temperatur dieselbe Farbe erzeugen kann, wie die kurz anhaltende Erwärmung auf höhere Temperatur, und dass auch die Zusammensetzung des Stahles das Eintreten der Farben beeinflusst. Es erscheint deshalb nicht correct, aus der Anlauffarbe allein auf die zurückgebliebene Härte des Stahles zu schliessen, zumal schon verhältnissmässig geringe Unterschiede in der Dauer der Erwärmung beträchtliche Änderungen in der Farbe verursachen. — G.

[2]) Caron, C. R., LVI, 211; 1863.

[3]) Fromme, Göttinger Nachr., 165; 1876.

[4]) Riche, loc. cit., 390.

[5]) Wertheim und Chevandier, loc. cit., 137, und Riche, loc. cit., 415.

[6]) Riche, loc. cit., 407. Die Wirkung ist hier nur gering, da das Messing, das sich beim Ziehen stark verändert, nur eine geringe Änderung beim Härten zeigt.

diejenige der zinnreichen Bronzen[1]). Hierbei ist zu erwähnen, dass zwischen Bronze und Stahl ein vollkommener Gegensatz stattfindet. D'Arcet[2]) zeigte im Anfange dieses Jahrhunderts, dass das Härten eine zinnreiche Bronze so geschmeidig macht, dass sich dieselbe dann im Prägestock bearbeiten lässt, während dasselbe Metall, wieder erhitzt und langsam abgekühlt, nur schwer das Prägen aushält, ohne zu brechen[3]). Im Gegensatze hierzu ist beim Bearbeiten des Messings das Anlassen dem Härten vorzuziehen.

Rasch gekühltes Glas. — Schon seit langer Zeit kennt man den Einfluss des raschen Kühlens auf das Glas.

Lässt man in kaltes Wasser Tropfen von geschmolzenem Glase fallen, so erhält man eine Art von festen Thränen, die man in Frankreich Batavische oder Holländer Thränen nennt, — nach dem Lande, aus welchem sie gegen Mitte des 17. Jahrhunderts nach Frankreich kamen[4]), — in England „Ruprechts-Tropfen" nach dem Prinzen Ruprecht, der sie zur selben Zeit dort einführte[5]), in Deutschland „Krokodilsthränen" oder „Bologneser Tropfen".

Diese Tropfen widerstehen sehr gut einem starken Hammerschlage auf ihren Bauch, verwandeln sich aber in Staub, wenn man ihnen die Spitze abbricht, und zwar geht dies von Wärme- und Lichtentwickelung begleitete Zersplittern so plötzlich und heftig vor sich, dass dadurch ein dickes, mit Wasser gefülltes Glas, in dessen Innern der Glaskörper liegt, zersprengt werden kann.

Ein derartiger Tropfen befindet sich also im Zustande labilen Gleichgewichts, der durch eine beträchtliche Spannung gewisser Theile der Masse charakterisirt ist.

Früher[6]) nahm man an, dass der ganze innere Kern dadurch, dass er noch rothglühend und stark ausgedehnt sei, während der äussere Mantel bereits erstarrte, ein weit grösseres Volumen behalten müsse, als er einnehmen würde, wenn der ganze Tropfen langsam

---

[1]) Riche, loc. cit., 363.

[2]) D'Arcet, Bulletin de la Société d'encouragement, 289; 1814.

[3]) Gleichwohl ist dies durch d'Arcet entdeckte Geschmeidigwerden nicht genügend, um in der Technik die zinnreichen Bronzen im kalten Zustande bearbeiten zu können. Riche zeigte, dass diese Legierungen, welche wie das Zink, in der Kälte ungemein fest sind und sich in der hellen Rothgluth pulverisiren lassen, in der dunkelen Rothgluth sehr leicht geschmiedet und geplättet werden können. Auf Grund davon war es möglich, die im Orient übliche Fabrikation des Tamtam in Frankreich einzuführen.

[4]) Monconiz, Journal des voyages; Lyon 1665/1666.

[5]) Collection académique, Bd. VI, p. 261; éphémérides d'Allemagne.

[6]) Cf. Dufour, C. R., LXVIII, 398; 1869 etc.

erkaltet wäre; aus diesem Grunde herrsche im Inneren ein Zustand äusserster Spannung, der nur durch den Gegendruck der äussersten Schicht unwirksam gemacht werde, aber sofort ein Zerplatzen herbeiführe, sobald dieser Gegendruck durch eine Verletzung der äusseren Hülle an irgend einem Punkte aufgehoben würde. Indessen gelang es de Luynes[1]) mittels Flusssäure, deren Wirksamkeit sich beliebig einschränken und lokalisiren lässt, nach und nach von der Spitze ausgehend den ganzen Schwanz zu zerstören, ohne das Zerstäuben herbeizuführen; kam er dagegen bis an den Hals des Tropfens, so löste sich stets die ganze Masse in eine Unzahl kleiner Splitterchen auf. Umgekehrt konnte er beobachten, indem er den Tropfen mit dem Bauche bis nahe zum Halse in Flusssäure tauchte, wie die Säure nach und nach die verschiedenen Schichten des Glases zernagte und schliesslich den ganzen Tropfen auflöste, ohne irgend welche Explosion hervorzurufen. Hieraus zog er den Schluss, dass gerade der Kern des Tropfens sich im Gleichgewichte befinde und dass die Eigenthümlichkeiten der Krokodilsthränen auf eine Spannung zurückzuführen seien, welche in den äusseren Schichten herrsche. Zum Beweise erinnert de Luynes daran, dass rasch gekühltes Glas im Zustande der Ausdehnung verharrt[2]): Ein Glasstreifen mit parallelen Seitenflächen krümmt sich, und zwar wird die rasch gekühlte Seite convex. Die äusseren Schichten des Tropfens befinden sich also in einem Spannungszustande, wie wir es bei einer Anzahl von birnförmigen Kautschukhülsen finden würden, welche man so ausdehnt, dass sich immer eine über die andere ziehen lässt, und die man schliess-

---

[1]) De Luynes, Ann. de chem. et de phys. (3), XXX, 229; 1873.

[2]) Zu diesen rasch gekühlten Gläsern gehören ihrer Herstellung nach auch die Glasröhren, deren verhältnissmässig grosse Sprödigkeit auf die rasche Abkühlung in der Luft nach dem Ziehen zurückzuführen ist. Namentlich die Capillar-Röhren der zu den feinsten Temperaturmessungen verwendeten Stabthermometer zeigen, wenn sie nicht nachträglich sorgfältig gekühlt worden sind, eine sehr unangenehme Neigung zum Springen. Auch die oben angeführte Thatsache, dass rasch gekühltes Glas im Zustande der Ausdehnung verharrt, ist neuerdings durch genaue, in der Phys. Techn. Reichsanstalt ausgeführte Messungen bestätigt worden, aus denen es sich ergab, dass bei neuen Stabthermometern nach mehrmaligem Sieden eine scheinbare Vergrösserung der Fundamentalabstand von ca $0{,}01^0$ eintreten kann, welche auf eine durch das Sieden hervorgerufene Zusammenziehung resp. Verkürzung der Capillar-Röhre zurückzuführen sein dürfte, so dass es sich empfiehlt, aus diesen, wie noch aus anderen Gründen, neue Thermometer vor der Bestimmung des Fundamentalabstands längere Zeit hindurch einer höheren Temperatur auszusetzen. — G.

lich sämmtlich am Halse mit einem einzigen Bande zusammenschnürt.[1])

Es ist klar, dass man das Gleichgewicht des ganzen Systems stört, wenn man das allen Halstheilen gemeinsame Stück wegnimmt, während man eine Schicht nach der anderen entfernen darf, ohne das durch den inneren birnförmigen Kern aufrecht erhaltene Gleichgewicht zu stören. Andererseits wird man aber auch das Zerspringen des Tropfens dadurch herbeiführen können, dass man das dicke Ende desselben durchschneidet und so alle ungleichmässig gekühlten Glasschichten der Oberfläche auf einmal frei legt.

Wenn nun die äusseren Schichten in Folge ihrer Spannkraft den Bruch bewirken, dadurch dass man ihnen die Möglichkeit verschafft, sich zusammenzuziehen, so müssen sich die Molecüle jeder Schicht nach dem einen oder nach dem anderen Sinne verschieben, je nach dem man den Tropfen an der Spitze oder am

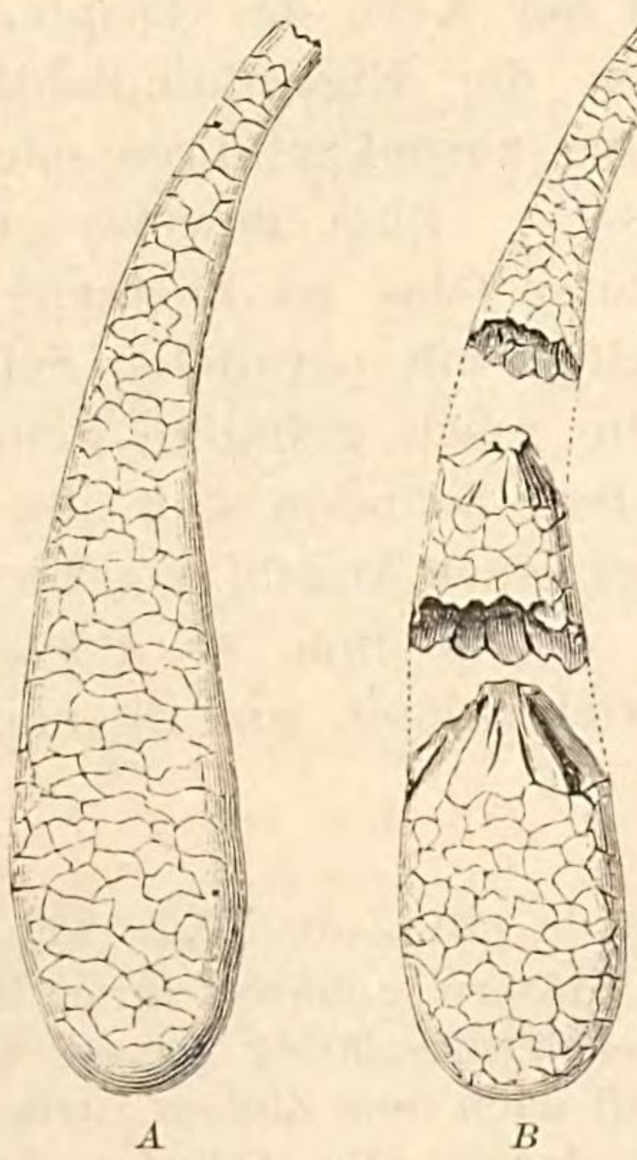


Fig. 227.

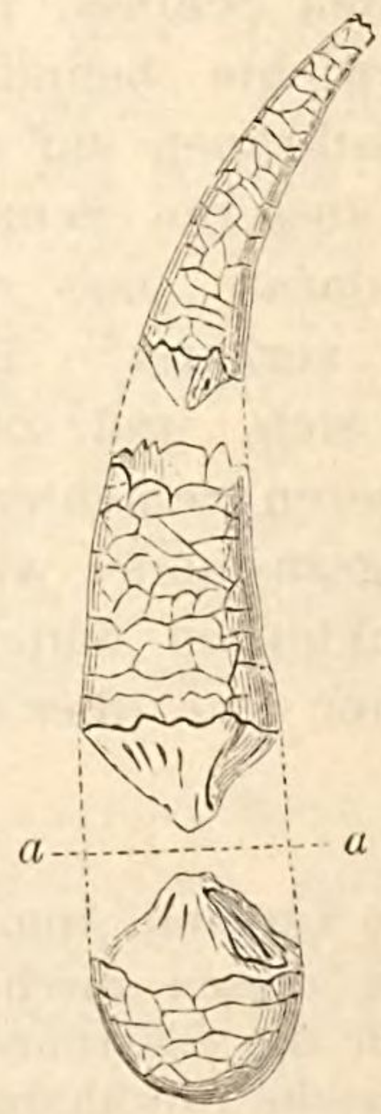


Fig. 228.

dicken Ende verletzt. Ein ebener Schnitt wird also das Aussehen einer kegelförmigen Oberfläche annehmen, und zwar wird die

---

[1]) Um dies einzusehen, genügt es wohl, darauf hinzuweisen, dass in Folge der schlechten Leitungsfähigkeit des Glases die erste Phase des Abkühlungsvorganges, wie schon oben beschrieben, einen ganz besonders starken Einfluss haben wird, indem der ganze äussere und mittlere Theil des Tropfens bereits abgekühlt und ausgedehnt ist, wenn der Kern erstarrt. In der That kann man Krokodilsthränen auch aus anderen, schlecht leitenden Substanzen herstellen, z. B. dem Kolophonium etc., wie Marangoni gezeigt hat. (Nuovo Cimento, V, 116; 1879.)

Spitze des Kegels nach der verletzten Seite zu liegen. Dadurch, dass de Luynes den Tropfen in flüssigen Gyps bettete, gelang es ihm, die Stücke auch nach dem Bruche in ihrer Stellung zu erhalten und er konnte so durch sorgfältige Ablösung der Bruchstücke die Richtigkeit dieser Schlüsse nachweisen, wie Fig. 227 und 228 zeigen. Fig. 227 giebt unter *A* einen durch Zerbrechen des Halses zerstörten Tropfen und unter *B* die dabei beobachtete Lagerung der Theilchen wieder; Fig. 228 zeigt die Art der Zersplitterung bei einem Tropfen, der am dicken Ende bei *a* durchgesägt wurde. Man sieht, wie in beiden Fällen die äusseren Schichten von der Schnittstelle zurückgewichen sind, ähnlich, wie es auch bei den über einander liegenden und gespannten birnförmigen Kautschukmembranen der Fall gewesen sein würde, um bei dem von de Luynes gebrauchten Bilde zu bleiben.

Übrigens verbinden die Bologneser Tropfen mit einer für sie geradezu charakteristischen Zerbrechlichkeit doch eine grosse Festigkeit, da ihr Körper, wie oben erwähnt, starke Hammerschläge erträgt, ohne zu zerbrechen. De la Bastie gelang es, diese Eigenschaft durch eine besondere Abkühlungsart in stark erhitzten Fetten noch weiter zu entwickeln[1]) und auf diese Weise Glasgegenstände herzustellen, welche, wenn auch nicht vollkommen unzerbrechlich, so doch ungemein dauerhaft und elastisch sind. Zerbrechen dieselben, so zerfallen sie nach Art der Bologneser Tropfen in eine Unmasse von kleinen Bruchstücken. Den Bruch führt man mit unfehlbarer Sicherheit herbei, wenn man die äusseren Schichten verletzt. Man kann also Hartglas weder mit der Säge, noch mit dem Bohrer oder mit dem Diamant bearbeiten, abgesehen von ganz speciellen Stellen, welche die Untersuchung im polarisirten Lichte verräth (de Luynes und Feil)[2]); die Glasscheiben sind demnach schon vor der Härtung in Stücke von der gewünschten Grösse zu schneiden.[3])

---

[1]) Das Härten ist eine schwierige Aufgabe, da die Bedingungen von der Zusammensetzung des Glases und der Grösse der Stücke abhängen. Leicht schmelzbares Krystallglas wird in einem Bade von 60—120° warmem Fette gehärtet; gewöhnliches Glas taucht man in eine Mischung von Öl und Fett bei einer Temperatur von 150—300°; bei den schwer schmelzenden Gläsern wendet man noch höhere Temperaturen an.

[2]) Eine kreisförmige Scheibe lässt sich in ihrem Mittelpunkte durchbohren, eine viereckige in einer durch die Mitte gehenden und zu einer Seite parallelen Geraden schneiden; versucht man aber einen Schnitt in der Richtung der Diagonale, so springt die Scheibe, wenn man in eine bestimmte Tiefe gelangt ist.

[3]) Neuerdings ist es Friedr. Siemens („Gehärtetes Glas“, Ztschr. für Glasindustrie 18, p. 417—418, 1885) gelungen, durch eine Modification

Amorpher Schwefel. — Plötzliche Abkühlung bewirkt beim geschmolzenen Schwefel eine äusserst interessante Umwandlung, sie liefert nämlich den weichen, sogenannten amorphen Schwefel, dessen Eigenthümlichkeiten indessen zu bekannt sind, als dass sie hier erwähnt zu werden brauchten.

171. Härte. — Der Diamant ritzt alle anderen Körper und wird selbst von keinem derselben geritzt, er ist also der härteste Körper. Mohs[1]) stellte folgende, von den Mineralogen viel gebrauchte Tabelle auf, in welcher er zehn der gebräuchlichsten Mineralien vom weichsten bis zum härtesten so ordnete, dass jedes derselben sich von allen der Reihenfolge nach später kommenden ritzen lässt und seinerseits wieder alle vorher gehenden zu ritzen vermag.

1. Talk 2. Steinsatz	lassen sich durch den Fingernagel ritzen	6. Orthoklas (Feldspath)	
3. Kalkspath		7. Quarz 8. Topas 9. Korund 10. Diamant	ritzen das Glas.
4. Flussspath			
5. Apatit			

Da das Poliren im Grunde genommen in dem Ziehen einer grossen Anzahl paralleler feiner Ritzen besteht, so könnte es scheinen, als ob die hierfür geltende Reihenfolge mit der Härtescala identisch wäre. Das ist jedoch keineswegs der Fall; gewisse Substanzen nämlich bestehen aus sehr harten Theilchen, welche durch lufthaltige oder mit weicher Materie gefüllte Poren getrennt sind (cf. Bimstein, Sandstein); dieselben lassen sich bequem ritzen, da ihre harten Bestandtheile leicht abbrechen, während sie beim Poliren in Folge der Härte ihres Kornes sehr kräftig wirken.

Hugueny[2]) untersuchte, welche Belastung nothwendig ist, um eine Stahlspitze $\frac{1}{10}$ mm tief in die verschiedenen Metalle hineinzupressen, und ordnete dem entsprechend die Metalle ihrer Härte nach folgendermaassen:

Blei, Zinn, Aluminium, Gold, Silber, Zink, Kupfer, Platin, Eisen, Stahl.[3])

---

des De la Bastie'schen Verfahrens Glasgegenstände und speciell Glasplatten herzustellen, welche bei noch grösserer Härte weit widerstandsfähiger sind und auch bei oberflächlichen Verletzungen nicht sofort in viele Stücke springen. — G.

[1]) Mohs, Grundriss der Mineralogie I, 374: 1822.

[2]) Hugueny, Recherches expérimentales sur la dureté des corps et spécialement des métaux, Strassbourg 1865.

[3]) Eine neue und befriedigendere Definition der Härte als der „Elasticitätsgrenze eines Körpers bei Berührung einer ebenen Fläche desselben mit einer kugelförmigen Fläche eines anderen Körpers“ führte

Die Beimengung kleiner Mengen einer anderen Substanz kann die Härte eines Metalls bedeutend verändern; so sind die bei Münzen gebräuchlichen Legirungen mit 10 % Kupfer bekanntermaassen weit widerstandsfähiger, als reines Gold und Silber.

Bei den Krystallen ist die Härte an den verschiedenen Flächen[1]) verschieden, ja sie kann sich sogar längs einer gegebenen Linie je nach dem Sinne des Striches ändern, wie Huyghens beim Isländischen Spath beobachtete. Übrigens stimmt dies vollständig mit den Ansichten überein, welche man von der Anordnung der Molecüle in diesen Körpern allgemein angenommen hat (**129**).

Bei den Abnutzungs-Erscheinungen spielt die Geschwindigkeit eine wesentliche Rolle. Perkins[2]) hat gezeigt, dass eine Stahlfeile eine in rascher Rotation befindliche Messingscheibe nicht mehr anzugreifen vermochte. Im Gegentheil kann auch ein weicher Körper einen härteren verletzen, wenn er nur eine hinreichende Geschwindigkeit besitzt: So durchdringt z. B. ein aus einer Flinte geschossenes Talglicht ein Brett aus Tannenholz. Colladon[3]) schnitt mit einer Scheibe aus weichem Eisen, die mehrere Hundert Umdrehungen in der Minute machte, gehärteten Stahl und selbst Achat und Quarz. Ebenso ist bekannt, wie man mit Hülfe von Sand, der gegen eine in rascher Rotation befindliche bronzene Scheibe geschleudert wird, die härtesten Substanzen graviren und schneiden kann.

II. Festigkeit.

172. Verschiedene Formen der Festigkeit. — Die Festigkeit oder der Widerstand gegen Bruch tritt in verschiedenen Formen auf, und zwar als:

Zugfestigkeit, oder *absoluter Widerstand.*
Biegungsfestigkeit, oder *relativer Widerstand.*
Drehungsfestigkeit.

Hertz ein (H. Hertz, Verhandlungen der Berliner phys. Gesellschaft, 1882 p. 67) und gab hierfür auch die theoretische Entwickelung. (Crelle's Journal 92 p. 156; 1882). Hierauf fussend stellte Auerbach (Absolute Wärmemessung; Nachrichten von der Königl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, December 1890) in den letzten Jahren mit einer sinnreich erdachten Vorrichtung Versuche über die Härte verschiedener Glassorten und Krystalle an, deren Resultate mit der Theorie allerdings nicht vollständig übereinstimmen; immerhin darf man hoffen, dass auf dem eingeschlagenen Wege diese ebenso schwierige, als wichtige Frage mit der Zeit eine endgültige Lösung finden werde. — G.

[1]) Cf. Frankenheim, loc. cit.

[2]) Perkins, Journal of Science, XVI 155; 1823.

[3]) Colladon, Biblioth. univ. de Genève XXV, 281; 1824.

173. Zugfestigkeit. — Unter übrigensgleichen Verhältnissen ist die zum Zerreissen beim Zuge nothwendige Kraft dem Querschnitte proportional,[1]) doch hängt sie in hohem Grade von der Substanz ab.

Folgende Tabellen enthalten die Resultate der hauptsächlichsten, auf diesen Gegenstand bezüglichen Messungen. Die Bruchmoduln sind in Kilogramm angegeben und auf das Quadratmillimeter bezogen.

1. *Metalle.*[2])

	In Drähten von 1 mm Durchmesser					
	gegossen		gezogen		ausgeglüht	
	Bruchmodul					
	langsam	plötzlich	langsam	plötzlich	langsam	plötzlich
Blei	1,25	2,21	2,07	2,36	1,80	2,04
Zinn	3,40	4,16	2,45	2,97	1,70	3,60
Zink	1,50	—	12,80	15,77	—	14,40
Gold	—	—	27,00	27,50	10,08	11,05
Silber	—	—	29,00	29,60	16,02	16,40
Platin	—	—	34,10	35,00	23,50	26,75
Kupfer	—	—	40,30	41,00	30,54	31,82
Eisen	—	—	61,10	63,80	46,88	50,25
Gussstahl	—	—	—	83,80	65,70	—
Englischer Stahl	—	—	70,00	92,50	40,00	53,90

Haben die Molecüle eine solche Entfernung von einander angenommen, dass die Resultante der zwischen ihnen wirksamen Kräfte geringer wird, als die angewendete Belastung, so sollte ein ganz homogener Draht eigentlich nicht an einer einzigen Stelle reissen, sondern vollkommen in Staub zerfallen. Die Bruchmoduln geben also, so zu sagen, Aufschluss über den Mangel an Homogenität der untersuchten Körper, keineswegs aber über die Natur der Molecularkräfte.

Die oben angegebenen Zahlen gelten für gewöhnliche Temperatur (15^0—20^0). Wertheim hat ebenso die Zugfestigkeit bei 100^0 und 200^0 gemessen, Baudrimont[3]) wiederholte diese Messungen sorgfältig und fand folgende Werthe:

	0°	100°	200°
Gold	18,400	15,224	12,878
Platin	22,625	19,284	17,277
Kupfer	25,100	21,873	18,215
Silber	28,324	23,266	18,577
Palladium	36,481	32,484	27,077
Eisen (feiner Draht)	205,405	191,725	210,280

[1]) Beim Verlassen des Zieheisens sind die feinen Drähte verhältnissmässig haltbarer, als die dicken, da sie stärker gehärtet sind.

[2]) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3), XII, 385; 1844.

[3]) Baudrimont, Ann. de chim. et de phys. (3), XXX, 304; 1850.

Bei steigender Temperatur nimmt die Festigkeit ab; wenn das Eisen auch an einem Punkt eine Ausnahme macht, so folgt es doch bei höheren Temperaturen wieder der allgemeinen Regel: In der dunkelen Rothgluth hat es nur noch $\frac{1}{6}$ der Festigkeit, die es bei 0^0 besitzt (Tremery).[1])

Mechanische Bearbeitung erhöht wesentlich die Festigkeit, Anlassen vermindert dieselbe. Auch die Structur hat einen bedeutenden Einfluss. Soufflot[2]) erhielt für die verschiedenen Eisensorten folgende Werthe:

Eisen	mit	grobkörnigem	Bruche	17,96
„	„	mittlerem	„	23,68
„	„	feinkörnigem	„	35,02
„	„	halbfaserigem	„	62,28
„	„	ganzfaserigem	„	90,01

Bei Gusseisen schwankt der Bruchmodul zwischen 3 und 13, bei Kupfer zwischen 16 und 53, bei Platin zwischen 22 und 41; auch bei den anderen Metallen zeigen sich ähnliche Unsicherheiten (Frankenheim).[3])

2. *Legirungen.*[4])

Letternmetall Pb_2Sb	1,87
Zinngiesserloth $PbSn$	2,46
Tomback $ZnCu_2$	32,50
Reines Messing $ZnCu_2$	60,22
Argentan $Zn_1Cu_{13}Ni_3$	61,88
Packfong $Zn_2Cu_3Ni_3$	68,10

Diese Zahlen machen keinen Anspruch auf Gesetzmässigkeit; sie gelten nur für die untersuchte Legirung.

---

[1]) Le Chatelier (cf. C. R. 4890 p. 705—708) erhielt folgende Resultate:

1. *Bei einer und derselben Temperatur* deformirt sich ein Metall unter der Wirkung einer gegebenen Belastung mit einer Geschwindigkeit, die constant abnimmt, und strebt einem bestimmten Gleichgewichtszustande zu.

   Die Grösse dieser Deformationen, welche den verschiedenen Gleichgewichtszuständen entsprechen, wächst rascher, als die Grösse der Belastung.

   Die Deformationen, welche durch Stösse von derselben Intensität hervorgebracht werden, sind um so schwächer, je rascher die Stösse verlaufen.
2. *Bei wachsender Temperatur* nehmen, unter sonst gleichen Verhältnissen, bei derselben Belastung die Deformationen zu, die Zugfestigkeit nimmt ab. — G.

[2]) Soufflot, in Rondelet's „Art de bâtir“ (3), XII, 581; 1844.

[3]) Frankenheim, loc. cit. 487.

[4]) Wertheim, Ann. de chim et de phys. (3), XII, 581; 1844.

3. *Glas.*[1])

Fensterglas	1,763	Flaschenglas	1,002
Spiegelglas	1,400	Krystall aus Baccarat . . .	0,665

Die Anordnung ist dieselbe wie für die Elasticitäts-Coefficienten.

4. *Holz* mit 20 % Wassergehalt.[2])

	Festigkeit in		
	Längs-	radialer	tangent. Richtung
Pappel	1,97	0,146	0,214
Kiefer	2,48	0,256	0,196
Buche	3,57	0,885	0,752
Ahorn	3,58	0,716	0,371
Tanne	4,18	0,220	0,297
Birke	4,30	0,823	1,063
Erle	4,54	0,329	0,175
Eiche	5,66	0,582	0,406
Esche	6,78	0,218	0,408
Akazie	7,93	—	1,231

Wie bei den Elasticitäts-Coefficienten dieser Holzarten, so spielt auch hier die Richtung der wirkenden Kraft eine wesentliche Rolle.

5. *Organische Fasern.*[3])

Pferdehaar	von	0,26	mm Durchmesser . . .	9,644
Menschenhaar	„	0,10	„ . . .	11,595
Wolle	„	0,50	„ . . .	13,951
Spinnefaden	„	0,0025	„ . . .	18,809
Hanffaden	„	0,26	„ . . .	25,949
Coconfaden	„	0,0013	„ . . .	27,500

Eine Reduction auf die Einheit des Querschnittes bei der Berechnung des Bruchmoduls ist nur für die sehr homogenen Fäden gültig, wie für die Spinnefäden oder Kokonfäden; die Festigkeit nähert sich dann derjenigen der gebräuchlichsten Metalle.

Die Festigkeit eines Seiles variirt zwischen 4 und 8.

6. *Organische Gewebe.*[4])

Muskeln	0,04	Nerven	1,35
Arterien	0,14	Sehnen	6,25
Venen	0,18	Knochen	8

Abgesehen von der bei der Reduction auf die Einheit auftretenden Unsicherheit geben diese Zahlen nur die Mittelwerthe

---

[1]) Wertheim et Chevandier, Ann. de chim. et de phys. (3), XIX, 120 u. 252; 1847.

[2]) Wertheim et Chevandier, C. R. XXIII, 663; 1846.

[3]) Frankenheim, loc. cit., 453.

[4]) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3), XXI, 385; 1847. Cf. auch Valentin, Physiologie I, 34; Braunschweig 1844.

der thatsächlich sehr von einander abweichenden Resultate. So wechselt beispielsweise bei den Knochen die den Bruch herbeiführende Belastung je nach der angewandten Substanz zwischen 3,30 kg und 15,03 kg pro Quadratmillimeter.

Im Gegensatz zu dem Zerreissen durch Zug steht naturgemäss das Zerquetschen durch Compression, das sich eng an die früher erwähnten Erscheinungen des seitlichen Ausweichens der Theilchen anschliesst. Der Widerstand gegen Zerquetschen, die Druckfestigkeit, wurde hauptsächlich für die Baumaterialien untersucht. Hier sollen einige von Navier für die Steine,[1]) von Rondelet für die Mörtelarten,[2]) von Hodgkinson für Gusseisen[3]) und Holz[4]) bestimmte Zahlen folgen; die Tragmoduln sind, wie immer, in Kilogramm ausgedrückt und auf das Quadratmillimeter reducirt.

Porphyr	24,80	Gusseisen . .	100—60
Granit	17,30	Eichenholz	7,10
Harter Marmor . .	10,40	Eschen	6,60
Sandstein . .	9,50—2,50	Tannen	5,10
Guter Ziegelstein.	1,50	Fichten	4,80
Gewöhnl. Mörtel . .	0,50	Pappel.	3,60

Diese Coefficienten sind sämmtlich grösser als diejenigen für den absoluten Widerstand derselben Substanzen.

Vicat hat mit dem Namen *„Querwiderstand“* den Widerstand gegen Trennung durch Meisel oder Pfriemen bezeichnet; in Deutschland ist hierfür die Bezeichnung *Scheerfestigkeit* oder *Schubfestigkeit* üblich. Abgesehen von dem Zerquetschen, dem sie sich im Übrigen nähert, erfordert diese Art des Zerbrechens am meisten Kraft; so übertrifft die Scheerfestigkeit bei einem Sandstein die dazu gehörige Zugfestigkeit um mehr als das sechsfache.

174. Biegungsfestigkeit oder relativer Widerstand. — Der Widerstand eines festen Körpers gegen Biegung wird ebenso, wie in den vorhergehenden Fällen, durch die Belastung gemessen, welche nöthig ist, um ihn zum Brechen zu bringen.

Betrachten wir den Fall, dass eine Stange an ihrem einen Ende eingeklemmt ist und an ihrem anderen Ende von einer senkrecht zur Richtung der Stange wirkenden Kraft angegriffen wird, dann muss, um den Bruch herbeizuführen, die Grösse der Kraft umgekehrt proportional sein der Länge L der Stange

---

[1]) Navier, Mécanique appliquée I, 5; Paris 1826.
[2]) Rondelet, loc. cit. 453.
[3]) Hodgkinson, Brit. Assoc. Report. 1833 u. 1837.
[4]) Hodgkinson, Phil. Trans. 385; 1840.

und direct proportional der Breite b, dem Quadrate der Dicke e und einem Coefficienten r, der sich auf die Biegungsfestigkeit einer bestimmten Substanz bezieht:

$$F = \frac{1}{6} \frac{rbe^2}{L}.$$ [1])

Der Coefficient r unterscheidet sich sehr wenig von dem Zugmodul, da die Biegung im wesentlichen aus einer übermässigen Dehnung der obersten Lagen nahe dem eingeklemmten Ende besteht;[2]) hier möge beispielsweise die Biegungsfestigkeit einiger Holzarten nach Barlow[3]) angegeben werden, wobei als Einheit immer das Millimeter und Kilogramm gilt:

Tanne	4,435	Eiche	7,050
Buche	6,562	Esche	8,543

Für Gusseisen fand Stephenson im Mittel 32.

Wenn die Kraft auf die Mitte einer an beiden Enden festen Stange wirkt, so muss sie, — alle übrigen Verhältnisse als gleich vorausgesetzt, — viermal so gross sein, als im ersten Falle, um die Stange zum Brechen zu bringen, und achtmal so gross, wenn die Stange gleichzeitig in der Mitte und an den beiden Enden brechen soll.

Der Widerstand einer am einen Ende befestigten und am anderen Ende belasteten Stange mit rechtwinkeligem Querschnitte ist am geringsten am befestigten Ende.

Will man degegen erreichen, dass die Biegungsfestigkeit der Stange an jedem Punkte dieselbe ist, so muss man die Dimensionen nach der Formel: $\frac{by^2}{x} = \text{Const.}$ wählen, wobei y die Dicke der Stange in der Entfernung x vom freien Ende bezeichnet. Das Profil der Stange wird also eine Parabel sein, an deren Scheitel der Angriffspunkt der Kraft liegt. Für eine in der Mitte befestigte und an beiden Enden von gleichen Kräften angegriffene Stange werden wir als Profil eine Doppelparabel erhalten, eine Gestalt, die man häufig dem Balancier der Dampfmaschinen giebt.

---

[1]) Für einen runden Stab vom Radius R findet man: $F = \frac{\pi}{4} \frac{rR^3}{L}$.

[2]) Gleichzeitig findet ein Zusammenpressen der unteren Theilchen statt, so dass, falls die Druckfestigkeit sehr viel grösser ist, als die Zugfestigkeit, die Biegungsfestigkeit, die in der Mitte zwischen beiden steht, wesentlich höher sein kann, als man nach der Zähigkeit des Materials erwarten sollte.

[3]) Barlow, in Morin: Lecons de mécanique pratique I, 233; Paris 1846.

Bei gleichem Gewichte ist die Biegungsfestigkeit um so grösser, je weiter das zu biegende Material von der Achse des betreffenden Stückes entfernt liegt: Die Festigkeit einer Röhre übertrifft weitaus diejenige eines Vollcylinders von demselben Gewichte. Dieses durch Galilei entdeckte Gesetz, von dem uns die Natur selbst Anwendungen in den langen Knochen der Thiere, den Federn der Vögel, den hohlen Stengeln gewisser Gewächse etc. vorführt, ermöglicht es, Festigkeit mit Leichtigkeit zu verbinden; man benützt dasselbe stets bei den Eisenconstructionen: (eiserne T-Träger, Doppel-T-Träger, Röhrenbrücken etc.).

Die Festigkeit des Materials ist eine der wichtigsten und schwierigsten Fragen für die angewandte Mechanik.

175. Drehungsfestigkeit. — Auch Torsion kann einen Bruch veranlassen; bei den starren Körpern beruht dieselbe auf einem Gleiten der Molecüle, bei den dehnbaren auf einer Verlängerung der äusseren Fasern: die Bruchstelle zeigt in beiden Fällen ein verschiedenes Aussehen (Wertheim). Im allgemeinen lässt sich das Moment der den Bruch herbeiführenden Kraft darstellen durch tB^3, wobei t den Bruch-Coefficient bei Torsion bedeutet, B^3 einen Ausdruck dritten Grades, der von den Querdimensionen abhängt, z. B.:

für einen kreisförmigen Stab vom Radius R $\quad B^3 = \frac{\pi}{2} R^3$,

für eine rechtwinkelige Stange von der Breite b und der Dicke c $\quad B^3 = \frac{2}{3} \frac{b^3 c^3}{\left(b^2 + c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Die Untersuchungen über die Dehnungsfestigkeit sind noch mangelhaft; wir besitzen nur einige Messungen des Bruch-Coefficienten von Gusseisen, die zwischen 17,273 und 25,701 schwanken.[1] [2])

---

[1]) Mousson, Physik auf Grundlage der Erfahrung I, 247; Zürich 1878.

[2]) Eine ziemlich umfassende Angabe der Werthe für Zug- und Biegungsfestigkeit findet sich u. a. auch in *„F. Reuleaux, Der Constructeur“*. — G.

Viertes Capitel.

Theilbarkeit.

176. Porosität. — Wir erinnern, ohne länger dabei zu verweilen, an den Quecksilberregen im luftleeren Raum (die Quecksilbertropfen dringen durch ein hölzernes Brett oder ein Stück

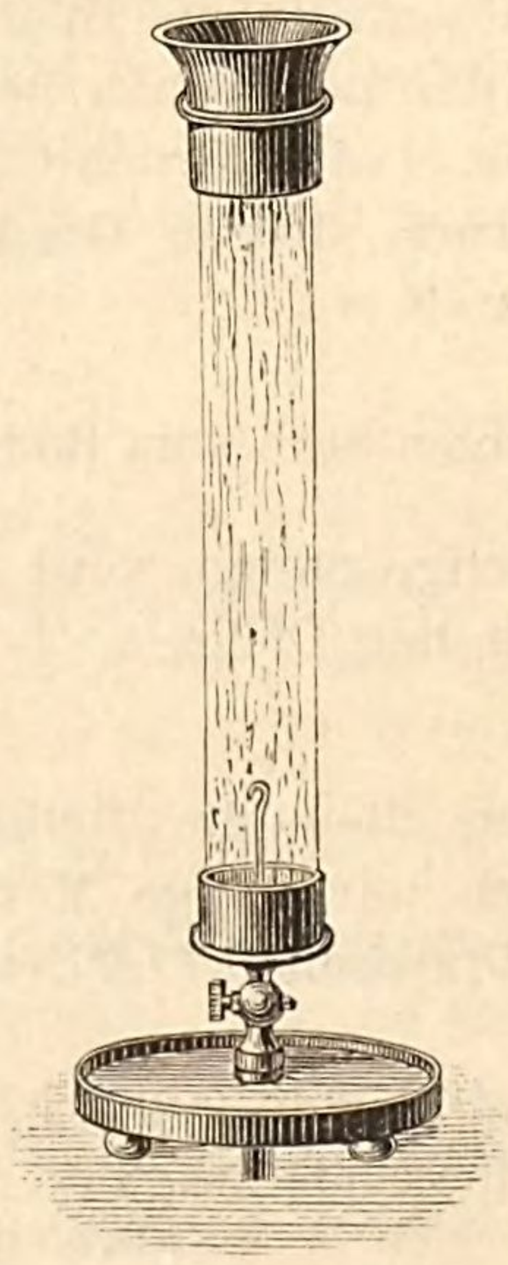


Fig. 229.

Leder), — an das Durchsickern von Wasser durch eine geschlossene und zusammengepresste Bleikugel (ein Experiment von Bako, auf das wir noch zurückkommen werden), an die Thatsache, dass unter dem Recipienten der Luftpumpe Holz im Wasser untergeht, da es unter gewöhnlichen Verhältnissen nur in Folge der Luft schwimmt, welche es einschliesst, an die wohlbekannten Erscheinungen der

Filtration, der Versteinerung, der Zerklüftung der Steine durch den Frost etc.

Alle diese Thatsachen beweisen für die grösste Anzahl der festen Körper das Vorhandensein von mehr oder minder engen Poren. Diese Poren öffnen sich in der Hitze: Stahl und Platin z. B. sind in der Hitze durchlässig für Wasserstoffgas, welches diese Metalle unter gewöhnlichen Verhältnissen in der Kälte nicht zu durchdringen vermag. Ausserdem sind sie für den einen Stoff durchlässiger, als für den anderen: So dringt Öl leicht in den Marmor ein, Wasser dagegen nicht.

177. Theilbarkeit.[1]) — Die Zerkleinerung der festen Körper kann sehr weit getrieben werden, wie man aus folgender Tabelle erkennen wird, in welcher der Buchstabe μ, wie gewöhnlich, das Mikron (0,001 mm) bedeutet:

Gestossenes oder ausgezogenes Glas	1^{μ}
Platindraht (Wollaston'sches Verfahren) . . .	0,8
Blattgold	$0,1$[2])
Glimmerblättchen (Haüy)	0,043
Goldschicht auf einem Silberdraht	0,004

Solche vergoldete Silberdrähte erhält man durch das Ausziehen eines Silbercylinders, der mit einer dünnen Goldschicht bedeckt ist; ein Milligramm Gold kann auf diese Weise eine ununterbrochene Bedeckung für 6 Millionen kleiner, noch recht deutlich sichtbarer Quadrate von 0,1 mm Seitenlänge liefern, es enthält also jedenfalls weit mehr als 6 Millionen Molecüle.

Von der Grösse der festen Theilchen hängt hauptsächlich der Widerstand ab, den dieselben von Seiten einer Flüssigkeit erfahren (**78**): so erklärt sich das freie Schweben dichter, aber sehr fein vertheilter Körper in der Luft oder im Wasser.

Diese Staubtheilchen setzen sich um so langsamer, je feiner sie sind; hierin hat man ein Mittel, die feinsten Körnchen vonden gröberen abgesondert zu sammeln.

Um die festen Körper in diesen Zustand feinster Vertheilung überzuführen, kann man verschiedene Mittel anwenden:

1. Mechanische (Hämmern, Walzen, Ausziehen, Stossen).

2. Physikalische, wie die Auflösung und rasche Verdampfung des Lösungsmittels (in Schwefelkohlenstoff aufgelöster Phosphor), oder die plötzliche Verdichtung eines Dampfes (Schwefel, Kalomel).

---

[1]) Cf. Gariel, Propriétés générales des corps, 14; Paris, Savy, 1880

[2]) Die Dicke dieser Blättchen kann noch stark verringert werden durch Eintauchen in Cyankalium (Faraday).

3. Chemische (aus Amalgam ausgeschiedenes Gold, explodirendes Eisenpulver, Goldpurpur von Cassius).

Sehr feiner Staub backt, wenn er stark zusammengepresst wird, vollständig zusammen. Spring[1]) erhielt auf diese Weise ebenso kompakte Massen, wie durch Schmelzen, und zwar zeigten dieselben sogar eine krystallinische Structur; letztere tritt sehr deutlich hervor bei dem unter 6000 Atmosphären verdichteten Wismuth und an dem bei 130° unter 5000 Atmosphären comprimirten Zink. Die krystallinischen Pulver backen mit ausserordentlicher Leichtigkeit zusammen; beim Graphit tritt dies erst bei 5500 Atmosphären ein, während Zuckerkohle auch bei 10,000 Atmosphären noch staubförmig bleibt, ebenso das Silicium; die Metalle schweissen sich um so leichter an einander, je geringer ihre Härte ist; bei 5000 Atmosphären dringt das Blei durch alle Ritzen des Apparates.

178. Diffusion der festen Körper. — Tait bemerkte, dass ein unschmelzbarer und äusserst feiner Staub unter dem Einflusse der Hitze sehr beweglich wird und sich in mancher Beziehung wie eine Flüssigkeit verhält, so dass er deutliche Strömungen und kleine Wellen auf der Oberfläche zeigt. Er fragte sich in Folge davon, ob nicht ebenso wie bei den Flüssigkeiten auch bei zwei unschmelzbaren, und sehr feinen staubförmigen Körpern eine Diffusion stattfinde, und unternahm mit Sidney Marsten darauf hinzielende Untersuchungen. Dieselben boten jedoch sowohl in physikalischer wie in chemischer Beziehung ganz besondere Schwierigkeiten dar, und die damals ins Auge gefasste Aufgabe harrt noch immer der Lösung.

Wenn man einen von Kohlenstaub oder Bleierz umgebenen Porzellantiegel auf hohe Temperatur erhitzt, so dringt die Kohle um so tiefer in das Porcellan ein, je länger der Versuch gedauert hat.[2])

Ebenso dringt die Kohle in das Eisen[3]) ein, und gerade hierauf beruht ja die Umwandelung von Eisen in Stahl bei dem Cementverfahren.

Durch sehr genaue Messungen der Potentialunterschiede zeigte Pellat[4]), dass zwei parallele, in sehr geringer Entfernung (einige

---

[1]) Spring, Ann. de chim. et de phys. (5), XXII, 170; 1881.

[2]) Sidney Marsten, Proceed. of the Royal Society of Edingburgh, 712; 1880. — Violle, C. R., XCIV, 28; 1882.

[3]) Colson, C. R., XCIII, 1074; 1881; und XCIV, 26; 1882.

[4]) Pellat, Journal de physique (2), I, 416; 1882.

Zehntel Millimeter) von einander befindliche metallische Oberflächen gegenseitig eine geringe Veränderung in der Beschaffenheit ihrer Oberflächenschichten hervorzubringen vermögen. Bei jedem Metall erfordert diese Änderung, — je nach der Natur des benachbarten Metalls, — einige Minuten zum Entstehen, wächst zuerst und strebt einem bestimmten Grenzzustande zu. Hat man das störende Metall entfernt, so kehrt das gestörte Metall langsam von selbst zu seinem ursprünglichen Zustande zurück. Der ganze Vorgang spielt sich, kurz gesagt, so ab, als ob die Metalle bei gewöhnlicher Temperatur eine flüchtige Substanz aussendeten, welche dadurch, dass sie sich auf der Oberfläche der Gegenstände absetzt, deren chemische Natur verändert; hört der Einfluss des Metalls auf, so verlässt der flüchtige Stoff nach und nach diese Oberfläche, was den ursprünglichen Zustand wieder herbeiführt.

Wir werden in den Moser'schen Bildern analoge Erscheinungen wiederfinden.

Fünftes Capitel.

Adhäsion; Reibung.

I. Adhäsion.

179. Adhäsion zwischen zwei sich berührenden festen Körpern. — Zwei feste, sich berührende Körper zeigen unter gewissen Umständen eine deutliche Adhäsion, d. h. sie haften fest an einander. So setzen sich die Staubtheilchen auf allen Körpern fest, die Bleistiftschwärze haftet auf dem Papiere, die Kreide auf der Tafel, so hält sich das Amalgam hinter der Spiegelglasplatte,

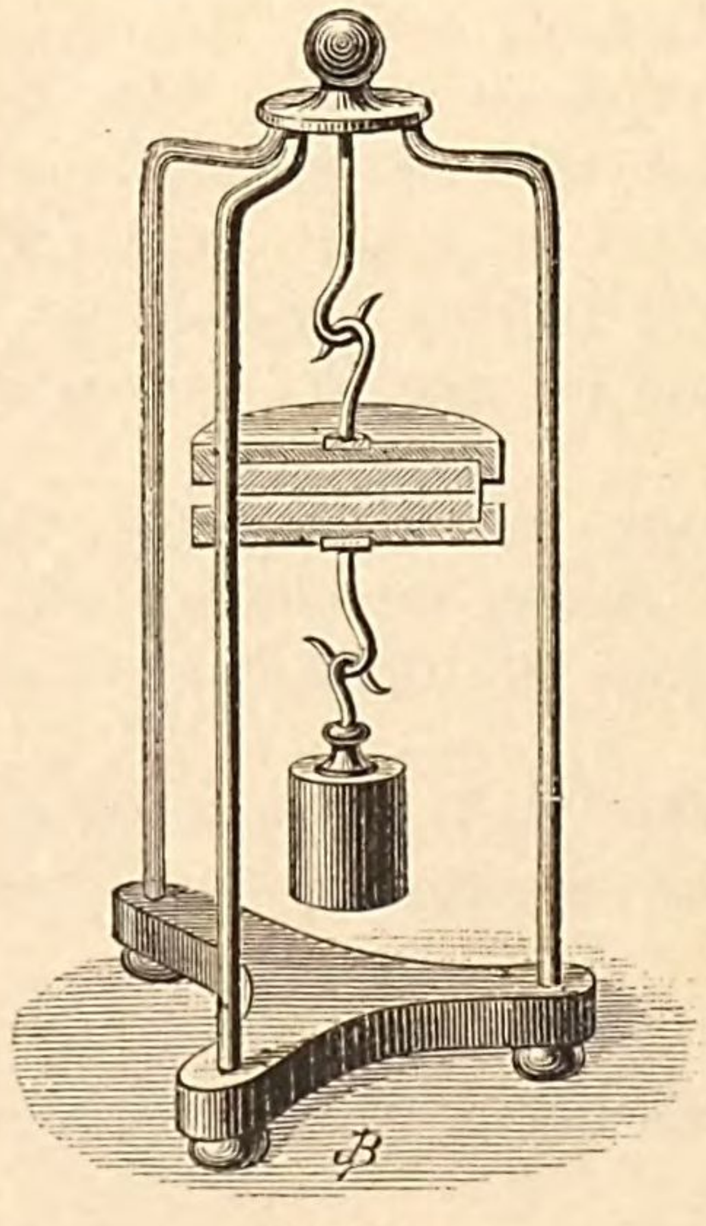


Fig. 230.

die Versilberung auf dem Glase, die Goldplättchen auf den Gegenständen, die sie bedecken. Bei den physikalischen Vorlesungen pflegt man diese Adhäsion mittels der Magdeburger Platten zu

demonstriren; man bezeichnet damit zwei vollkommen eben geschliffene Glasplatten, die man von der Seite her über einander schiebt und zusammenpresst, so dass sie zu einer möglichst innigen Berührung gelangen. Die eine der Platten kann man dann an einem Gestelle befestigen und an die andere sogar Gewichte anhängen, ohne dass sie losreisst.[1]) Da dies Experiment sogar im luftleeren Raume gelingt, kann man dasselbe nicht auf den Druck der atmosphärischen Luft zurückführen, sondern hat es als eine Wirkung der Molecularkräfte aufzufassen. Die Adhäsion ist nichts weiter als ein specieller Fall der Cohäsion, deren Wirkung hierbei in Folge der grösseren Entfernung der Molecüle bedeutend vermindert wird. Diese Ansicht wird durch alle Nebenumstände bestätigt, welche die Erscheinungen begleiten: Die Adhäsion wächst mit der geometrischen Vollkommenheit und der physikalischen Reinheit der Oberflächen und ferner mit der Innigkeit der Berührung. Über einander gelegte Gold- und Silberplättchen verbinden sich ganz fest, wenn man sie zusammen durch ein Walzwerk schickt. Einen gut gereinigten und mässig erwärmten Messinggegenstand kann man leicht dadurch versilbern, dass man ein Silberblättchen darauf presst. Die zwei Hälften einer Bleikugel, die man mit einem Rasiermesser durchgeschnitten hat, haften weiter fest an einander, wenn man sie nur sofort wieder an einander drückt. Die Adhäsion von Staub wird durch die nur kurze Zeit dauernde Vermengung mit einer Flüssigkeit vermehrt, die alsdann verdampft (Mörtel, Leim, Firniss u.s.w.). Die Dicke der Platten spielt gar keine Rolle, da die Wirkung der Molecularkräfte verschwindet, wenn die Entfernung eine messbare Grösse erreicht; so findet zwischen zwei festen Körpern, die nur um Bruchtheile eines Millimeters von einander abstehen, überhaupt keine Adhäsion mehr statt.

Die Annäherung zwischen weichen Körpern kann so weit getrieben werden, dass die Adhäsion zur Kohäsion wird. Durch Wärme erweichte Eisenstücke lassen sich durch Hämmern fest an einander schweissen, — eine ungemein werthvolle Eigenschaft, auf der die ganze Bearbeitung dieses Metalles beruht; Platin verhält sich ebenso; frisch geschnittene Kautschukstücke verbinden sich schon bei gewöhnlicher Temperatur fest mit einander.

Die oben besprochene Erscheinung ist nicht zu verwechseln mit derjenigen, die man in der Mechanik unter Adhäsion versteht

---

[1]) In den Glasniederlagen muss man die einzelnen Glasscheiben von einander isoliren, sonst würde die Adhäsion bei grossen Scheiben so stark werden, dass man dieselben nicht trennen könnte, ohne sie zu zerbrechen.

und die nichts anderes ist, als eine Art von Reibung, d. h. ein gegenseitiges Ineinandergreifen der bei zwei sich berührenden Körpern vorhandenen Erhöhungen und Vertiefungen: Je glatter die Oberflächen, desto geringer die Reibung, desto grösser aber die Adhäsion; diese Thatsache allein genügt schon, um die beiden Erscheinungen auseinanderzuhalten.

II. Die Reibung.

A. Reibung beim Gleiten.

180. Versuche von Coulomb. — Amontons[1]) war der erste, der die Reibung der festen Körper zu bestimmen suchte; aus seinen Versuchen schloss er, dass die Reibung von der Ausdehnung der Berührungsflächen unabhängig und dem Drucke proportional ist.[2]) Die ersten genauen Untersuchungen jedoch führte Coulomb[3]) — damals Génie-Capitän — zu Rochefort aus.

Der Apparat von Coulomb bestand der Hauptsache nach aus einem Schlitten, der auf einem horizontalen Brette gleiten konnte.

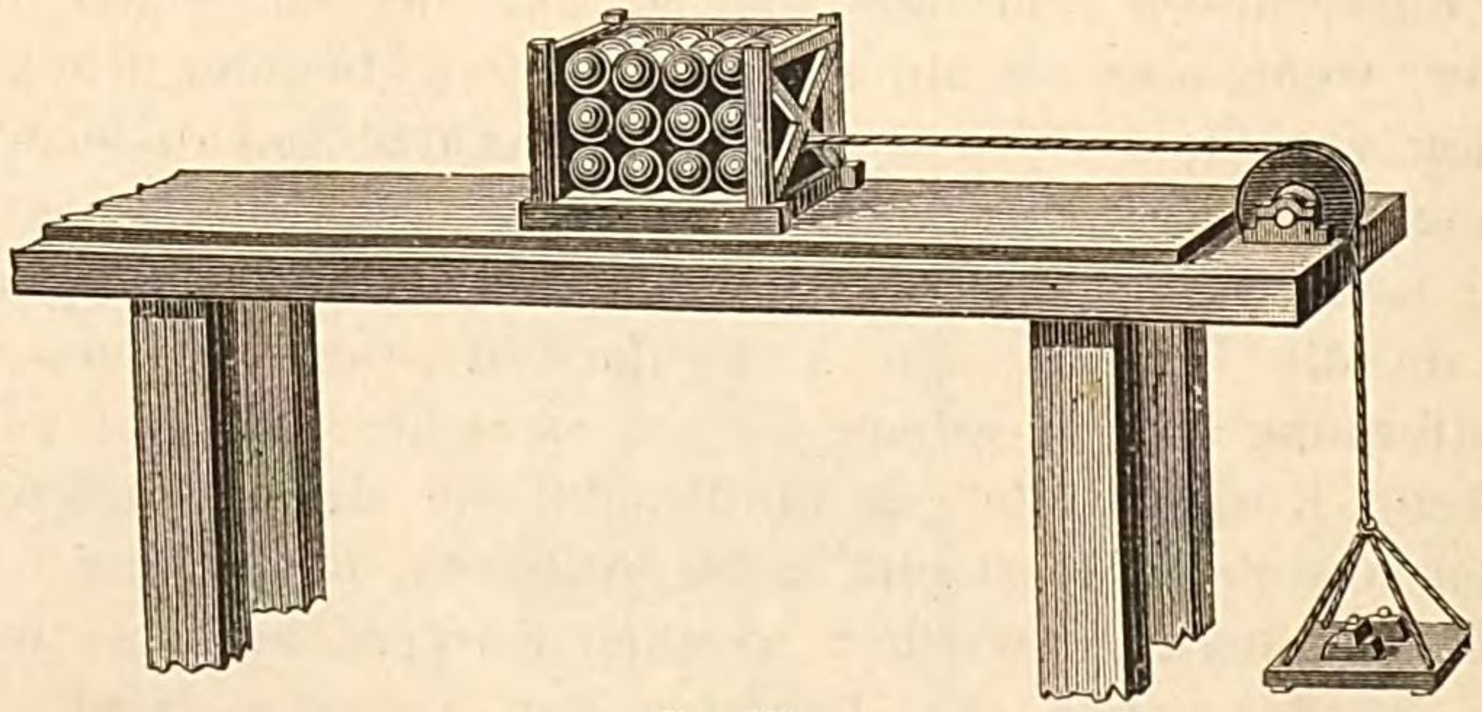


Fig. 231.

[1]) Amontons, Mémoires de l'Academie des sciences pour 1699.

[2]) Nach Amontons zeigen alle Körper, wenn sie gut geschmiert sind, dieselbe Reibung. Musschembroeck (Essai de physique; Leyde 1729) wies nach, dass dies nicht der Fall ist. Andererseits führten des Camus (Traité des forces mouvantes; Paris 1722) und Desaguliers (Cours de physique; Londres 1725) den Unterschied zwischen der Reibung beim Beginne und derjenigen während der Bewegung ein. Hierauf stellte Bossut (Traité de mécanique; Paris 1763) unter Anerkennung der Theorien von Amontons genau die Bedingungen der Untersuchung auf.

[3]) Coulomb, Théorie des machines simples; 1781. Diese, im Jahre 1785 im X Bande der „Savants étrangers“ veröffentlichte Arbeit wurde 1821 durch Bachelier mit den anderen Werken Coulombs neu herausgegeben.

Letzteres war auf zwei Balken von Eichenholz befestigt, die ihrerseits wieder auf einem starken Tische ruhten. An dem einen Ende der Balken, und zwar in dem Zwischenraume, der beide trennte, war eine Rolle angebracht, deren Schnur einerseits an dem Schlitten befestigt wurde, andererseits eine zum Aufnehmen der Gewichte bestimmte Schale trug. Am anderen Ende der Balken hatte man eine kleine horizontale Welle angebracht, die dazu diente, vermittelst einer zweiten Schnur den Schlitten von dieser Seite her fest zu halten. Das feste Brett war 8 Fuss (2,60 m) lang und 16 Zoll (0,43 m) breit; auf dasselbe legte man die in passender Grösse geschnittenen Platten aus den zu untersuchenden Substanzen. Die Schlitten, die zur Verwendung kamen, hatten ganz verschiedene Länge, waren mit Böden von verschiedener Substanz versehen und konnten verschieden stark belastet werden.

Die Untersuchungen zielten zunächst darauf hin, die Kraft zu messen, welche nöthig ist, um den Schlitten in Bewegung zu setzen, d. h. die Reibung beim Beginne der Bewegung nach einer bestimmten Zeit der Ruhe zu überwinden. Zu diesem Zwecke setzte man an Stelle der Gewichtsschale eine Art von Schnellwage, längs deren man ein Gewicht gleiten liess, bis dasselbe den Schlitten fortzuziehen im Stande war. Aus der Grösse und der Stellung dieses Gewichtes, sowie aus dem Gewichte und der Lage des Schwerpunktes des Hebels liess sich leicht die Kraft berechnen, welche nöthig war, um die Reibung im Ruhezustande zu überwinden. Diese Kraft wurde in allen Fällen dem Drucke proportional gefunden. Der Einfluss der Dauer der vorangegangenen Ruhezeit schien verschieden zu sein: Bei den Metallen zeigte sich im allgemeinen überhaupt kein hiervon herrührender Einfluss; bei den Holzarten wuchs die Kraft der Reibung ganz augenscheinlich während der ersten Augenblicke, erreichte aber gleichwohl sehr rasch (innerhalb weniger Minuten) ihr Maximum oder ihre Grenze; bei der Berührung von Holz und Metall endlich ergab sich eine sehr langsame Zunahme während mehrerer Tage. Um die Reibung bei den bereits in Bewegung befindlichen Oberflächen zu ermitteln, belud man den Schlitten mit einem passenden Gewichte, setzte ihn mit dem Schlage eines Hammers oder mit einem Hebel in Bewegung und verfolgte diese Bewegung mit Hülfe einer an der Seite des Brettes angebrachten Theilung. Die hier als Beispiel beliebig herausgegriffene Messung bezieht sich auf zwei Oberflächen von Eichenholz, welche parallel zu den Fasern ohne Schmiermittel auf einander gleiten. Hierbei, wie auch sonst fast stets, beobachtete man die Bewegung auf einer Bahn von 4 Fuss Länge, die in zwei gleiche Theile von je 2 Fuss getheilt war.

„*VI. Versuch:* Der beladene Schlitten wiegt, das Eigengewicht mit gerechnet, 1647 Pfund.

1. Messung: Der durch ein angehängtes Gewicht von 166 Pfund gezogene Schlitten legt die beiden ersten Fuss in $1\frac{1}{2}$ Sec., die beiden anderen in $\frac{5}{2}$ Sec. zurück.

2. Messung: Mit Hülfe eines angehängten Gewichtes von 172 Pfund werden 2 Fuss in $\frac{9}{2}$ Sec., die nächsten 2 Fuss in $\frac{4}{2}$ Sec. zurückgelegt."

Coulomb stellte auf diese Weise mit diesen beiden Oberflächen neun Versuche bei verschiedener Belastung an, und es ergab sich stets, dass im allgemeinen zum Zurücklegen der beiden ersten Fuss ein wenig mehr als doppelt so viel Zeit nöthig war, als die beiden letzten Fuss erforderten. Wenn nun ein Körper durch eine continuirlich wirkende Kraft in Bewegung gesetzt wird und die hierbei sich ergebende Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so werden zwei gleiche Strecken nach einander in Zeiten durchlaufen, welche sich ungefähr zu einander verhalten wie 100 : 42 [1]). Da nun unser Schlitten seine Bahn von 4 Fuss Länge mit einer nahezu gleichförmig beschleunigten Bewegung durchlaufen hat, und er ausserdem durch ein constantes Gewicht vorwärts getrieben wurde, so musste nothwendigerweise auch die hemmend wirkende Kraft der Reibung eine constante Grösse gehabt haben; sie ist also nahezu die gleiche bei allen Abstufungen der Geschwindigkeit."

Dieselben Versuche geben über die Kraft der Reibung Aufschluss. Nennt man P das Gewicht (incl. Schale), welches den Schlitten fortbewegt, F die Kraft der Reibung, t die beobachtete Zeit, während welcher der Schlitten seine Bahn von 4 Fuss Länge zurücklegte, Q das ganze, zu bewegende Gewicht des Systems (Schlitten und Schale mit ihren Belastungen, sowie ein constantes Gewicht von 7 Pfund, durch welches der Masse der

---

[1]) Bezeichnet nämlich t_1 die zum Durchlaufen einer Strecke e_1 und t' die zum Durchlaufen der doppelten Strecke $2e_1$, nothwendige Zeit, so ist:

$$e_1 = \frac{g t_1^2}{2}, \quad 2e_1 = \frac{g t'^2}{2},$$

also

$$t' = t_1 \sqrt{2} = 1{,}42\, t_1.$$

Setzen wir also $t_1 = 100$, so haben wir $t' = 142$, und die zum Durchlaufen der zweiten Strecke e_1 nothwendige Zeit $t' - t_1$ ergiebt sich als:

$$t_2 = t' - t_1 = 42.$$

Rolle Rechnung getragen werden soll), so erhält man, da die Kraft des Zuges $P - F$ constant ist:

$$P - F = \frac{2Qe}{gt^2},$$

woraus sich F berechnen lässt.

So findet man bespielsweise aus der zweiten Messung des oben angeführten Versuches $F = 160$. Hierbei maass die berührende Oberfläche 36 Quadratzoll oder $\frac{1}{4}$ Quadratfuss. Bei anderen (in der folgenden Tabelle mit einem Sternchen versehenen) Versuchen war die Berührungsfläche 3 Quadratfuss gross. Beziehen wir alles auf eine mittlere Fläche von 1 Quadratfuss (0,1055 qm), bei der jeder Punkt denselben Druck erleiden würde, den er thatsächlich bei den Versuchen erfahren hat, so erhalten wir folgende Resultate:

		Druck	Reibung	$\frac{\text{Druck}}{\text{Reibung}}$
I. Versuch (2. Messung).	*	25 Pfund	4,3	5,7
IV. „ „		188 „	20	9,4
II. „ „	*	291 „	34	9,5
III. „ „	*	825 „	84	9,4
V. „ „		1788 „	196	9,2
VI. „ „		6588 „	640	10,4

Somit ergab sich die Beziehung zwischen Reibung und Druck bei Gewichten von 2 bis zu 40 resp. 50 Centnern als constant und $= \frac{1}{9,5}$. Man erkennt ausserdem, dass die Reibung unabhängig ist von der Ausdehnung der reibenden Oberflächen, — was sich übrigens leicht aus der Überlegung folgern lässt, dass die Reibung in jedem Punkte nur die Hälfte betragen muss (da das auf jedem Punkte lastende Gewicht auf die Hälfte reducirt wird), wenn man die Anzahl der reibenden Punkte verdoppelt.

Coulomb erhielt, mit wenigen Ausnahmen, ganz ähnliche Resultate für die Reibung der Metalle unter einander und auf Holz, was ihn veranlasste, die allgemeinen Gesetze der Erscheinung in folgende Form zu bringen:

„Der von der Reibung fester Körper herrührende Widerstand ist proportional dem Drucke, welchen diese Körper auf einander ausüben, aber unabhängig von der Ausdehnung der Berührungsflächen und unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.“

Man darf sich freilich nicht verhehlen, dass die Untersuchungen von Coulomb noch mit recht beträchtlichen Mängeln behaftet waren,

und dass, wenn auch die durch den berühmten Physiker formulirten Gesetze exact sind, — sogar exacter und weniger Ausnahmen unterworfen, als er selbst annahm, — doch die numerischen Coefficienten keineswegs absolut sicher sind.

Es war also nothwendig, diese Bestimmungen wieder aufzunehmen und weiter auszudehnen.[1]) Dies that Kapitän (später General) Morin mit den Untersuchungen, welche er in der alten Giesserei zu Metz im Jahre 1831 und den folgenden Jahren ausführte.

181. Untersuchungen von Morin.[2]) — Diese Untersuchungen unterscheiden sich von den vorhergegangenen durch drei wesentliche Verbesserungen.

1. Morin liess den Schlitten eine viel grössere Strecke durchlaufen (etwa 4 Meter), wodurch die Natur der Bewegung mit viel grösserer Sicherheit bestimmt werden konnte.

2. Die auf den Schlitten ausgeübte Kraft wurde auf zwei Arten ermittelt. Einmal aus dem herabsinkenden Gewichte, wobei noch der durch Reibung und Trägheit der Rolle und durch die Steifheit des Seiles auftretende Widerstand in Rechnung zu bringen war, dann aber ausserdem noch, nach dem Rathe von Poncelet, vermittelst eines auf dem Seile selbst angebrachten Dynamometers. Letzteres bestand aus einer Feder mit zwei Armen, deren einer einen Pinsel trug, welcher eine mit dem Apparate bewegte horizontale Scheibe berührte. Auf der Peripherie der Scheibe rollte ein zu dem festen Brette parallel gespannter Faden ab, und zwar so, dass sich die Scheibe drehte, wenn sich der Schlitten vorwärts bewegte, und dass die Geschwindigkeit eines Punktes der Scheibenperipherie genau diejenige des Schlittens wiedergab. Der mit chinesischer Tusche getränkte Pinsel zeichnete auf der Scheibe eine Curve, deren Radienvectoren die auf einander folgenden Biegungen der Feder und somit auch die successiven Werthe der zu messenden Kraft wiedergaben. Die aufgezeichnete Curve war stets ein Kreis, und es ergab sich auf diese Weise, dass die Spannung constant blieb, und ihr Werth genau mit demjenigen übereinstimmte, den man auf dem ersten Wege erhalten hatte.

---

[1]) Im Jahre 1785 veröffentlichte Dr. Vince in den Phil. Trans. experimentelle Untersuchungen, deren Resultate sich nicht völlig mit denen von Coulomb decken. Aber diese nur in kleinem Maassstabe ausgeführten Versuche sind nicht entscheidend. Dieselbe Unsicherheit haftet den Experimenten von Rennie an (Phil. Trans. 1829), der die Arbeiten von Coulomb nach einer ähnlichen Methode weiter ausdehnte.

[2]) Morin, Nouvelles expériences sur le frottement; Paris 1833.

3. Die Natur der Bewegung des Schlittens wurde durch ein analoges Verfahren mit einer nicht geringeren Genauigkeit ermittelt. An der Achse der Welle *C*, deren Bewegung vollkommen von

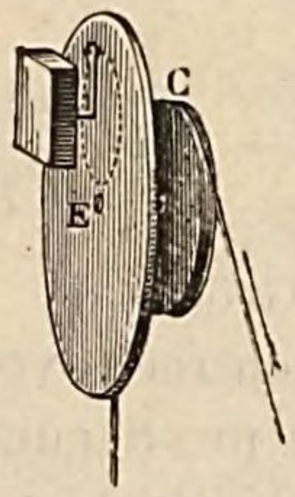


Fig. 232.

derjenigen des Schlittens abhing, befestigte man eine genau ebene Kupferscheibe *E*, und dieser gegenüber einen Griffel, welcher gleichmässig durch ein Uhrwerk getrieben, einen Kreis von 14 cm Durchmesser beschrieb. Die entstehende Curve, das Resultat der Verbindung der regelmässigen Bewegung des Griffels und der bisweilen gleichförmigen, öfters aber veränderlichen Bewegung des Schlittens, gestattete, das Gesetz dieser letzteren Bewegung zu ermitteln. Es sei z. B. *ABC* ein Stück der oben erwähnten Curve, so ist ersichtlich, dass ein bestimmter Punkt *B* derselben zu Stande kam, als der Punkt *B* der Scheibe sich unter dem Punkte *b* des Griffels befand. Tragen wir also auf dem kleinen Kreise *Abc* die

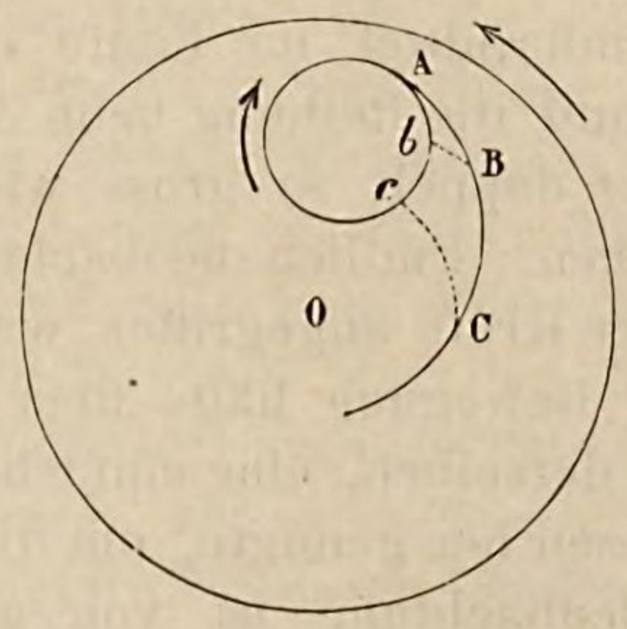


Fig. 233.

gleichen Zeitintervallen entsprechenden gleichen Bögen *Ab, bc* ... ab und beschreiben von *O* als Mittelpunkt die Kreisbögen *bB, Cc* ..., so bestimmen die so erhaltenen Punkte *B, C* ... die Winkel *AOB*, *AOC* ..., um welche sich die Scheibe während 1, 2 etc. Zeitintervallen gedreht hat. Im allgemeinen wachsen diese Winkel mit dem Quadrate der Zeit. Führt man nun an Stelle der Winkel die

Verschiebungen des Schlittens ein, so kann man die Bewegungscurve des Schlittens

$$t^2 = 2pe$$

zeichnen, wobei p eine Constante bedeutet, welche man graphisch ermittelt; die Formel

$$P - F = \frac{Q}{g}\frac{1}{p}$$

giebt alsdann die gesuchte Grösse F.

Die Untersuchungen waren recht vollständig: Die Geschwindigkeiten wurden bis zu 3 Meter pro Secunde, die Ausdehnung der Berührungsflächen bis zu 30 Quadratdecimeter und die Drucke bis auf mehr als 1100 Kilogramm gesteigert. Bei allen Messungen ergab sich die Bewegung als ganz streng gleichförmig, — entweder gleichförmig beschleunigt oder gleichförmig verzögert; dies beweist, dass der durch Reibung verursachte Widerstand nicht von der Geschwindigkeit abhängt. In gleicher Weise bestätigt es sich, dass dieser Widerstand von der Ausdehnung der Berührungsflächen unabhängig, und dem Drucke genau proportional ist.

Die Reibung beim Beginn der Bewegung ist weniger constant und regelmässig; immerhin jedoch darf man sie noch als proportional dem Drucke und unabhängig von der Grösse der Berührungsflächen betrachten. Bei den harten Körpern, den Metallen und Steinen weicht sie nicht wesentlich von der Reibung während der Bewegung ab. Bei den weichen Körpern ist sie, was schon Coulomb gefunden hatte, grösser als während der Bewegung. Bei den geschmierten Oberflächen wird das Schmiermittel im Laufe der Zeit unter hohem Drucke ausgetrieben und die Reibung beim Anfange der Bewegung ist dann oft mehr als doppelt so gross wie diejenige bei frisch geschmierten Oberflächen. Endlich beobachtete Morin, dass, wenn der Schlitten von einer Kraft angegriffen wurde, welche wohl die Reibung während der Bewegung hätte überwinden können, nicht aber die beim Beginne derselben, eine einfache und offenbar geringe Erschütterung von aussen her genügte, um die Bewegung zu Stande zu bringen. Diese Beobachtung ist von grosser Bedeutung für die Constructionen, welche stets grösseren oder geringeren Erschütterungen ausgesetzt sind und beweist, dass man bei den Festigkeitsberechnungen nur den Werth einführen darf, welchen die Reibung während der Bewegung besitzt.

Zum Beweise für die oben angegebenen Sätze geben wir die Resultate einiger Beobachtungen wieder, und zwar zunächst zwei Reihen, welche sich auf die Reibung beim Beginne der Bewegung beziehen.

Reibung beim Beginne der Bewegung.

Beschaffenheit der reibenden Oberflächen	Grösse der Berührungsflächen qm	Druck kg	Reibung	Reibung / Druck
Eichenholz auf Eichenholz, Fasern gekreuzt, ohne Schmiermittel	0,0880	54,66	30,45	0,55
		224,44	68,12	0,51
		1145,63	114,42	0,51
	0,0040	176,54	92,41	0,52
		662,48	387,58	0,52
Weicher Oolith auf ebensolcher Unterlage	0,0880	142,39	103,79	0,73
		578,08	422,99	0,73
	0,0464	140,36	103,79	0,74
		570,17	445,79	0,78
	abgestumpfte Kanten	135,30	103,79	0,77
		273,00	200,68	0,74

Beide Reihen beweisen zur Genüge, dass beim Beginne der Bewegung die Reibung proportional dem Drucke, und unabhängig von der Grösse der Berührungsflächen ist.

Reibung während der Bewegung.

Beschaffenheit der reibenden Oberflächen	Grösse d. Berührungsflächen qm	Druck Q	Spannung des Seiles P	Parameter $2p$	$\frac{1}{p}$	Reibung	Reibung / Druck
Gusseisen auf Gusseisen, dazwischen Schweineschmalz	0,0319	499,96	54,44	5,52	0,362	35,10	0,072
		2803,77	247,09	10,84	0,184	200,03	0,071
Messing auf Gusseisen, ohne Schmiermittel	0,0285	213,35	63,18	2,40	0,833	45,06	0,211
	0,0072	215,86	63,34	2,45	0,813	45,45	0,210

Diese Beispiele bestätigen die oben ausgesprochenen Sätze über die Reibung während der Bewegung.

Aus den angeführten Untersuchungen folgt also, dass jede Oberfläche ausser der normal zu ihr gerichteten Gegenkraft, die wir in den vorhergehenden Capiteln allein betrachteten, auch noch eine tangential gerichtete Kraft auf den Körper ausüben kann, welche man Reibung nennt. Daraus ergiebt sich, das der Gleichgewichtszustand eines festen, auf einer Ebene ruhenden Körpers nicht an Bedingungen geknüpft ist, deren Nothwendigkeit eine physikalische Unmöglichkeit bedeuten würde: Es genügt vielmehr, dass die Resultante der äusseren, zu voller Wirkung gelangenden Kräfte nicht Null ist, sondern nur eine bestimmte Grenze nicht übersteigt. Ebenso muss während der Bewegung die Resultante der äusseren Kräfte stets grösser sein, als die Reibung, soll nicht der Körper allmählich zur Ruhe gelangen.

182. Die Reibungs-Coefficienten nach Morin. — Die Reibung ist, wie wir sahen, proportional dem Drucke oder

dem normalen Gegendrucke N der ebenen Fläche: Unter dem *Reibungs-Coefficient* f versteht man das Verhältniss dieser beiden Grössen: Reibung und Druck. Dies Verhältniss betrachtet man häufig als die Tangente eines gewissen Winkels φ, der gebildet wird

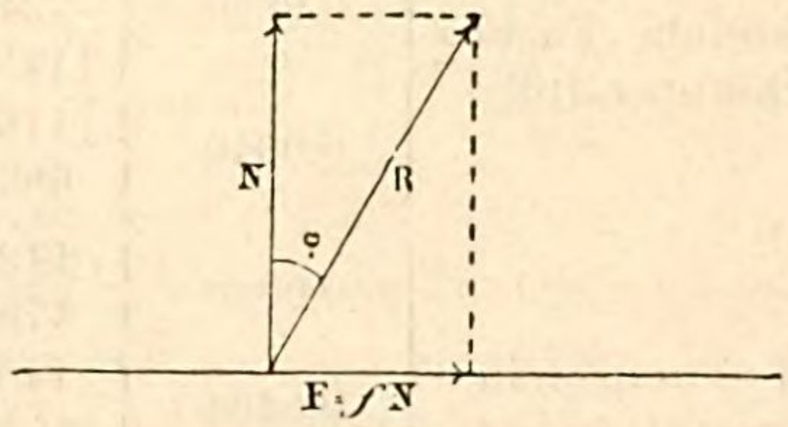


Fig. 234.

von der Richtung der totalen Gegenkraft R der Ebene, mit der Normalen, und den man *Reibungswinkel* nennt. Derselbe wird also definirt durch die Gleichung:

$$\frac{F}{N} = f = tg\,\varphi.$$

Folgende Tabellen enthalten die durch General Morin experimentell bestimmten Werthe von f. Dazu kommen noch die Resultate einiger Untersuchungen desselben Gelehrten über die Reibung von *Achsen in ihren Lagern*, welche mit Hülfe eines selbstregistrirenden Rotatations-Dynamometers, ähnlich dem früher beschriebenen Zug-Dynamometer, angestellt wurden.

I. *Reibungs-Coefficienten von ebenen Flächen beim Beginne der Bewegung nach andauernder Berührung.*

Eichenholz auf Eichenholz	Fasern parallel	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,62
	„	mit trockener Seife eingerieben . .	0,44
	Fasern gekreuzt	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,54
	„	mit Wasser benetzt	0,71
	Querschnitt auf Längsschnitt	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,43
Schmiedeeisen auf Eichenholz	Fasern parallel zur Richtung der Bewegung	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,62
	„	mit Wasser benetzt	0,65
Riemenleder auf Eichenholz (Fasern senkrecht)		Oberflächen ohne Schmiermittel	0,47
Riemenleder auf Gusseisen . . .		Oberflächen ohne Schmiermittel	0,28
Schmiedeeisen auf Gusseisen . .		Oberflächen ohne Schmiermittel	0,19
Gusseisen auf Gusseisen		Oberflächen wenig geschmiert .	0,16
Eichen-, Ulmen-, Weissbuchenholz, Schmiedeeisen, Gusseisen, Bronze (in jeder Kombination)		Oberflächen mit Öl oder Schweineschmalz stark gefettet	0,15

II. *Reibungs-Coefficienten von ebenen Flächen während der Bewegung.*

Eichenholz auf Eichenholz	Fasern parallel	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,48
		„ mit trockener Seife eingerieben . .	0,16
	Fasern gekreuzt	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,34
		„ mit Wasser benetzt	0,25
	Querschnitt auf Längsschnitt	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,19
Schmiedeeisen auf Eichenholz	Fasern parallel zur Richtung der Bewegung	Oberflächen ohne Schmiermittel	0,62
		„ mit Wasser benetzt	0,26
		„ mit trockener Seife eingerieben . .	0,21
Schmiedeeisen auf Gusseisen oder Bronze		Oberflächen wenig geschmiert .	0,18
Eichen-, Ulmen-, Weissbuchenholz, Schmiedeeisen, Gusseisen, Bronze (in jeder Kombination)		Oberflächen wenig geschmiert .	0,15
		„ stark gefettet (gewöhnliche Schmiere)	0,07—0,08
		„ stark gefettet (Schmiermittel stets von neuem zugeführt) . .	0,04—0,05

III. *Reibungscoefficienten der Achsen in ihren Lagern.*

		Schmiermittel	
		gewöhnl.	fortdauernd
Holz und Metalle (in jeder Kombination)	Oberflächen stark gefettet (Öl, Schweinefett oder Talg)	0,07	0,05
	„ wenig gefettet	0,15	—
	„ sehr wenig geschmiert . .	0,25	—

Der Einfluss des Schmierens ist unverkennbar: Je flüssiger das Schmiermittel, desto besser. Die Luft ist das vollkommenste, nur verlangt es eine recht beträchtliche Geschwindigkeit der bewegten Körper: Hirn beobachtete zu seiner Überraschung, dass der Einfluss der Reibung fast verschwand bei zwei Stücken, die sich mit ungeheurer Geschwindigkeit ohne Schmiermittel auf einander drehten. Abgesehen von der Luft bildet auch das Wasser ein vortreffliches Schmiermittel: Bei der gleitenden Eisenbahn von Girard vermindert Wasser, dass unter Druck zwischen die Schienen und die Kufen des Wagens gepresst wird, den Reibungs-Coefficient von 0,52 bis auf 0,004.

183. Einfluss der Reibung bei einigen einfachen Maschinen. — Um den Einfluss der Reibung verständlich zu machen, gehen wir auf einen sehr einfachen Fall zurück, nämlich auf die *schiefe Ebene,* und sehen zu, unter welchen Bedingungen ein Körper auf derselben im Gleichgewichte ist. Diese Bedingungen lassen sich genau genommen nicht mehr durch

Gleichungen wiedergeben. Man hat vielmehr zu den direct auf den Körper wirkenden äusseren Kräften eine Reibungskraft hinzuzufügen, welche bis zu einer gewissen Grenze die Bewegung verhindern kann und immer der Richtung entgegen wirkt, in der die Bewegung gerade vor sich gehen soll. Nehmen wir beispielsweise an, der Körper sei im Begriffe, in Folge der alleinigen Wirkung seines Gewichtes P abwärts zu gleiten. Die in diesem

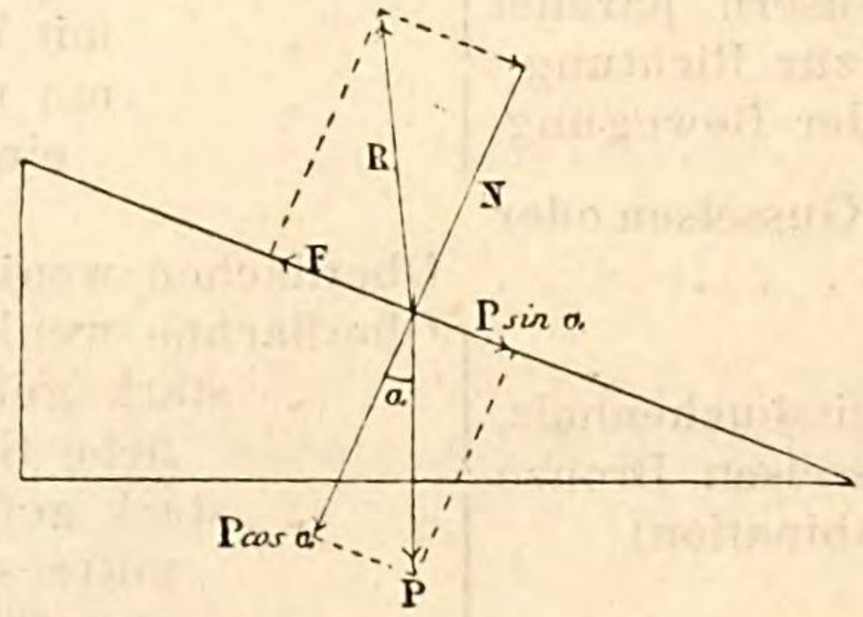


Fig. 235.

Falle zur Geltung kommende Componente des Gewichtes ist $P \sin \alpha$, — die senkrecht hierzu gerichtete Componente $P \cos \alpha$ wird durch den Widerstand der Ebene N aufgehoben. Ausserdem ist jedoch eine tangential gerichtete Reibungskraft $F = N \operatorname{tg} \varphi = P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$ vorhanden, welche parallel zur Ebene und entgegengesetzt der Kraft $P \sin \alpha$ wirkt.

Damit der Körper im Gleichgewichte ist, genügt es, wenn man hat:

$$P \sin \alpha < P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi,$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi,$$

d. h.

$$\alpha < \varphi.$$

Ist $\alpha > \varphi$, so wird der Körper in gleichförmig beschleunigter Bewegung herabgleiten, und zwar unter der Einwirkung der Kraft $P \sin \alpha - P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$ oder $P \dfrac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$. Um den Körper dann noch im Gleichgewichte zu halten, würde es einer parallel zur Ebene gerichteten Kraft Q bedürfen, die den Körper zum mindesten mit einer Intensität $P \dfrac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$ aufwärts zieht.

Aber die Kraft Q wird vielleicht auch noch eine grössere Intensität haben können, — vorausgesetzt, dass sie nicht überhaupt eine gewisse, leicht zu bestimmende Grösse übersteigt. In

diesem Falle wird der Körper das Bestreben haben, sich nach oben zu bewegen, und, um hierfür den Maximalwerth von Q zu erhalten,

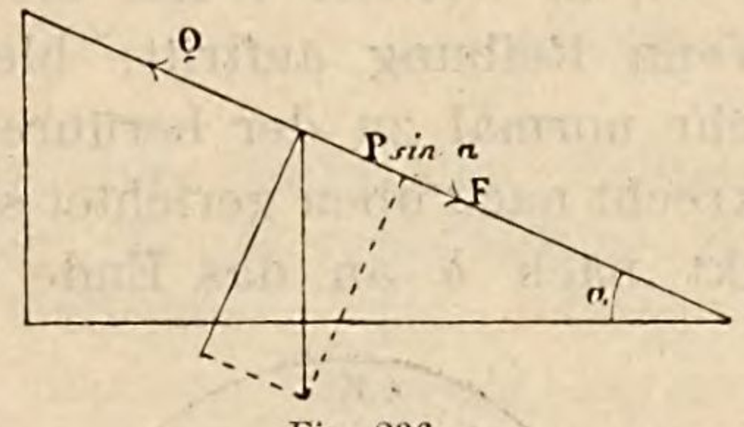


Fig. 236.

der das Gleichgewicht eben noch nicht stört, muss man bedenken, dass Q aufzuheben hat: 1. die Componente des Gewichts $P \sin \alpha$; 2. die Reibungskraft $P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$, die aber diesmal in *demselben* Sinne wirkt, wie $P \sin \alpha$. Wir erhalten also für Q im Maximum:

$$Q = P \sin \alpha + P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi = P \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$ [1]) Überstiege Q diesen Werth, dann würde der Körper in gleichförmig beschleunigter Bewegung aufwärts gleiten.

Bei der *Rolle* würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre, der von der festen Achse c gegen die Wand der centralen Öffnung o ausgeübte Gegendruck, welcher den beiden Kräften P und Q das Gleichgewicht halten muss (beide sind parallel und vertikal nach unten vorausgesetzt), vertikal nach oben gerichtet sein: Die Berührungsstelle a

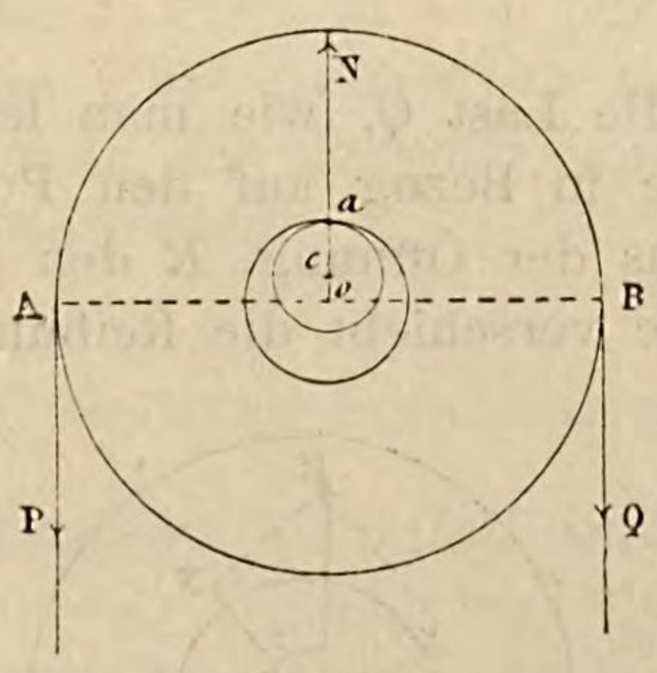


Fig. 237.

befände sich also an den oberen Enden der Durchmesser der Achse c und der Öffnung o; das Centrum o dieser Öffnung würde demnach den festen Rotations-Mittelpunkt darstellen. Da endlich der Angriffspunkt o der Resultante in gleicher Entfernung

---

[1]) Um aus der Bedingung für die abwärts gerichtete Bewegung diejenige für die Bewegung nach oben zu erhalten, genügt es also, das Vorzeichen von φ zu wechseln.

von A und B liegt, so würde die Kraft P dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten.

Sehen wir nun zu, in welcher Weise die Reibung diese Resultate beeinflusst. Wenn Reibung auftritt, bleibt der Gegendruck der Achse nicht mehr normal zu der berührenden Fläche, und da derselbe immer senkrecht nach oben gerichtet sein muss, so wandert der Berührungspunkt nach b an das Ende des Durchmessers c,

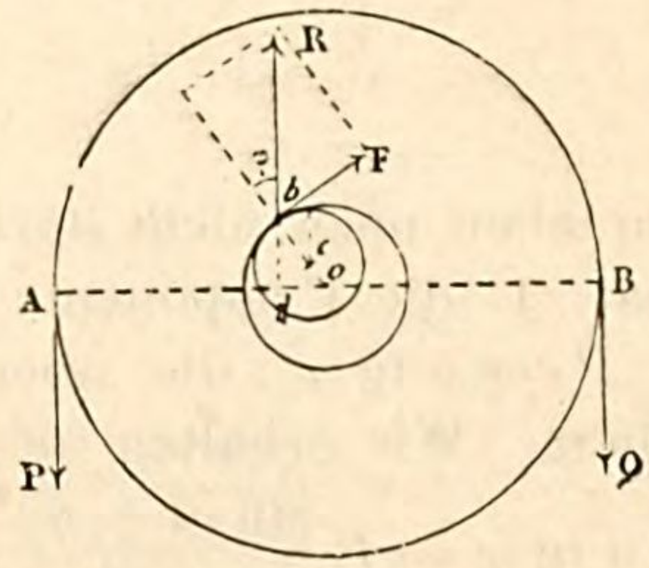


Fig. 238.

der gegen die Vertikale um den $\sphericalangle \varphi$ geneigt ist, und zwar entgegen der Richtung der Bewegung. Der Mittelpunkt der Öffnung o ist noch derselbe geblieben; da jedoch der Angriffspunkt der Resultante beider Kräfte P und Q in den Punkt d nach der Seite von A zu fällt, so muss die ausgeübte *Kraft* P um $Q \dfrac{2\frac{r}{R}\sin\varphi}{1-\frac{r}{R}\sin\varphi}$ grösser werden, als die Last Q, wie man leicht sieht, wenn man die Drehungsmomente in Bezug auf den Punkt o bildet; hierbei bedeutet r den Radius der Öffnung, R den der Rolle.

In gleicher Weise verschiebt die Reibung beim Wellrade den

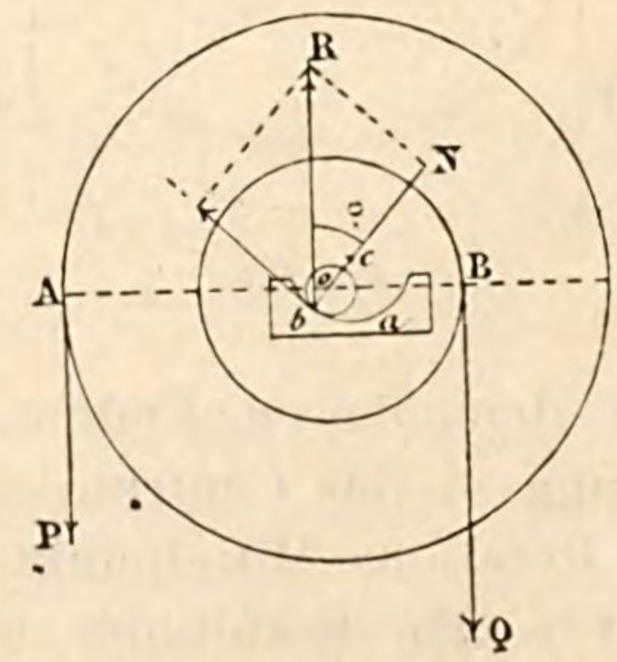


Fig. 239.

Stützpunkt der Achse o auf dem Lager und bringt ihn nach b; in Folge dessen wird auch die Gleichheit der Momente von Kraft und

Last in Bezug auf die Umdrehungsachse gestört, und man erhält statt dessen für die Drehungsmomente die Gleichung:

$$PR - QR_1 - (P + Q + p)\, r \sin\varphi = 0,$$

in welcher P die an dem Rade vom Halbmesser R angreifende Kraft, Q die an der Welle vom Radius R_1 wirkende Last, p das Gewicht des Wellrades, und r den Radius der Achse bedeutet. Es folgt hieraus, dass die aufzuwendende Kraft um

$$\frac{(Q + Q\frac{R_1}{R} + p)\,\frac{r}{R}\sin\varphi}{1 - \frac{r}{R}\sin\varphi}$$

grösser sein muss, als wenn keine Reibung vorhanden wäre.

In allen Fällen, wo Reibung auftritt, ist also die aufzuwendende Arbeit grösser, als der Nutzeffect, und, um die Gleicheit wieder herzustellen, muss man die Arbeit der Reibung einführen. Soll z. B. ein Körper eine schiefe Ebene von der Länge l und der Neigung α hinaufgezogen werden, so muss die bewegende Kraft nicht allein dem Arbeitseffecte $Pl\sin\alpha$ Rechnung tragen, sondern auch der Arbeit der Reibung $Pl\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Ebenso entspricht bei der Rolle oder dem Wellrade jeder Umdrehung des Rades eine gewisse Arbeit, welche durch die Reibung an der Peripherie der Öffnung (Rolle) oder des Lagers (Wellrad) bedingt ist. Die Gleichung der lebendigen Kraft ist also nur unter der Bedingung genau, dass man diese Widerstandsarbeit berücksichtigt, und als solche allein sollte auch die Reibung correcter Weise in die Gleichungen eingeführt werden.

B. Reibung beim Rollen.

184. Untersuchungen von Coulomb. — Wenn ein Rad, oder allgemeiner, ein fester Cylinder auf einer ebenen Oberfläche rollt, so entsteht an der Berührungsstelle der beiden Oberflächen ein gewisser, der Bewegung entgegengerichteter Widerstand, den man nicht ganz passend[1]) *Reibung der zweiten Art* oder *rollende Reibung* nennt. Um diese Reibung zu untersuchen, legte Coulomb eine Walze quer über zwei Balken von Eichenholz, zwischen denen sich ein Zwischenraum befand. In diesem letzteren hing eine Anzahl gleicher Gewichte $aaaa$ herab, die an mehreren über die

[1]) Dieser Widerstand beruht thatsächlich nicht auf einer Reibung, sondern vielmehr auf einer Deformation der Oberflächen.

Walze gelegten Seilen befestigt waren und dazu dienten, den Gesammtdruck zu ändern. Am Ende einer anderen, um die Mitte der Walze geschlungenen Schnur b wurde eine Schale c, angebracht,

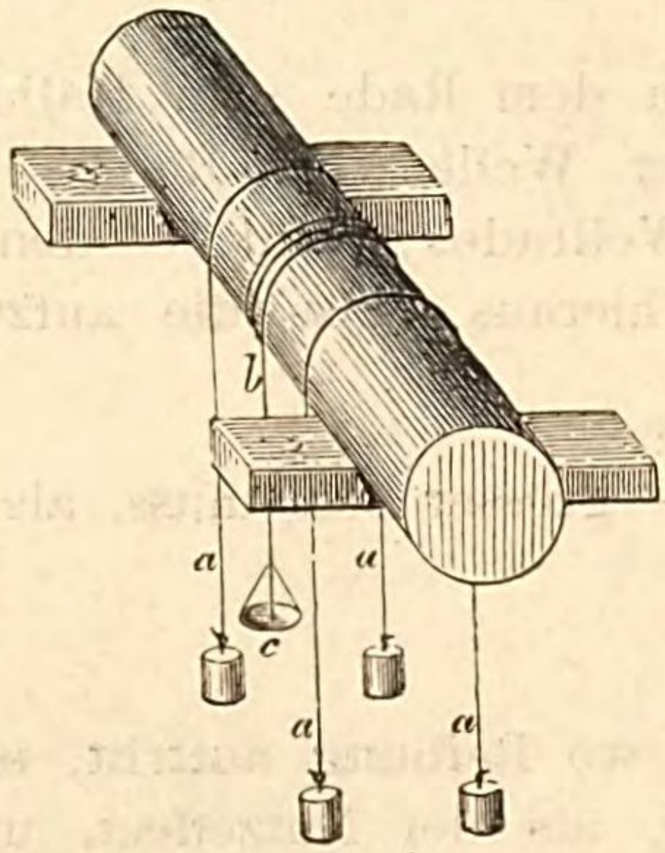


Fig. 240.

die dazu bestimmt war, das Gewicht p aufzunehmen, welches eine langsame und andauernde, nahezu gleichförmige Bewegung hervorrief. Nehmen wir an, diese Gleichförmigkeit sei eben erreicht, dann halten sich die auf die Walze wirkenden Kräfte das Gleichgewicht; diese Kräfte sind einerseits das Gewicht Q der Walze (einschliesslich der belastenden Gewichte) und die zum Unterhalten einer gleichförmigen Bewegung nöthige Kraft p, andererseits der Gegendruck der ebenen Unterlage. Da nun die ersten beiden Kräfte vertikal gerichtet sind, so muss es auch der Gegendruck der Ebene sein und zwar wird er im Falle des Gleichgewichtes der Resultante der beiden ersten Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet sein. Diese letztere geht durch einen Punkt b, dessen Lage bestimmt ist durch die Gleichung:

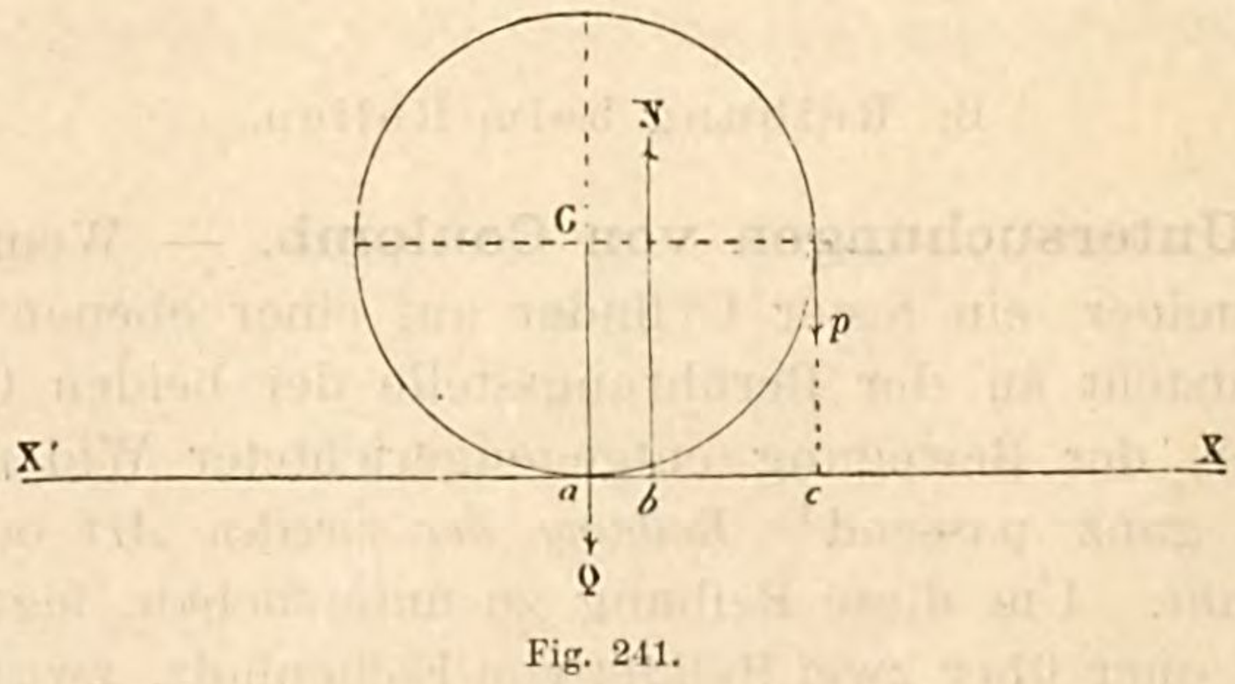


Fig. 241.

$$Q \,.\, ab = p \,.\, bc,$$

oder, wenn man setzt, $ac = r$, $ab = \delta$ und bedenkt, dass δ bei allen in Betracht kommenden Fällen eine sehr kleine Grösse sein wird,

$$Q\delta = pr,$$

oder

$$\delta = \frac{pr}{Q}.$$

Der Gegendruck der Ebene muss also eine in b angreifende, senkrecht gerichtete Kraft $N = Q + p$ sein, was nur verständlich ist, wenn man eine Deformation der Oberflächen annimmt.

Wenn die Kraft p horizontal gerichtet wäre und in einer Entfernung h von der Ebene XX' angriffe, so müsste doch noch Gleichgewicht vorhanden sein zwischen der Resultante der beiden Kräfte Q und p einerseits und dem Gegendrucke der Ebene XX' andererseits. Da aber die Resultante der beiden ersten Kräfte schräg gerichtet ist, kann auch der Gegendruck nicht mehr senkrecht sein; vielmehr muss zu dem senkrechten Gegendrucke N noch ein tangentialer F hinzukommen, und zwar ist der Sitz dieses ge-

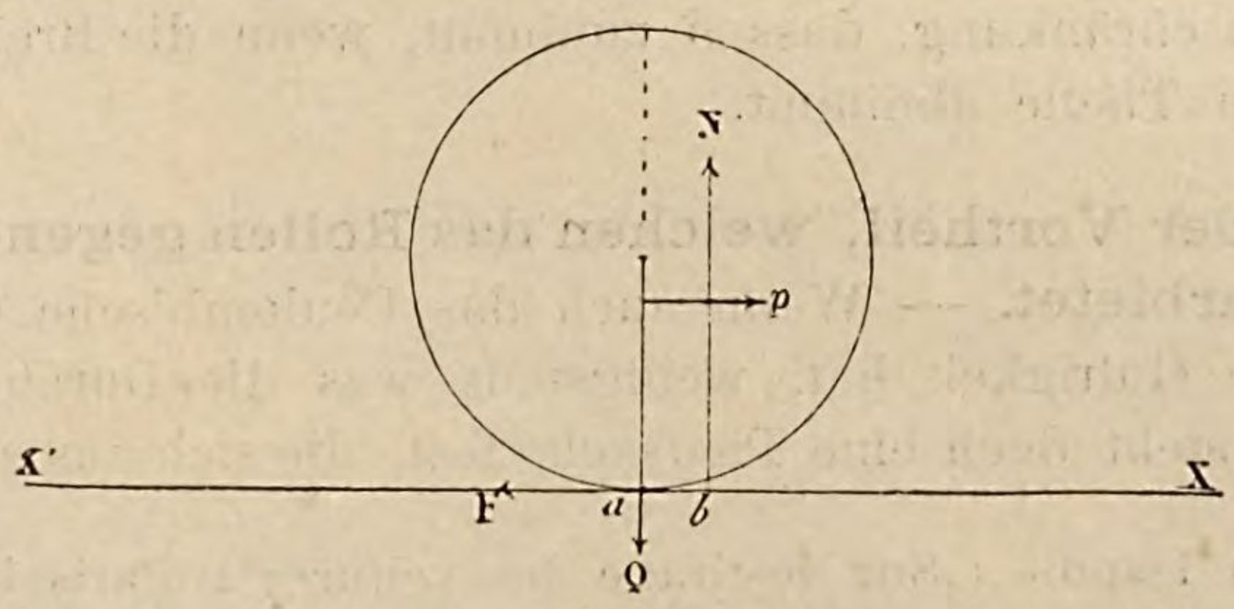


Fig. 242.

sammten Gegendruckes R derselbe Punkt b, in welchem die Resultante der beiden ersten Kräfte Q und p die Gerade XX' schneidet. Das Experiment zeigt, dass dieser Punkt b dieselbe Lage hat, wie in dem ersten Falle. Bildet man also die Momente in Bezug auf diesen Punkt, so erhält man:

$$Q\delta = ph.$$

In dieser zweiten Form nun liefert uns das Experiment die Grösse δ; damit jedoch bei diesem Versuch ein Rollen, und nicht ein Gleiten stattfinde, ist es nöthig, dass $p < fQ$, oder, dass

$$h > \frac{\delta}{f},$$

wobei f den Coefficient der gleitenden Reibung bedeutet.

Die stets sehr kleine Strecke δ heisst *Reibungs-Coefficienten beim Rollen.*

Man kann dies Resultat auch noch so ausdrücken: Bei zwei gegebenen Körpern ist der dem Rollen entgegen wirkende Widerstand direct proportional dem Drucke und umgekehrt proportional dem Halbmesser der Walze,

$$p = \delta \frac{Q}{r}.$$

Folgende Tabelle, welche die Untersuchungen von Coulomb zusammenfasst, rechtfertigt diese Schlüsse.

Beschaffenheit der Walze	Druck	Widerstand p für einen Durchmesser von			Reibungs-Coefficient beim Rollen, δ
		0,325 m	0,162 m	0,054 m	
	Pfd.	Pfd.	Pfd.	Pfd.	
Pockholz . .	100	—	0,60	1,6	0,47 mm
	500	—	3,00	9,4	
	1000	—	6,00	18,0	
Ulme . . .	1000	5,00	10,00	—	0,81 mm

General Morin wiederholte diese Untersuchungen mit Hülfe genauerer Apparate und bestätigte das Gesetz von Coulomb, jedoch mit der Einschränkung, dass δ zunimmt, wenn die Breite der sich berührenden Theile abnimmt.

185. Der Vortheil, welchen das Rollen gegenüber dem Gleiten darbietet. — Wenn auch das Coulomb'sche Gesetz nur angenäherte Gültigkeit hat, wenigstens was die Durchmesser anlangt,[1]) so steht doch eine Thatsache fest, die sich aus allen Unter-

[1]) Nach Dupuit („Sur le tirage des voitures"; Paris 1837) würde man erhalten $\delta = \varepsilon \sqrt{r}$. Aber wenn die Formel von Coulomb augenscheinlich nur für ziemlich dicke Cylinder gilt (auf dünne Cylinder angewendet, würde sie zu dem Schlusse führen, dass man keinen Cylinder auf einer Ebene rollen lassen kann, dessen Radius kleiner ist, als δ), so lässt wieder die Formel von Dupuit den Gegendruck bei zwei sich berührenden ebenen Platten unendlich werden. Résal (Traité de mécanique générale II, 32) schlägt die Formel

$$\delta = \mu \sqrt{\frac{r}{r + a}}$$

vor, welche gleichzeitig die Resultate der Untersuchungen von Morin und Dupuit umfassen würde. Man hätte danach zu setzen

$\mu = 0{,}0007 \quad a = 1$ für Eisen auf Eisen,
$\mu = 0{,}0016 \quad a = 2{,}116$ für Holz auf Holz.

Wenn ein Cylinder vom Radius r auf einen anderen vom Radius r' rollte, erhielte man:

$$\delta = \mu \sqrt{\frac{r r'}{(r + a)(r' + a)}},$$

wobei r und r' die absoluten Werthe bedeuten.

suchungen über die rollende Bewegung ergiebt, nämlich die hierbei auftretende geringe Grösse der Reibung. Der Cylinder aus Pockholz von 0,162 m Durchmesser zeigte gegen das Rollen nur einen Widerstand von 3 kg bei einer Belastung von 500 kg, während eine Platte aus demselben Holze unter derselben Belastung der gleitenden Bewegung einen Widerstand von mindestens 100 kg entgegengesetzt haben würde.

Man führt deshalb auch, wo es irgend möglich ist, die Reibung beim Rollen statt der Reibung beim Gleiten ein. Darauf beruht beispielsweise die allgemein angenommene Einrichtung zur Stütze der Rolle bei der Atwood'schen Fallmaschine (Fig. 109). Die Rolle wird durch eine mit ihr fest verbundenen Achse getragen; anstatt jedoch die Enden dieser Achse auf zwei Lagern ruhen zu lassen, stützt man dieselben durch die gekreuzten Radreife zweier Frictionsräder, welche ihrerseits wieder in eigenen Lagern ruhen. So hat man die Reibung der Radachse ersetzt durch ein Rollen, dessen Einfluss vollständig vernachlässigt werden kann. Es ist wahr, dass zwischen den Achsen der Frictionsräder und ihren Lagern die ganze Reibung wieder auftritt, und sogar noch eine beträchtlich grössere; denn das System, das sich aus der Rolle, dem Faden und den angehängten Gewichten zusammensetzte, und im Ganzen ein Gewicht $= P$ hatte, enthält nun ausserdem noch die vier Frictionsräder vom Gewichte $4p$; die Reibung, welche dem Gewichte des ganzen Systems proportional ist, wird demnach vergrössert. Aber die Construction ist nichts desto weniger vortheilhaft, denn die Arbeit der Reibung ist in Wirklichkeit bedeutend verringert. Wenn nämlich die Hauptachse direct auf einem Lager ruhte, so würde die Arbeit zur Überwindung der Reibung während einer Umdrehung der Rolle sich berechnen als das Product $f.P$ in den Umfang der Achse $2r\pi$, während im anderen Falle, vorausgesetzt dass der Apparat gut construirt ist, bei einer ganzen Umdrehung der Rolle jedes Frictionsrad sich nur um einen kleinen Bruchtheil $\frac{r}{a}$ einer Umdrehung vorwärts bewegt, (a bedeutet den Halbmesser eines Frictionsrades). Die bei der Überwindung der Reibung zu leistende Arbeit beträgt also $f(P+4p)\frac{r}{a}\cdot 2\pi\varrho$, ($\varrho =$ Radius der Achse des Frictionsrades). Wir erhalten demnach für das Verhältniss der beiden zu leistenden Arbeiten

$$\frac{(P+4p)}{P}\cdot\frac{\varrho}{a}<1,$$

da $\frac{\varrho}{a}$ jedenfalls bedeutend kleiner als 1 ist.

Die Anwendung von *Walzen* für die horizontale Fortbewegung schwerer Lasten ist ebenso stets aus dem Grunde vortheilhaft, weil

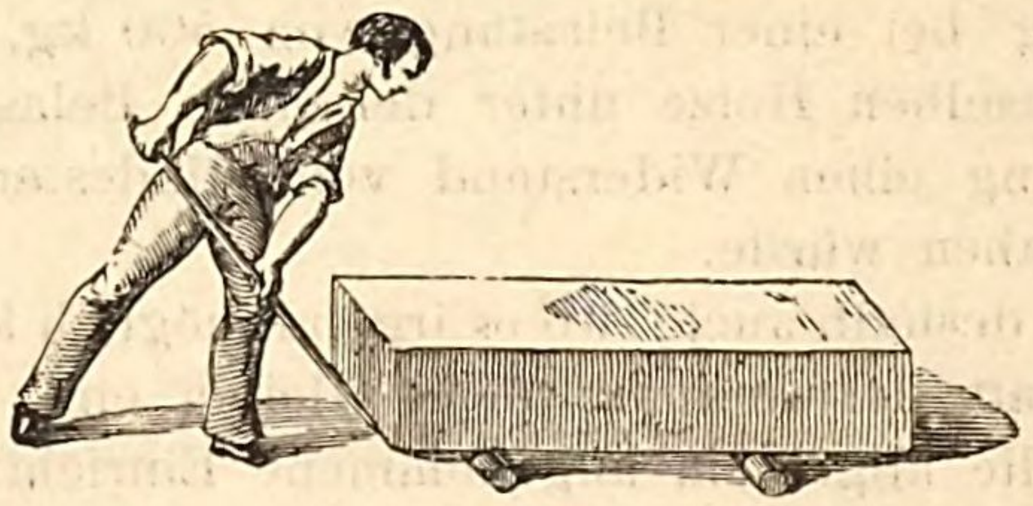


Fig. 243.

man dadurch die gleitende Bewegung in eine rollende verwandeln kann, welche die Überwindung eines weit geringeren Widerstandes erfordert.

Im Gegensatze hierzu dient der *Hemmschuh* als Mittel, die

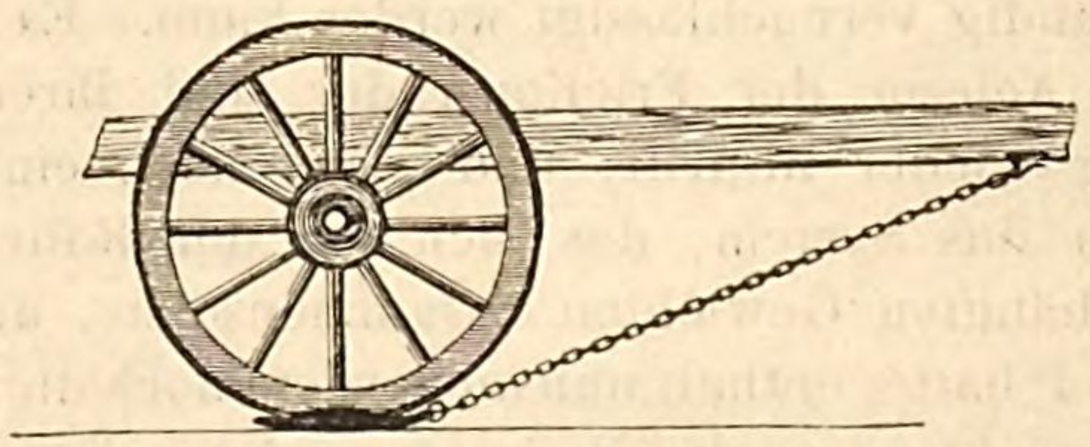


Fig. 244.

Wagen auf sehr steilen Abhängen zurückzuhalten, da hierdurch an Stelle des Rollens das Gleiten tritt.

C. Messung der Kraft durch Bremsen.

186. Der Bremszaum von Prony. — Zu den wichtigsten Anwendungen der Reibungsgesetze sind die Apparate zu rechnen, welche dazu dienen, direct die Arbeit einer rotirenden Achse zu messen und welche nach dem Typus des Prony'schen[1]) Bremszaums gebaut sind.

Das Princip des letzteren ist höchst einfach: Man ersetzt bei einer gegebenen Achse, ohne den normalen Gang der Maschine zu ändern, die durchschnittlich von ihr zu leistende Arbeit durch einen Widerstand, der leicht zu berechnen ist. Die zur Überwindung derselben nothwendige Arbeit wird während einer gewissen Zeit gemessen, wobei man dafür sorgt, dass die Geschwindigkeit

---

[1]) De Prony, Ann. de chim. et de phys. (2), XIX, 165; 1822.

der Achse während der ganzen Dauer des Versuches genau dieselbe bleibt, so dass also die bewegende Kraft gleich der Hemmung ist; die auf diese Weise gemessene Grösse giebt direct die zur Leistung nutzbringender Arbeit verfügbare Kraft an.

Der Apparat[1]) besteht im wesentlichen aus zwei hölzernen Backen M und M', welche man mit Hülfe der Schrauben V, V

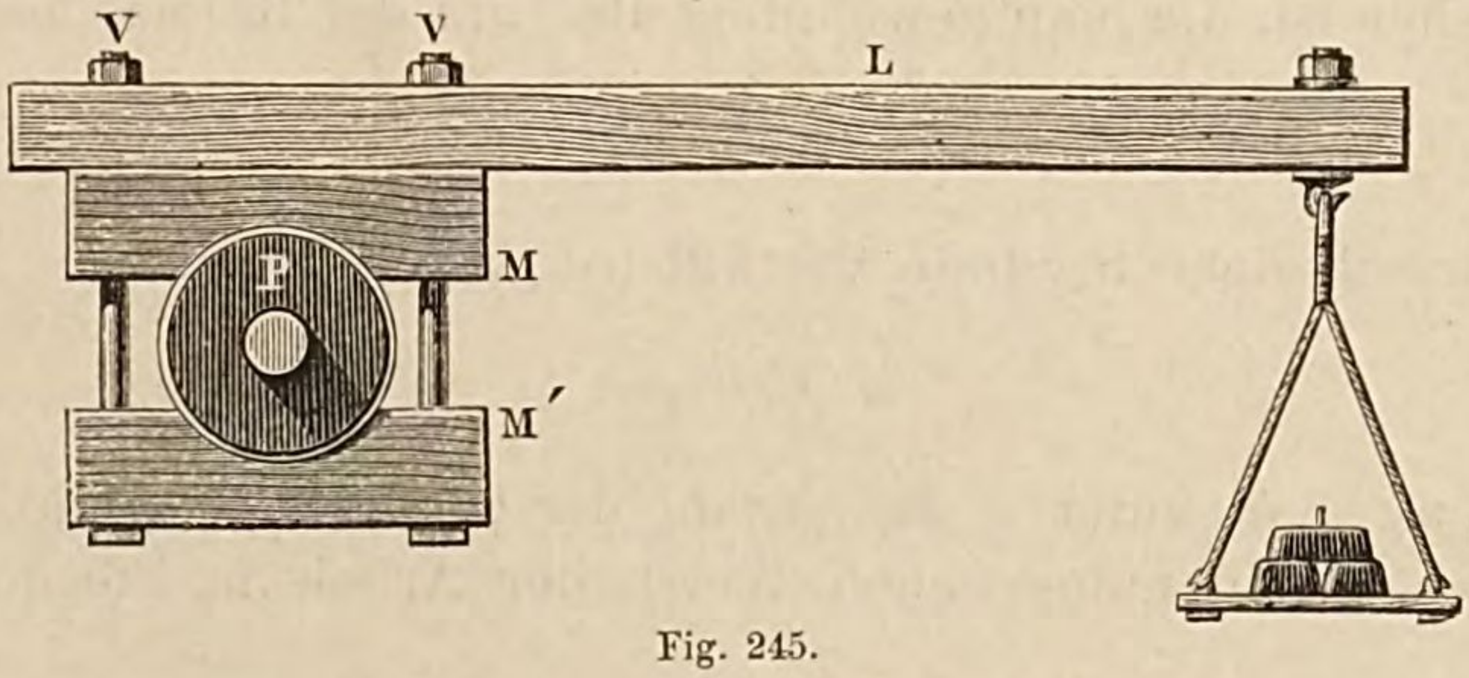


Fig. 245.

gegen eine auf der Achse festsitzende Walze pressen kann, und einem Hebel L, der an einer der Backen befestigt ist und die zur Aufnahme der Gewichte bestimmte Schale trägt.

Bei dem Versuche zieht man die Schrauben der Backen mehr oder weniger an und belastet die Schale mehr oder minder, bis die Maschine ihren gewöhnlichen Gang beibehält und die Bremse im Gleichgewicht bleibt.

Nehmen wir an, das Gleichgewicht sei hergestellt, dann wird in jedem Berührungspunkte der Backen mit der Walze eine tangential zur letzteren gerichtete Reibungskraft vorhanden sein; bedeutet F die Summe aller dieser Kräfte, ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle und r den Radius der Walze, dann ist die gesammte, während einer Secunde geleistete Arbeit,

$$= F\omega r.$$

Diese wird also bei der Maschine während der gleichen Zeit verfügbar sein.

Da nun aber Gleichgewicht herrscht, muss die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die Achse Null sein. Nennen wir P das in der Schale ruhende Gewicht, l die Länge des Hebels von der Achse an gerechnet bis zu der durch den Aufhängepunkt

---

[1]) Die folgenden Angaben sind zum grössten Theile einem Aufsatze von Kretz entnommen „Sur les conditions à remplir dans l'emploi du frein dynamométrique (C. R., LVIII, 459; 1864; und „Annales de l'École normale supérieure, (2), II, 55; 1873.

der Schale gezogenen Senkrechten, p das Gewicht der Bremse, d den zu diesem Gewichte gehörigen Hebelarm oder die Entfernung der durch den Schwerpunkt der Bremse gelegten Vertikallinie von der Achse, so gilt:

$$Fr - Pl - pd = 0,$$

oder, wenn wir setzen $pd = ql$, wobei unter q diejenige Grösse zu verstehen ist, die man gewöhnlich als Tara der Bremse bezeichnet

$$Fr = (P + q)\, l.$$

Die während einer Secunde verfügbare Arbeit ist also:

$$\omega\,(P + q)\, l,$$

oder, wenn man unter n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute und unter T den numerischen Werth der Arbeit in Pferdekräften versteht

$$T = 2n\pi \,.\, \frac{(P + q)\, l}{60 \cdot 75}.$$

Man sieht also, dass es nicht nothwendig ist, den von den Backen auf die Walze ausgeübten Druck und die hieraus entspringende Reibung zu kennen, — es genügt, diesen Druck beständig so zu reguliren, dass die Geschwindigkeit normal und der Hebel horizontal bleibt.

Vor jedem Versuche hat man die Tara der Bremse zu be-

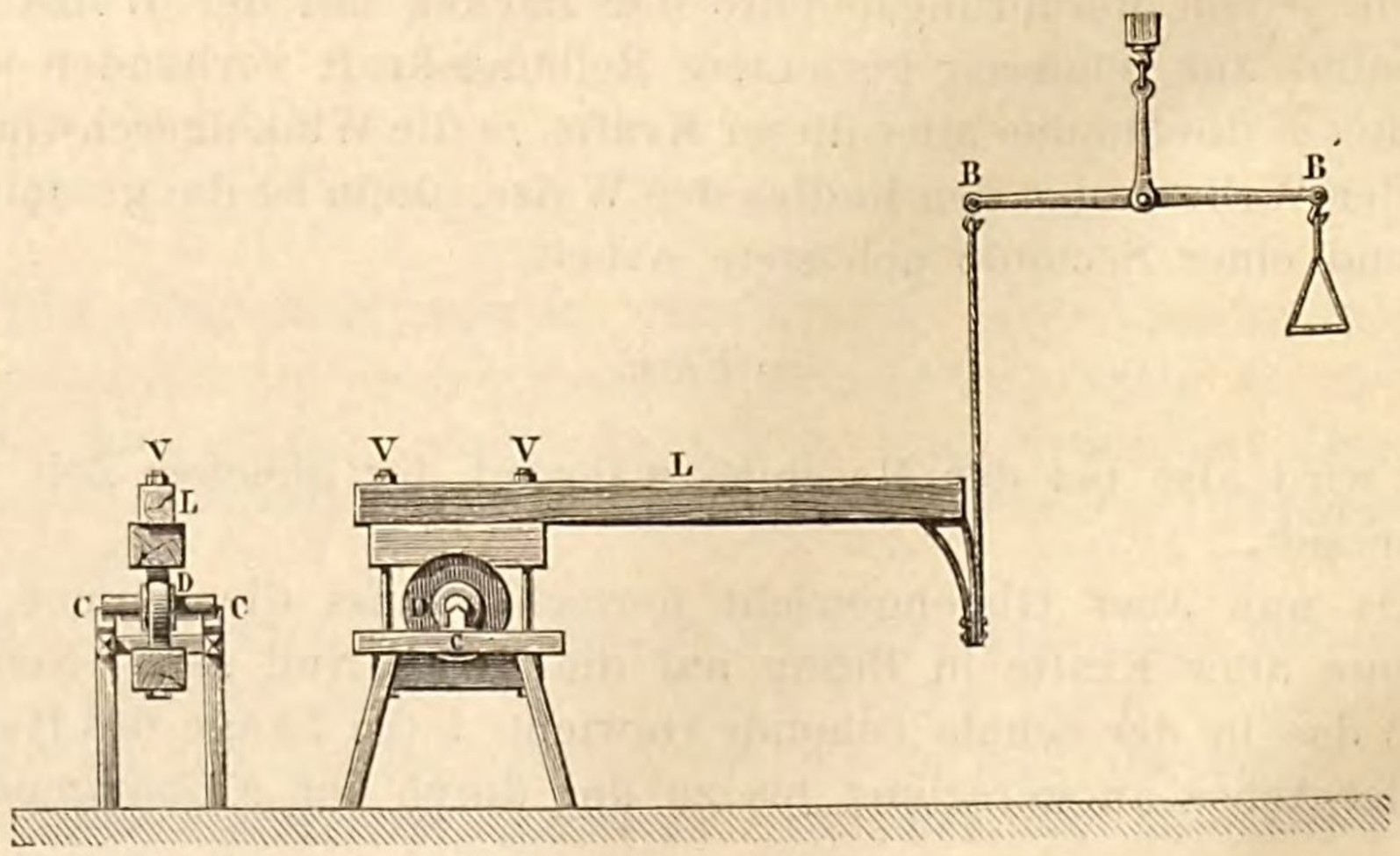


Fig. 246.

stimmen, indem man letztere auf eine gut centrirte hölzerne Scheibe D legt, welche denselben Durchmesser besitzt, wie die Achse der

Maschine; die Achse der Scheibe ruht auf einer stählernen Schneide C.[1]) Befestigt man das Ende des Hebels L an einer der Schalen einer Wage BB', so giebt das Gewicht, welches man in die andere Wagschale legen muss, um den Wagebalken ins Gleichgewicht zu bringen, direct die Tara q der Bremse an. Es ist übrigens gut, die Tara nach dem Versuche nochmals zu bestimmen, da dieselbe durch das Wasser, mit welchem man den Apparat während des ganzen Versuches benetzen muss, geändert worden sein könnte. Diese andauernde Benetzung der Oberflächen ist nothwendig, um die Erwärmung zu verhindern und die Unveränderlichkeit der Reibung sicher zu stellen. Vollkommen wird man zwar den letzteren Zweck nie erreichen, und man muss durch Anziehen der Schrauben und dadurch hervorgebrachte Druckänderungen die Veränderungen des Reibungs-Coefficienten unschädlich machen. Da diese Regulirung nicht unmittelbar wirkt, so bleibt auch die Bremse nicht unbeweglich, wie wir es vorausgesetzt hatten, sondern schwankt unaufhörlich hin und her.

Nehmen wir an, wir hätten beiderseits zwei starke Anschläge, etwa zwei feste Balken, angebracht, als äusserste Grenzen des Spielraumes, welchen man bei dem Hebel noch zulassen will (schon aus einfachen Klugheitsrücksichten muss man stets solche Anschläge aufstellen), dann wird es, wenn das Experiment einmal im Gange ist, im allgemeinen nicht besonders schwer sein, die Bremse so zu reguliren, dass der Hebel während der ganzen Dauer des Versuches keinen der Anschläge berührt; nichtsdestoweniger wird er innerhalb dieser Grenzen beständige Oscillationen ausführen. Bei der oben angegebenen Gestalt des Apparates, welcher sich sehr rasch an Stelle des genaueren, aber unbequemeren Original-Modells von Prony in der Praxis einbürgerte, stören diese Oscillationen das Resultat ungemein; da nämlich die Hebelarme der Kräfte P und p mit der Stellung der Bremse ihre Grösse ändern, während man doch für l und pd die Werthe setzt, die ihnen bei horizontaler Stellung des Hebels zukommen, so ist der Willkür Thür und Thor geöffnet.

187. Verschiedene Formen der Brems-Dynamometer. — Man kann es nun auch so einrichten, dass l constant bleibt. Zu diesem

---

[1]) Die oft angewandte Methode, die Bremse durch eine unter der oberen Backe durchgeschobene Stange zu stützen, ist vollkommen zu verwerfen. Benützt man dagegen eine hölzerne Scheibe, wie es de Mondesir angab, so kann man leicht eine 700 kg schwere Bremse mit parallelen Hebelarmen bis auf ca. 200 gr tariren (cf. Kretz, loc. cit.).

Zwecke genügt es, wie dies Fourneyron angegeben hat,[1]) die Schale an dem Hebel mittels eines Riemens zu befestigen, welcher auf einem eisernen Kreisbogen ruht, dessen Mittelpunkt mit der Mitte der Achse zusammen fällt. Weiter kann man auch pd auf zweifache Art con-

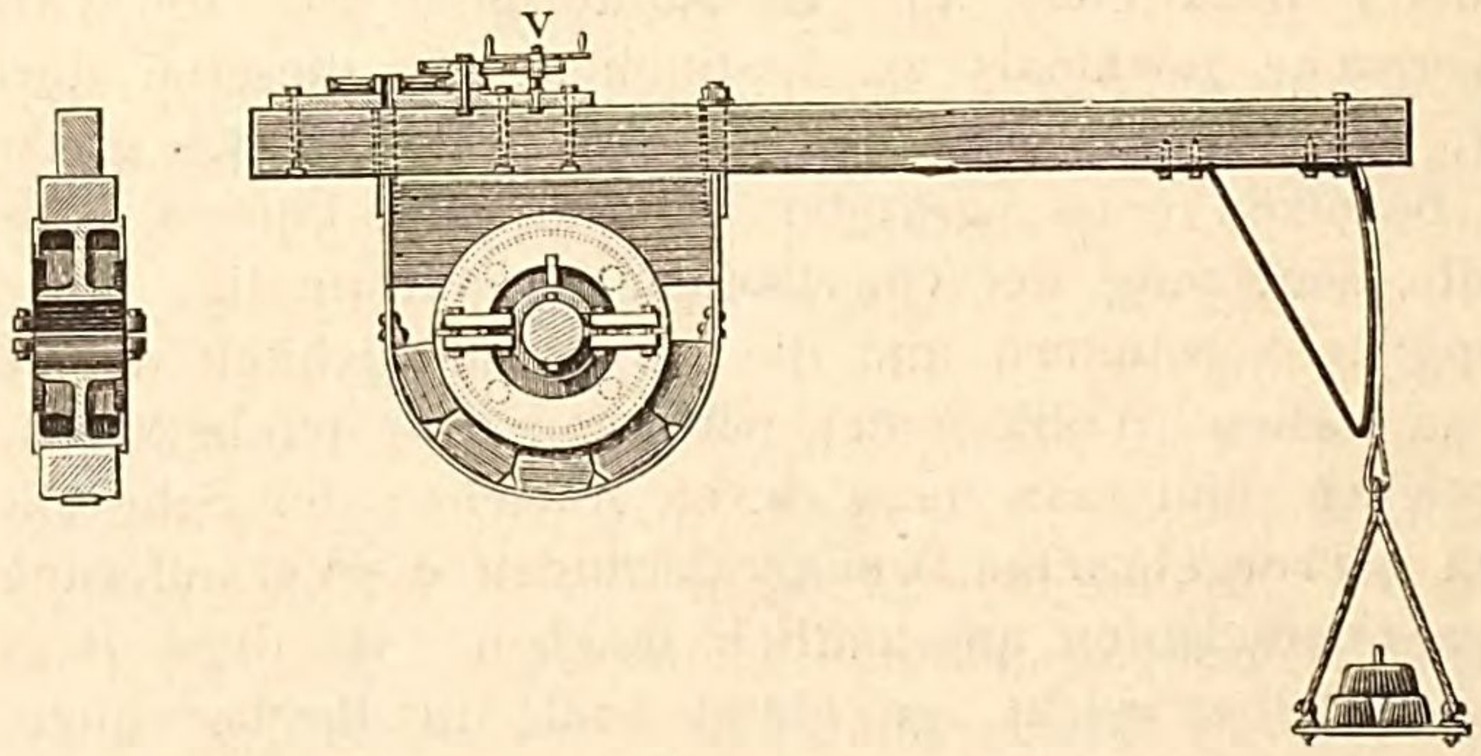


Fig. 247.

stant machen. Man wählt nämlich entweder $d = 0$, was man dadurch erreicht, dass man nach Prony die Bremse in Bezug auf die Achse äquilibrirt (Fig. 248), oder in handlicherer Form nach Kretz, welcher

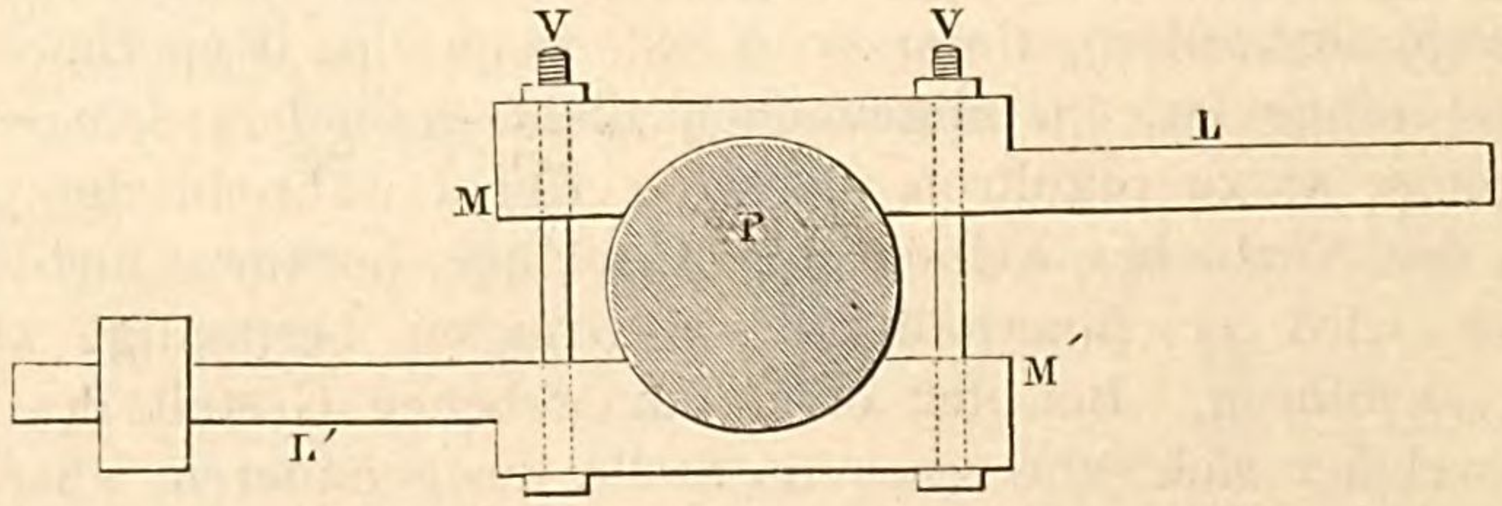


Fig. 248.

eine kreisförmige Bremse anwendet (Fig. 249)[2]); oder, man verlegt den Schwerpunkt der Bremse in die durch die Achse gehende Horizontalebene, wie dies bei der nach den Angaben von General

---

[1]) Fig. 247 giebt die im Jahre 1852 von Rolland gebrauchte und von Farcot für die Maschinen der Strassburger Tabaksmanufactur construirte Bremse wieder. Man presst bei dieser die Backen gegen die Walze mit Hülfe eines Schlüssels, der mittels eines Getriebes auf die Schraubenmutter wirkt. Diese, wie überhaupt die hauptsächlichsten Einrichtungen des Apparates waren von De Saint-Léger empfohlen worden (Annales des mines, XII; 1837).

[2]) Die kreisförmige Bremse, welche von Kretz (1862) für die Untersuchung der Maschinen in der Tabakmanufactur von Paris-Reuilly ersonnen wurde, scheint stets den Vorzug zu verdienen, wenn man über ein grosses abgedrehtes Schwungrad verfügt.

Poncelet[1]) durch Rolland construirten Bremse mit parallelen Hebelarmen der Fall ist. Die Verschiebung des Schwerpunktes geht dann auf einem kleinen Kreisbogen vor sich, der sich, innerhalb

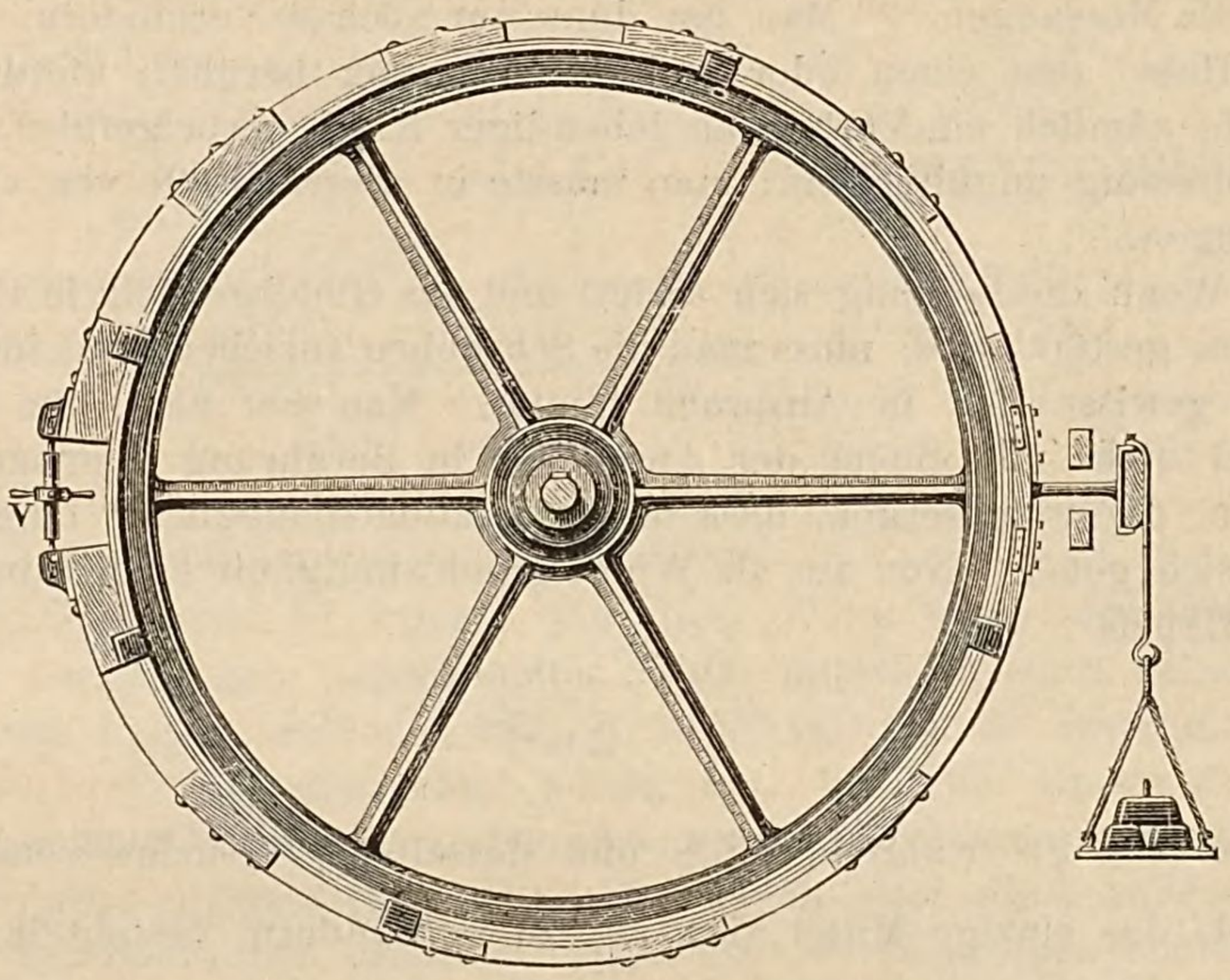


Fig. 249.

der Grenzen der überhaupt vorkommenden Schwankungen, mit seiner vertikalen Tangente vertauschen lässt, so dass in der

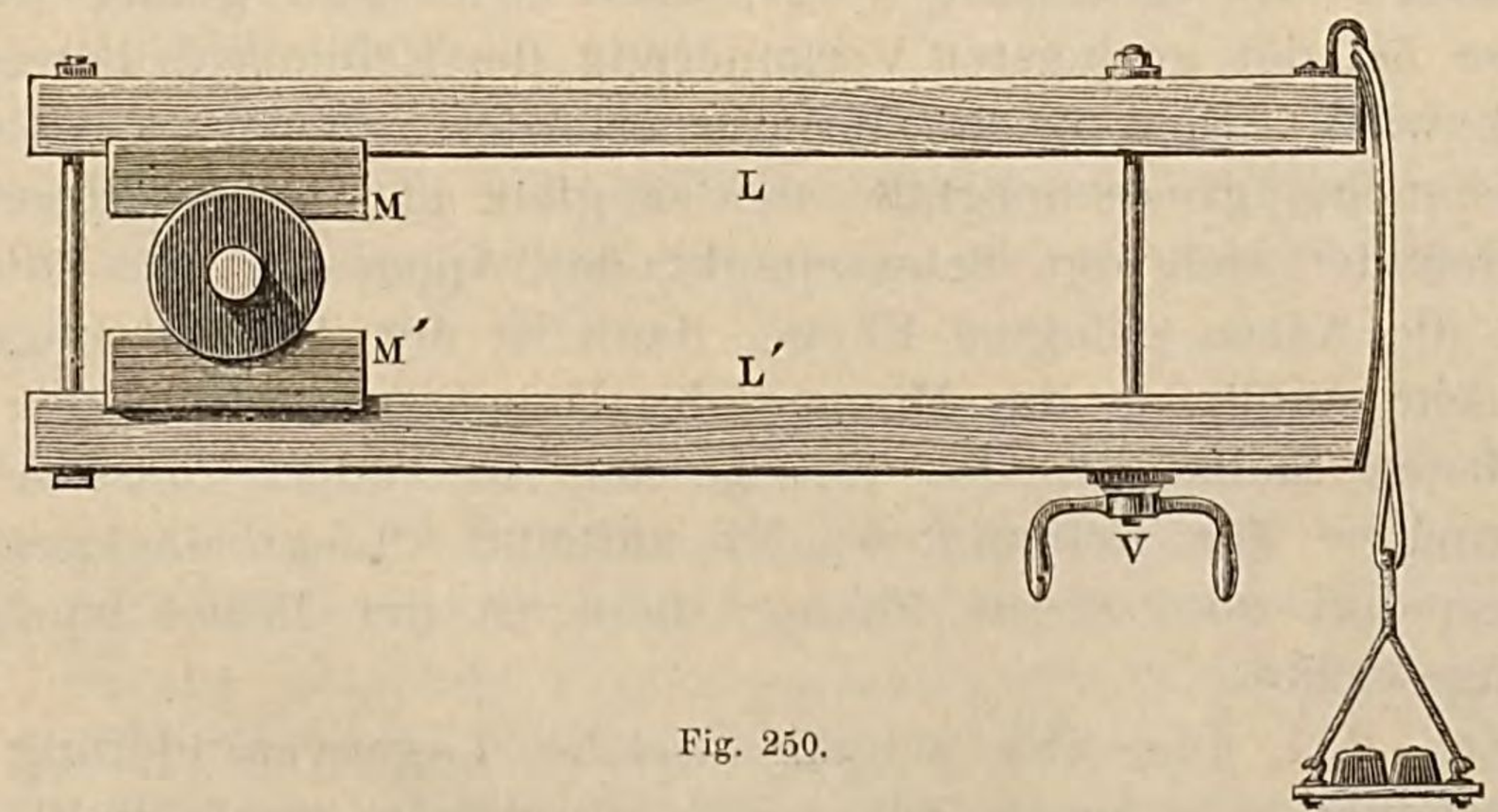


Fig. 250.

Praxis eine solche Bremse ebenso gute Resultate giebt, wie eine aequilibrirte.

---

[1]) Diese Bremse, die zuerst bei Gelegenheit der Abnahme der Maschinen der Tabaksmanufactur zu Lille (1860) construirt wurde, ist unter den exacten Apparaten am leichtesten zu handhaben, wenn man es nur mit Wellen von geringem Durchmesser zu thun hat.

Ist es mit Hülfe einer passenden Anordnung des Apparates gelungen, trotz der Schwankungen des Hebels das Moment $(P+q)\,l$ constant zu machen, so bleiben die Oscillationen ohne Einfluss auf die Messungen.[1]) Man hat dann nur noch zu verhindern, dass der Hebel den einen oder anderen Anschlag berührt; hierdurch würde nämlich ein Verlust an lebendiger Kraft herbeigeführt und die Messung ungültig sein; man müsste in diesem Falle von vorne anfangen.

Wenn die Reibung sich ändert und das Gleichgewicht in Folge dessen gestört wird, muss man die Schrauben anziehen, was immer eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt. Man hat also, um den Hebel nicht mit einem der Anschläge in Berührung kommen zu lassen, dafür zu sorgen, dass die Oscillationen möglichst langsam vor sich gehen. Nun ist die Winkelgeschwindigkeit eines Punktes des Hebels

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Fr - (P+q)\,l}{\Sigma m r^2},$$

wobei $(P+q)\,l$ während eines und desselben Versuches constant bleibt; das einzige Mittel also, $\frac{d\omega}{dt}$ zu vermindern, besteht in der Vermehrung des Trägheitsmomentes $\Sigma m r^2$ der Bremse.

188. Einfluss der Lage des Schwerpunktes der Bremse.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass sich eine genau justirte Bremse bei der geringsten Veränderung der Reibung in Bewegung setzen wird. Eine solche Bremse erfordert allerdings während des Versuches grosse Sorgfalt, aber sie giebt auch genaue Resultate.

Befindet sich der Schwerpunkt des Apparates *unterhalb* der durch die Achse gelegten Ebene, dann ist der Apparat ungenau, aber sehr stabil, da das Moment des Hebelgewichtes in den verschiedenen Stellungen des Hebels sich so ändert, dass es die Änderungen der Reibung wieder aufhebt. Liegt dagegen der Schwerpunkt *über* dieser Ebene, dann ist der Hebel im *labilen* Gleichgewichte.

Fig. 251 und 252 zeigen, welche Lagenveränderung der Schwerpunkt g in beiden Fällen erfahren würde, wenn die Reibung den Hebel mitnähme, und wie in Folge davon das Moment im ersteren Falle wachsen und das Gleichgewicht wieder herzustellen suchen würde, im anderen Falle hingegen abnehmen und den Gleichgewichtszustand noch mehr stören würde.

---

[1]) Cf. Kretz, loc. cit.

So hat also hier die Lage des Schwerpunktes denselben Einfluss, wie bei der Wage. Das Günstigste wird also sein, den Schwerpunkt unterhalb, aber sehr nahe der durch die Achse gehenden

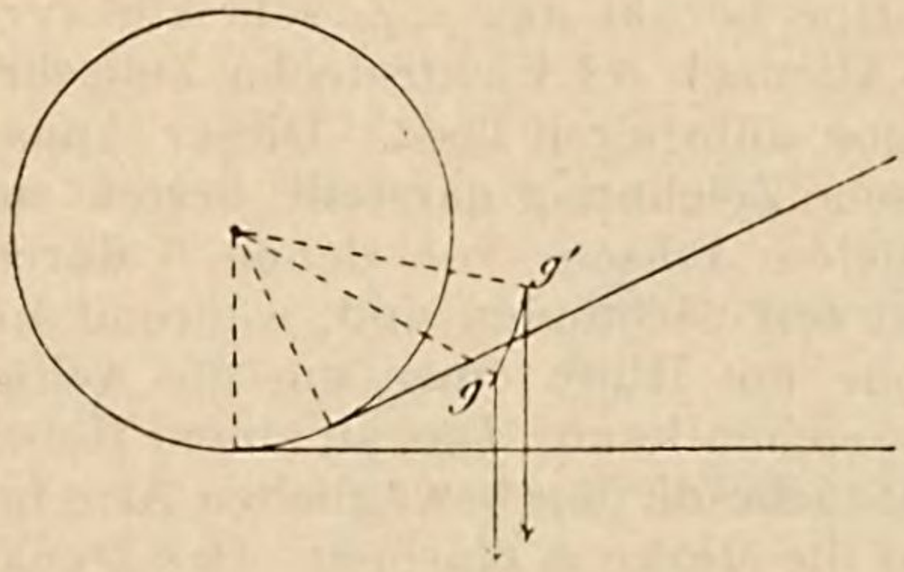


Fig. 251.

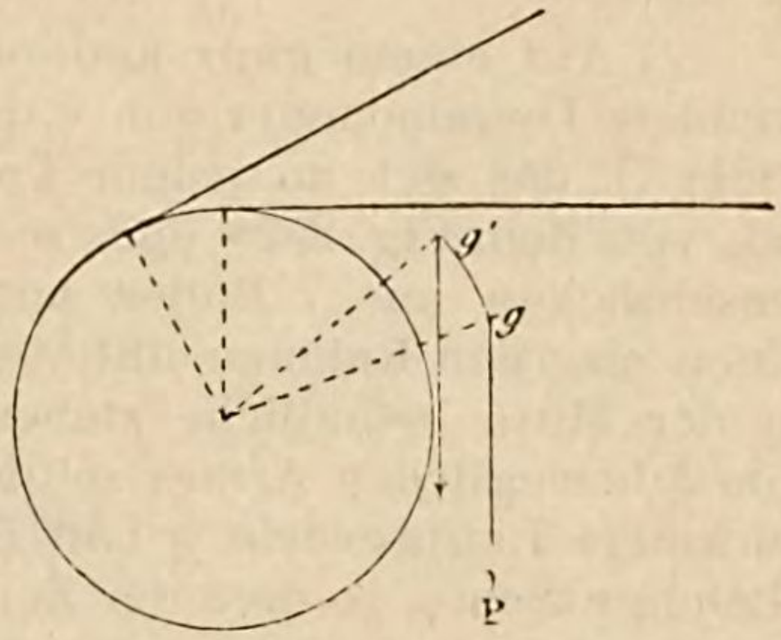


Fig. 252.

Horizontalebene zu legen. Auf diese Weise kann man den aus den Oscillationen herrührenden Fehler unterhalb einer beliebigen Grenze halten und doch dem Apparate genügende Stabilität verleihen, so dass man nicht nöthig hat, bei jeder dieser kleinen Reibungsveränderungen, die sich rasch selbst compensiren, die Schrauben anzuziehen. Abgesehen davon, dass diese Änderungen an den Schrauben ermüden, kann man dadurch auch leicht eine Kraft ausüben, deren Moment in Bezug auf die Achse nicht gleich Null ist; beim Anziehen oder Loslassen der Schrauben mit dem Schlüssel verändert man leicht die relative Lage der Bremse zur Achse in einer oder der anderen Richtung und stört so die Genauigkeit des Versuches.

Man wird also gut thun, an der vorläufig ins Gleichgewicht gesetzten Bremse ein kleines Übergewicht anzubringen, mit Hülfe dessen man je nach Bedürfniss den Schwerpunkt heben oder senken kann.

189. Vorsichtsmaassregeln, welche man bei einem Versuche mit der Bremse zu beobachten hat. — Bei einem so eingerichteten und tarirten Apparate hat man also zum Gelingen des Versuches folgende Vorsichtsmaassregeln zu beobachten:

1. Die Reibung gleichmässig zu erhalten;

2. Dafür zu sorgen, dass die Oscillationen langsam vor sich gehen und die Schrauben sich leicht bewegen können, so dass der Hebel ohne Schwierigkeit zwischen den Anschlägen zu halten ist.

3. Den Versuch lange genug fortzusetzen (mindestens zehn Minuten) um sicher zu sein, dass die Geschwindigkeit der Maschine sich nicht geändert hat und um die Anzahl der Umdrehungen pro Minute genau berechnen zu können.

Unter diesen Bedingungen wird eine Bremse mit parallelen Hebeln oder eine kreisförmige Bremse vollkommen befriedigende Resultate ergeben.[1])

---

[1]) Auf einem ganz anderen Principe beruht das z. Z. sehr viel verwendete Dynamometer von v. Hefner-Alteneck (cf. Elektrotechn. Zeitschr. 1881; 7), das sich an jedem Treibriemen anbringen lässt. Dieser Apparat, von dem Fig. 252[a] eine schematische Zeichnung darstellt, besteht im wesentlichen aus 7 Rollen mit parallelen Achsen, von denen 6 durch einen eisernen Rahmen unter einander fest verbunden sind, während die in der Mitte befindliche siebende Rolle mit Hülfe eines um die Achse von *5* beweglichen Armes seitlich ausweichen kann. Das an einem Hebel wirkende Laufgewicht *p* hält im Ruhezustande den beweglichen Arm im Gleichgewichte, so dass der Zeiger auf die Marke *m* einspielt. Das Dynamometer wird nun so aufgestellt, dass die beiden Theile des zwischen den Rollen laufenden Treibriemens symmetrisch zur Verbindungslinie der Achsen *5* und *6* liegen. Setzt man dann die Maschine in Bewegung, so überwiegt die Spannung des ziehenden Theiles des Treibriemens (in unserem Falle des unteren) diejenige des gezogenen, und es wird in

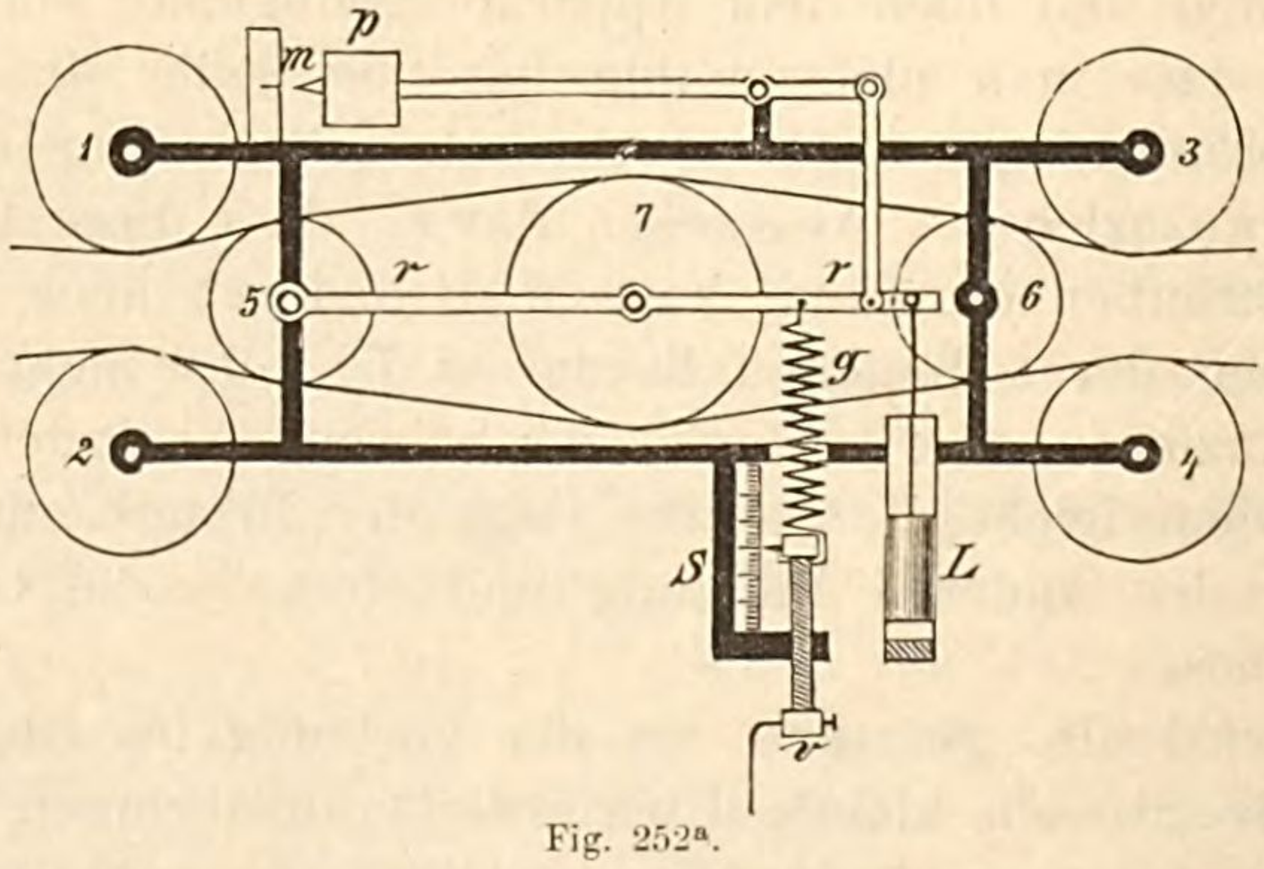


Fig. 252[a].

Folge dessen ein Ausweichen der Rolle nach oben erfolgen. Nun ist aber die Differenz der Riemenspannung gerade ein Mass für die übertragene Kraft, und lässt sich in unserem Falle leicht dadurch messen, dass man bestimmt, welches Gewicht resp. welche Spannung der Feder *g* nothwendig ist, um die Rolle *7* wieder in ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen. Diese Spannung der zuvor tarirten Feder kann an einer Skala *S* abgelesen werden, und man hat, um die übertragene Arbeit zu finden, nur die abgelesene Zahl mit der auf gewöhnliche Art bestimmten Umfangsgeschwindigkeit der getriebenen oder der treibenden Scheibe zu multipliciren, je nachdem man die Arbeit mit oder ohne den durch die Gleitung des Riemens verursachten Verlust messen will. In *L* befindet sich eine kleine Pumpe, welche dazu dient, allzuheftige Schwankungen der beweglichen Rolle zu dämpfen.

Vergleichungen dieses bequem zu handhabenden Dynamometers mit dem Prony'schen Zaume ergaben, dass die Angaben beider Apparate völlig übereinstimmen, dass jedoch das Dynamometer noch wesentlich empfindlicher ist. — G.

Sechstes Capitel.

Stoss der Körper.

190. Vom Stosse. — Wenn ein in Bewegung befindlicher Körper auf einen anderen Körper trifft, der sich in Ruhe oder in einem anderen Bewegungszustande befindet, als der erste Körper, so entsteht ein Stoss.

Abgesehen von der Reibung treten beim Stosse im allgemeinen auch noch Erscheinungen des Gleitens und der Rotation auf, so dass die vollständige Theorie grosse Schwierigkeiten darbietet.[1])

Wir werden uns auf einige einfache Fälle beschränken, deren Untersuchung für die Zwecke dieses Buches von Wichtigkeit ist.

191. Directer Stoss. — Wir betrachten zwei Kugeln A und B, deren Mittelpunkte sich auf ein und derselben Geraden bewegen. Beim Zusammentreffen dieser beiden Systeme entsteht das, was man einen *directen Stoss* nennt. Setzen wir zunächst voraus, dass sich beide Kugeln in derselben Richtung bewegen, und zwar A

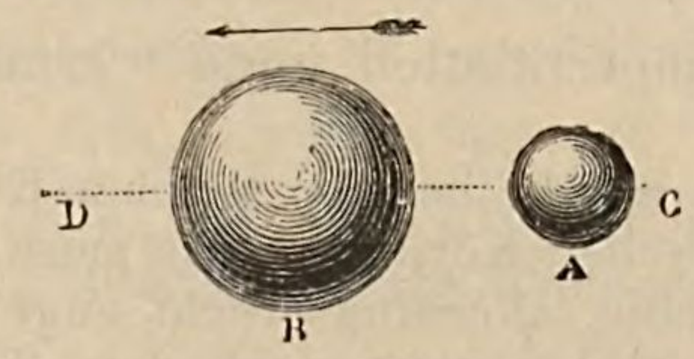


Fig. 253.

schneller als B, dann hat die Kugel A, wenn sie B erreicht, das Bestreben, der letzteren einen Zuwachs an Geschwindigkeit zu ertheilen, aber dieser Zuwachs erfolgt nicht momentan: Die zuerst getroffenen Molecüle von B vermehren zunächst allein ihre Geschwindigkeit, nähern sich also den vor ihnen befindlichen Molecülen, treiben diese vorwärts, und die Kugel B plattet sich

---

[1]) Cf. Résal, Traité de mécanique générale, I und II.

in Folge dessen an der getroffenen Stelle ab. In ganz gleicher Weise aber kommt auch bei A eine Abplattung zu Stande, da die an B angrenzenden Theile anfangs allein eine Verzögerung erleiden. Diese Deformation nimmt nun für jeden der Körper zu, bis die Geschwindigkeiten gleich geworden sind.[1])

Von diesem Momente ab ist der Verlauf je nach den Umständen ein verschiedener; um nur von den beiden extremsten Fällen zu sprechen, werden wir zwischen *vollkommen weichen* und *vollkommen elastischen* Körpern unterscheiden.

Ist bei den ersteren die Gleichheit der Geschwindigkeit einmal erreicht, so tritt weiter keine Änderung mehr ein: Die Deformation dauert fort und ebenso die gemeinsame Geschwindigkeit.

Bei den elastischen Körpern dagegen verschwindet diese Deformation wieder, die Körper kehren vollständig zu ihrem ursprünglichen Zustande zurück.[2])

Diese verschiedenen Verhältnisse lassen sich leicht durch Formeln wiedergeben. Es seien m und m' die Massen der beiden Körper, v und v' ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse, w und w' diejenigen nach dem Stosse. Diese Geschwindigkeiten sollen als positiv betrachtet werden, wenn die Bewegung in Richtung der positiven x vor sich geht, als negativ im entgegengesetzten Falle.

Betrachten wir nun zunächst die erste Periode, die sich bei allen Fällen in gleicher Weise abspielt.

Da keine äusseren Kräfte einwirken, wird die Bewegung des Schwerpunktes während des Stosses nicht geändert. Wenn nun die beiden Punkte m und m' zur Zeit t in x und x' sich befinden und ihr Schwerpunkt in x_1, so gilt:

$$mx + m'x' = (m + m')\, x_1,$$

woraus man durch Differentiation nach t erhält.

---

[1]) Die Deformation, welche bei den weichen Körpern bestehen bleibt, hinterlässt bei den elastischen Körpern keine merklichen Spuren, vorausgesetzt, dass sie nicht eine, allerdings recht enge, Grenze überschreitet (man kann ohne grosse Anstrengung mit dem Schlage eines Hammers auf einem Metalle einen Eindruck hervorrufen). Nichtsdestoweniger ist das Eintreten einer solchen Deformation ganz zweifellos. Lässt man beispielsweise eine Elfenbeinkugel auf eine schwach geölte Marmorplatte herabfallen, so springt dieselbe bis nahe zur ursprünglichen Höhe zurück und hinterlässt auf der Platte eine wesentlich grössere Spur, als wenn man sie nur einfach auf dieselbe gelegt hätte.

[2]) Die von Hertz (Crelle's Journ. 92, p. 156; 1882) entwickelten Formeln für die beim Stosse elastischer Kugeln zu Stande kommenden Geschwindigkeiten und die durch den Stoss hervorgebrachten momentanen Abplattungen hat Schneebeli („Experimentaluntersuchungen über den Stoss elastischer Körper“, Arch. de Gen. (3), 14, p. 435—442; 1885) mittels stählerner Kugeln experimentell geprüft und bestätigt. — G.

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=(m+m')\frac{dx_1}{dt}.$$

Während der äusserst kurzen Zeit des Stosses hat man also in jedem Augenblicke

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=(m+m')u_1,$$

wobei u_1 die constante Geschwindigkeit des Schwerpunktes während des Stosses bedeutet.

Es ist also vor dem Stosse

$$mv+m'v'=(m+m')u_1;$$

und da die gemeinsame Geschwindigkeit, welche beide Körper am Ende der ersten Periode erlangen, offenbar dieselbe ist, wie die constante Geschwindigkeit u_1 des Schwerpunktes, so hat man für diese gemeinsame Geschwindigkeit

$$u_1=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

1. Dies wird also, bei *weichen Körpern*, die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stosse sein.

Man erkennt leicht, dass dieselben, in Ruhe bleiben, wenn

$$mv+m'v'=0,$$

d. h. wenn die Bewegungsmomente gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Ebenso ergiebt sich leicht, dass ein Verlust an lebendiger Kraft stattgefunden hat, der dazu gedient hat, eine gewisse Arbeit zu leisten (bei der dauernden Deformation; derselbe ist gleich $\frac{mm'(v-v')^2}{2(m+m')}$). Dieser Verlust an lebendiger Kraft ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte der verlorenen Geschwindigkeiten. (Theorem von Carnot).[1])

2. Bei den *elastischen Körpern* folgt auf die Periode der Deformation eine Periode der Rückkehr zur ursprünglichen Gestalt, in welcher die Geschwindigkeit der Masse m nochmals die Verminderung $(v-u_1)$ erfährt, während die Geschwindigkeit von m' sich

---

[1]) Carnot, Essai sur les machines en général; Paris 1783.

noch um $(u_1 - v')$ vermehrt, so dass am Ende dieser Periode, d. h. nach dem Stosse die Beziehung gilt:

$$u_1 - w = v - u_1;\ w' - u_1 = u_1 - v',$$

woraus sich ergiebt

$$w = \frac{(m - m')\, v + 2\, m' v'}{m + m'},$$

$$w' = \frac{(m - m')\, v' + 2\, m v}{m + m'}.$$

In diesem Falle findet kein Verlust an lebendiger Kraft statt,[2]) was übrigens a priori klar ist, da der Körper ja vollständig zur ursprünglichen Gestalt zurückkehrt. Man hätte also auch unmittelbar setzen können:

$$m w^2 + m' w'^2 = m v^2 + m' v'^2;$$

hieraus, in Verbindung mit der Bedingung, dass nach dem Stosse ebenso wie vor demselben die Gleichung gilt:

$$m w + m' w' = (m + m')\, u_1$$

oder

$$m w + m' w' = m v + m' v'$$

würde man ebenfalls die obigen Werthe von w und w' erhalten haben.

Sind die beiden Massen gleich, dann geben diese Formeln

$$w = v',\ w' = v,$$

d. h. beide Körper tauschen ihre Geschwindigkeiten aus.

Wenn also der eine Körper vor dem Stosse in Ruhe war, so bleibt der andere nach dem Stosse in Ruhe, während der erstere die ursprüngliche Geschwindigkeit des stossenden Körpers annimmt. Dies kann man leicht mit Hülfe des beistehend abgebildeten Apparates bestätigen, welcher zwei gleiche, neben einander aufgehängte Elfenbeinkugeln trägt. Zieht man die eine derselben zur Seite und lässt sie zurückfallen, so bleibt sie stehen, sobald sie auf die zweite Kugel stösst, welche nun ihrerseits sich erhebt, um dann auf die erste zurückzufallen, die darauf wieder in die Höhe steigt u. s. f.

---

[2]) Thatsächlich giebt es freilich keinen Körper, für welchen nicht der Stoss mit einem gewissen Verluste an lebendiger Kraft verbunden wäre, in Folge der schwingenden Bewegung, welche seinen Molecülen mitgetheilt wird.

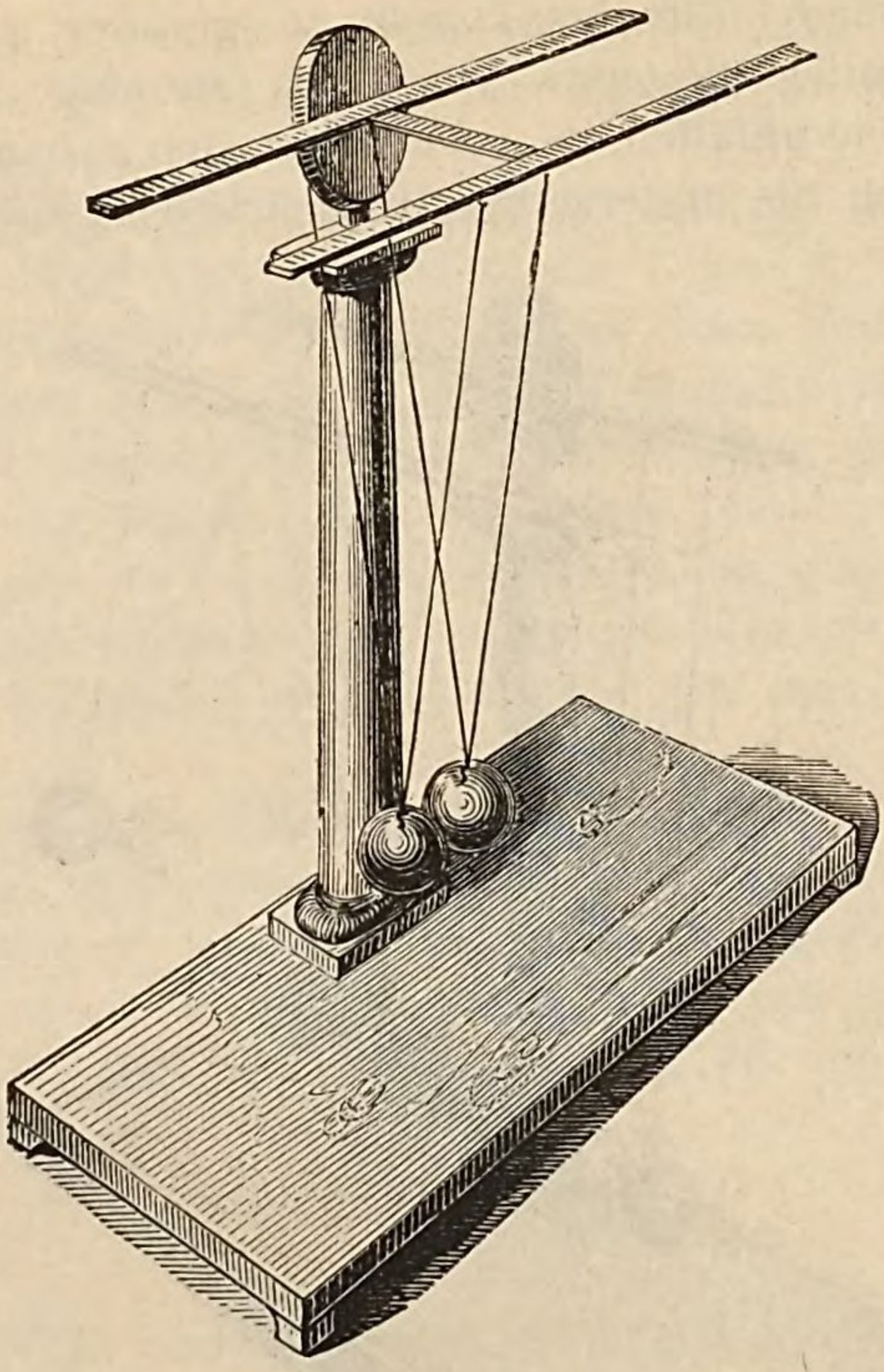


Fig. 254.

Derselbe Apparat gestattet einen sehr lehrreichen Versuch, wenn man an demselben eine grössere Anzahl, etwa sieben an-

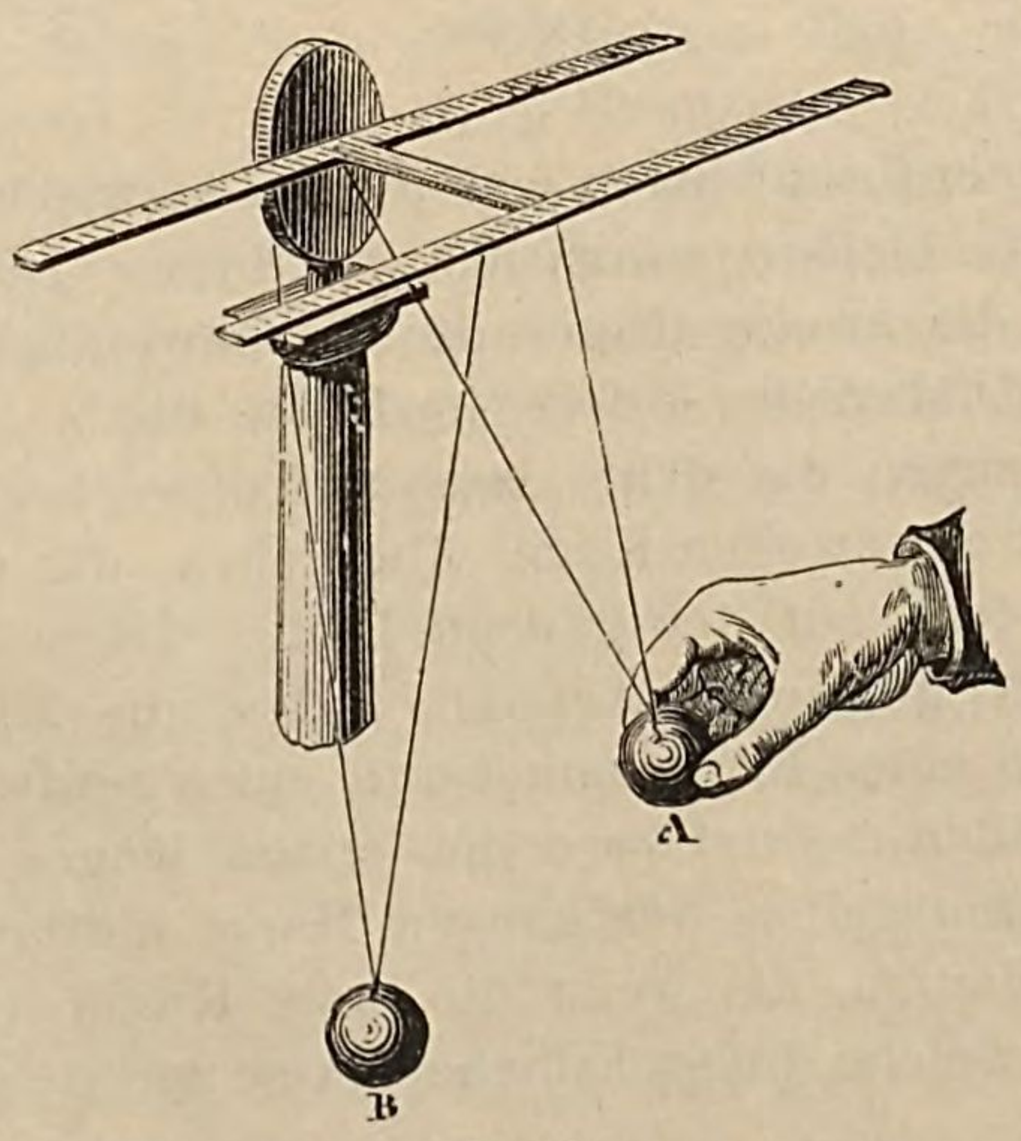


Fig. 255.

einander stossende Elfenbeinkugeln in gerader Linie aufhängt. Hebt man nämlich die erste Kugel bis zu einer gewissen Höhe und lässt sie herabfallen, so sieht man die siebente Kugel fortfliegen und sich bis zu derselben Höhe erheben, von welcher man

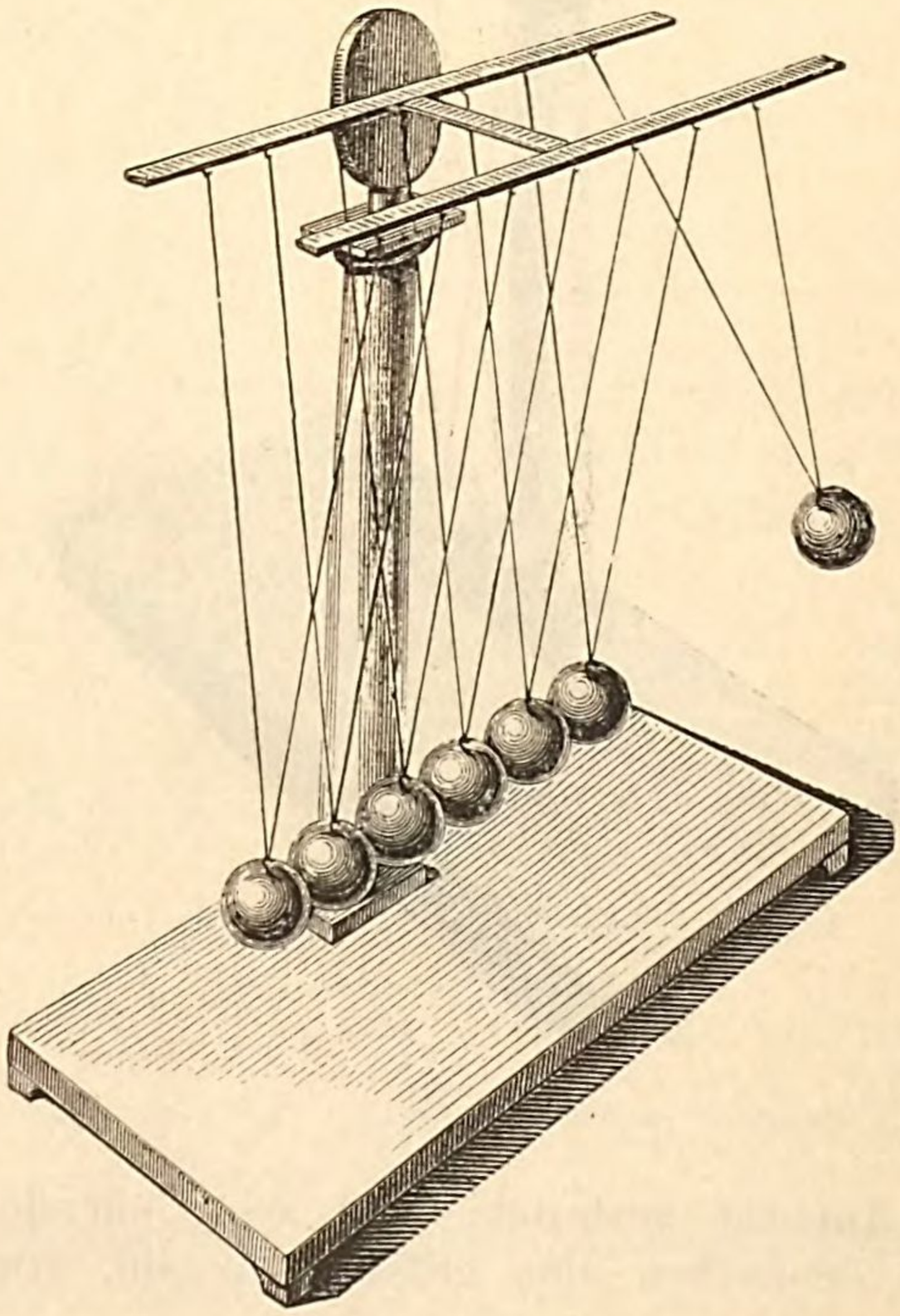


Fig. 256.

die erste hatte herabschwingen lassen; die dazwischen befindlichen Kugeln dagegen bleiben sämmtlich in Ruhe. Dies erklärt sich sehr leicht, da die zweite Kugel die Geschwindigkeit der ersten übernimmt, die ihrerseits sofort in Ruhe bleibt; der Stoss der zweiten Kugel gegen die dritte lässt auf diese letztere die ganze Geschwindigkeit der zweiten Kugel übergehen, die ebenso in Ruhe bleibt, und so fort auf der ganzen Linie. Diese Thatsache bestätigt die oben gemachte Annahme, dass die Mittheilung einer Bewegung durch einen Körper hindurch einer gewissen Zeit bedarf. Wenn sich nämlich beim Stosse der ersten Kugel auf die zweite die Bewegung unmittelbar der ganzen Masse mittheilen würde, so würde alles verlaufen, als wenn die erste Kugel auf eine andere gestossen wäre, welche die sechsfache Masse hätte; dem ist jedoch nicht so.

Ausserdem kann man auch noch durch andere Versuche nachweisen, dass die Übertragung der Bewegung eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt:

1. Eine unter eine Kugel gelegte und mit Federkraft geschnellte Karte fliegt fort, ohne dass die Kugel sich bewegt.

2. Eine etwas schwere Kugel, die an einem Faden aufgehängt ist und von einem Faden derselben Art langsam nach unten gezogen wird, fällt herab, wenn der obere Faden reisst, und zwar wird derselbe eher reissen, als der untere, dessen Spannung geringer ist. Dagegen wird ein sehr kurzer Schlag gegen den unteren Faden diesen zum Reissen bringen, ohne dass die Kugel herabstürzt, da die Bewegung nicht Zeit hat, sich dem oberen Faden mitzutheilen.

3. Eine aus einer Flinte geschossene Bleikugel durchdringt eine Glasscheibe, ohne diese zu zersplittern, während sie dieselbe unfehlbar zersplittert, wenn sie weniger heftig geschleudert wird.

Wenn die Masse m' im Verhältniss zur Masse m sehr gross ist und sie sich vor dem Stosse in Ruhe befindet, so ist ihre Endgeschwindigkeit

$$w' = \frac{2mv}{m + m'}$$

nahezu gleich Null, und die Masse m springt mit einer Geschwindigkeit

$$w = \frac{(m - m')v}{m + m'}$$

zurück, welche nahezu $= -v$ ist.

Die geringe Grösse von w' in diesem Falle erklärt es auch, warum die Schuhmacher sich einen Stein auf die Kniee legen, um ihr Leder darauf zu hämmern, und wie es möglich ist, dass die Gaukler sich Kieselsteine auf ihrem eigenen Leibe zerschlagen lassen können, nachdem sie eine schwere Masse auf denselben gelegt haben: Die Verschiebung dieser Masse ist in der That nahezu gleich Null, während der Hammer heftig zurückspringt.[1])

---

[1]) Auf einer interessanten Anwendung der Gesetze vom Stosse beruht das sogenannte ballistische Pendel, welcher dazu dient, die Geschwindigkeit eines Geschosses in einer gegebenen Entfernung von der Mündung des Rohres zu messen. Es besteht aus einer um eine horizontale Achse leicht drehbaren Eisenstange, welche am unteren Ende einen starken Holzklotz trägt. Wird auf diesen in horizontaler Richtung ein Schuss ahgegeben, so dringt die Kugel in den Klotz ein und bewirkt einen um so grösseren Ausschlag des Pendels, je bedeutender die lebendige Kraft der Kugel ist. Die letztere, und somit auch die Geschwindigkeit v des Geschosses lässt sich berechnen, wenn man die Masse der

192. Schräger Stoss. — Nehmen wir nun an, dass zwei kleine Kugeln schräge auf einander treffen. Die Geschwindigkeiten V und V' vor dem Stosse lassen sich in je zwei andere zerlegen, deren eine, v', senkrecht zur Tangentialebene im Berührungspunkte, die andere t dagegen tangential gerichtet ist. Die normalen Geschwindigkeiten v und v' erleiden dieselben Veränderungen wie beim directen Stosse, und werden zu w und w', die tangentialen werden nicht geändert (wir vernachlässigen dabei immer die Reibung). Hieraus ergeben sich leicht die Endgeschwindigkeiten W und W'.

Ist m' sehr gross und $w' = 0$, so ist $w = -v$; andererseits wird t nicht geändert; die Endgeschwindigkeit W wird also dann gleich V und symmetrisch zu derselben in Bezug auf die im Berührungspunkte O errichtete Tangentalebene MN, was man gewöhnlich so ausspricht: Die Kugel m' wird in der Einfallsebene

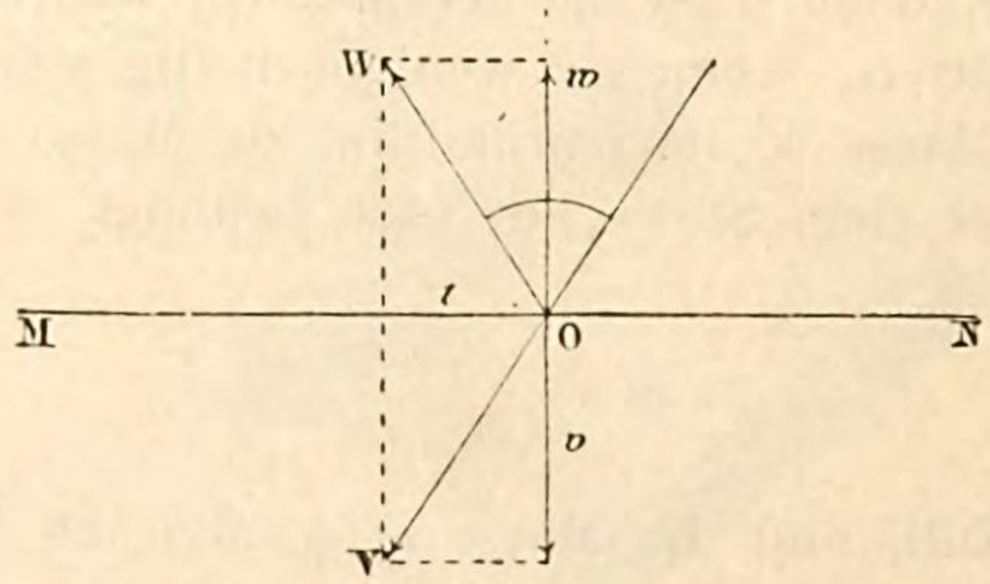


Fig. 257.

(d. h. der Ebene, welche durch die Normale auf der Oberfläche und die Einfallsrichtung bestimmt ist) reflectirt, und der Reflexionswinkel (d. h. der Winkel, den die Richtung der Kugel nach dem Stosse mit der Normalen bildet) ist gleich dem Einfallswinkel, (d. h. dem Winkel zwischen der Richtung der Kugel vor dem Anprall und der Normalen).

Kugel m, die Masse des aus Kugel und Klotz bestehenden Systems M, die reducirte Pendellänge R, die Entfernung a der Schussrichtung von der Achse und die Höhe b bestimmt, bis zu welcher sich der Schwerpunkt des Systems während der ersten halben Schwingung erhebt. Es ist dann:

$$v = \frac{MR}{ma}\sqrt{2gb}$$

(g bedeutet hierbei die Beschleunigung der Schwere).

Selbstverständlich geht ein Theil der lebendigen Kraft durch Reibung verloren und kann nicht mit gemessen werden.

Das von Robius 1742 erfundene ballistische Pendel wurde namentlich zu Ende des vorigen Jahrhunderts zu Woolwich vielfach verwendet; heutzutage zieht man andere Methoden (elektrische Contacte) vor, da dieselben wesentlich genauere Resultate geben. — G.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Reductionstabellen

zur Gauss-Poggendorff'schen Spiegelablesung.

Von

Dr. Paul Czermak,

Privatdocent und Assistent der Physik an der Universität Graz.

In drei Sprachen: Deutsch, Englisch und Französisch.

Mit 7 in den Text gedruckten Figuren. In Leinwand geb. Preis M. 12,—.

Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente

auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879.

Herausgegeben von **Dr. L. Loewenherz.**

Mit 292 in den Text gedruckten Holzschnitten. Preis M. 20,—.

Zeitschrift für Instrumentenkunde.

Organ für Mittheilungen auf dem gesammten Gebiete der wissenschaftlichen Technik.

Herausgegeben
unter Mitwirkung der zweiten (technischen) Abteilung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt u. A.

Redaction: ***Dr. A. Westphal*** *in Berlin.*

Preis des Jahrgangs von 12 Heften M. 18,—.

Zeitschrift

für den physikalischen und chemischen Unterricht.

Unter der besonderen Mitwirkung von

Dr. E. Mach,
Professor an der deutschen Universität zu Prag,

und

Dr. B. Schwalbe,
Professor und Director des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin,

herausgegeben von **Dr. F. Poske.**

Preis des Jahrgangs von 6 Heften M. 10,—.

Chemiker-Kalender.

Ein Hülfsbuch für Chemiker, Physiker, Mineralogen, Industrielle, Pharmaceuten, Hüttenmänner u. s. w.

Von

Dr. Rudolf Biedermann.

In zwei Theilen.

I. Theil gebunden in Leinwand. — II. (Beilage) geheftet, Preis zusammen M. 3,—.
I. Theil gebunden in Leder. — II. (Beilage) geheftet, Preis zusammen M. 3,50.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Experimental-Untersuchungen über Elektricität

von **Michael Faraday.**

Deutsche Uebersetzung von

Dr. S. Kalischer,

Privatdocent an der Technischen Hochschule zu Berlin.

In drei Bänden gr. 8°.

Erster Band.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 8 Tafeln und dem Bildniss Faraday's.
M. 12,—. In Leinwandband M. 13,20.

Zweiter Band.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 6 Tafeln. M. 8,—. In Leinwandband M. 9,20.

Dritter Band.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 5 Tafeln. M. 16,—. In Leinwandband M. 17,20.

Elektricität und Optik.

Vorlesungen,

gehalten von

H. Poincaré,

Professor und Mitglied der Akademie.

*Redigirt von **J. Blondin,** Privatdocent an der Universität zu Paris.*

Autorisirte deutsche Ausgabe von

Dr. W. Jaeger und **Dr. E. Gumlich,**

Assistenten an der Phys.-Techn. Reichsanstalt.

Erster Band.

Die Theorien von Maxwell u. die elektromagnetische Lichttheorie. Mit 39 in den Text gedr. Figuren.
Preis M. 8,—.

Analytische Theorie der Wärme

von **M. Fourier.**

Deutsche Ausgabe von **Dr. B. Weinstein.**

Mit 39 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 8,—.

Handbuch der Physikalischen Maassbestimmungen

von

Dr. B. Weinstein.

In drei Bänden.

Erster Band.

Die Beobachtungsfehler, ihre rechnerische Ausgleichung und Untersuchung.
Preis M. 14,—; geb. M. 15,20.

Zweiter Band.

Einheiten und Dimensionen, Messungen für Längen, Massen, Volumina und Dichtigkeiten.
Preis M. 14,—; geb. M. 15,20.

Dritter Band.

Messungen für Drucke und Kräfte, thermische, optische, akustische, elektrische und magnetische Maassbestimmungen. (In Vorbereitung.)

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Violle, Jules,

Lehrbuch der Physik

Bd.: 1,1

1892

Phys.g. 493 f,I-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11881012-2